14.

[정답] ④ $\dfrac{19}{2}$

[출제 의도] 주어진 조건을 만족시키도록 하는 수열의 귀납적 정의를 추론한다.

점 A_n의 좌표는 $\left(a_n,\ (a_n)^3\right)$이다.

직선 $\mathrm{A}_n A_{n+1}$의 기울기는

$$\frac{(a_{n+1})^3-(a_n)^3}{a_{n+1}-a_n}$$
$$=\frac{(a_{n+1}-a_n)\left((a_{n+1})^2+a_n a_{n+1}+(a_n)^2\right)}{a_{n+1}-a_n}$$
$$=(a_{n+1})^2+a_n a_{n+1}+(a_n)^2$$

($a_{n+1}\neq a_n$이므로 $a_{n+1}-a_n\neq 0$이다.)

이다. 이 값이 $7(a_n)^2$과 같으므로 식을 정리하여 풀면,

$$(a_{n+1})^2+a_n a_{n+1}+(a_n)^2=7(a_n)^2$$
$$\Rightarrow\ (a_{n+1})^2+a_n a_{n+1}-6(a_n)^2=0$$
$$\Rightarrow\ (a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+3a_n)=0$$
$$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=2 \text{ 또는 } \frac{a_{n+1}}{a_n}=-3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

모든 자연수에 대하여 $a_n a_{n+3}>0$이고, $a_1=1>0$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_{3n-2}>0$이다.

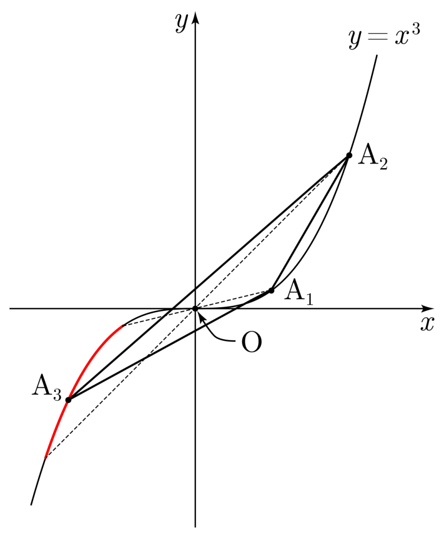
마찬가지로 $a_2,\ a_5,\ \cdots,\ a_{3n-1},\ \cdots$의 부호가 서로 같고, $a_3,\ a_6,\ \cdots,\ a_{3n},\ \cdots$의 부호가 서로 같다.

㉠에 의하여 어떤 자연수 l에 대하여

$a_l a_{l+1}>0$이면 $\dfrac{a_{l+1}}{a_l}=2$이고, $a_l a_{l+1}<0$이면 $\dfrac{a_{l+1}}{a_l}=-3$임을 알 수 있다.

a_{3n-1}과 a_{3n}의 부호를 결정하자.

(ⅰ) $a_{3n-1}>0$인 경우(즉, $a_{3n-1}=2a_{3n-2}$인 경우)



a_{3n-2}와 a_{3n-1}이 양수이므로 점 A_{3n-2}와 점 A_{3n-1}이 제1사분면에 있다. 따라서 삼각형 $\mathrm{A}_{3n-2}\mathrm{A}_{3n-1}\mathrm{A}_{3n}$ 내부에 점 O가 있기 위해서는 A_{3n}의 x좌표 a_{3n}이

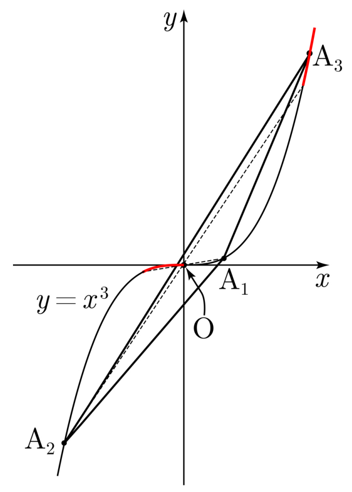
$$-a_{3n-1}<a_{3n}<-a_{3n-2}$$
$$\Rightarrow\ -2a_{3n-2}<a_{3n}<-a_{3n-2}<0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

를 만족시켜야 한다.

그런데 $a_{3n}<0$이면 $a_{3n}=-3a_{3n-1}=-6a_{3n-2}$이므로 ㉡을 만족시킬 수 없다.

따라서 $a_{3n-1}>0$인 경우는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_{3n-1}<0$인 경우(즉, $a_{3n-1}=-3a_{3n-2}$인 경우)



a_{3n-2}는 양수이므로 점 A_{3n-2}는 제1사분면 위에, a_{3n-1}은 음수이므로 점 A_{3n-1}은 제3사분면에 있다.

따라서 삼각형 $\mathrm{A}_{3n-2}\mathrm{A}_{3n-1}\mathrm{A}_{3n}$ 내부에 점 O가 있기 위해서는 A_{3n}의 x좌표 a_{3n}이

$$-a_{3n-2}<a_{3n}<0 \text{ 또는 } a_{3n}>-a_{3n-1}$$
$$\Rightarrow\ -a_{3n-2}<a_{3n}<0 \text{ 또는 } a_{3n}>3a_{3n-2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

를 만족시켜야 한다.

$a_{3n}=2a_{3n-1}$이면 $a_{3n}=-6a_{3n-2}$이고,

$a_{3n}=-3a_{3n-1}$이면 $a_{3n}=9a_{3n-2}$이므로 ㉢을 만족시키려면

$a_{3n}=-3a_{3n-1}$이어서 $a_{3n}=9a_{3n-2}$이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $a_{3n-2}>0$, $a_{3n-1}<0$, $a_{3n}>0$이므로

$$\frac{a_{3m-1}}{a_{3m-2}}=-3,\quad \frac{a_{3m}}{a_{3m-1}}=-3,\quad \frac{a_{3m+1}}{a_{3m}}=2$$

이어서

$$a_{3n-2}=18^{n-1},\quad a_{3n-1}=(-3)\times18^{n-1},\quad a_{3n}=9\times18^{n-1}$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$a_3+\frac{{a_{17}}^2}{a_{34}}=9+\frac{\left((-3)\times18^5\right)^2}{18^{11}}=9+\frac{9}{18}=\frac{19}{2}$$

이다.