[2609(미적)28]

실전특강

부록

엄밀성의 목적은 모든 직관을 파괴하는 것이 아니라
나쁜 직관을 없애고, 좋은 직관을 빛나게 하는 것이다.
— 테런스 타오(1975-), 수학자(필즈상 수상)

Lecture

저자's LECTURE

부록을 시작하기에 앞서

본편에서 다룬 내용들은 이미 고등 교육과정의 범위를 넘어선 부분이 많습니다. 그래서 본문에서는 복잡한 계산이나 증명보다는 직관적인 이해, 그리고 전체적인 흐름 파악에 초점을 맞추었습니다. 그렇기에 복잡한 계산이나 증명은 과감하게 생략하였습니다.

하지만 아마 어떤 분들은 이렇게 느끼셨을지도 모릅니다.

> 이 개념들이 진짜로 어떻게 작동하는 것인지, 수식으로 끝까지 확인해 보고 싶다.

그런 학생들을 위하여 이 [부록]을 준비하였습니다. 항상 강조하듯이, 개념을 공부할 때에는 직관적 이해와 수식을 통한 검증이 동반되어야 하며 수학적 직관은 계산을 통해 완성됩니다. 차수의 개념이 정의에서 어떻게 작동하는지를 직접 보여드리고자 합니다. 그리고 각 내용은 본문 속 어떤 부분과 대응되는지 표기해 두었으니, 부록을 읽은 후 다시 본문을 돌아본다면 이해의 결이 훨씬 더 깊어질 것입니다.

중간중간 더욱 깊은 이해를 위해 잠시 고교 교육과정 외의 내용을 직접적으로 다룰 것입니다. 이 부분은 수학에 흥미와 관심이 있는 학생들을 위한 파트라고 생각하셔도 됩니다. 수학을 좋아하는 학생이라면 한 번쯤은 들어봤을 법한 내용들을 주제에 맞추어 적당히 재단하여 서술하였습니다. 당연히 해당 내용이 직접적으로 출제될 일은 없을 것이므로 '대학 과정' 표시가 있는 내용은 선택적으로 학습하시면 됩니다.

이 부록이 여러분에게 '이해의 마지막 한 끗'을 완성시켜 주는 계기가 되길 바랍니다. 수학을 공부하면서 느낄 수 있는 그 순수한 즐거움, 그 한순간의 깨달음이 여러분의 남은 4주를 의미 있게 채워 주기를 진심으로 바랍니다.

1. 앞으로의 트렌드: 겉함수 추론? [본문 112p(5편 6p)]

본문에서는 $f(g(x))=h(x)$ 에서 속함수 $g(x)$ 나 $h(x)$ 의 정보를 찾는 것에 집중하였다. 기출문제에서 해당 부분을 중점적으로 다루었기 때문인데, 겉함수 $f(x)$ 에 대한 추론도 얼마든지 출제될 수 있다.

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $g(0)>0$ 이다.

(나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$ 의 최솟값을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

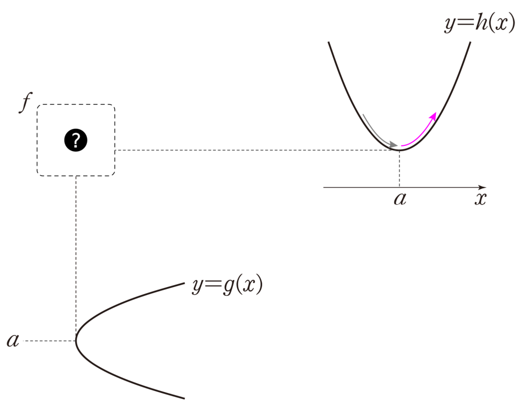
2026학년도 6월 모의평가 미적분 30번

가장 최근 출제된 문항으로는 위의 문항이 있다. 속함수가 단순한 증가함수였기 때문에 추론의 난도가 높지는 않았지만 겉함수인 삼차함수 추론이 주가 되는 문항이었다. 간단히 분석하면 다음과 같다.

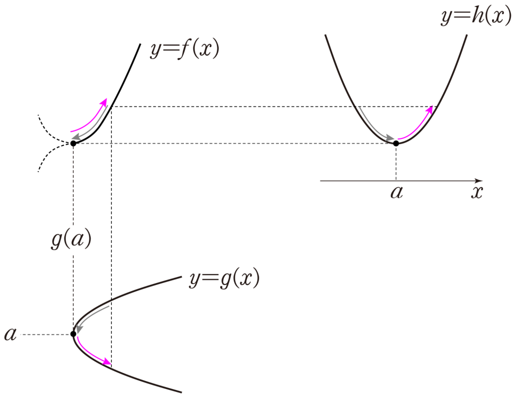
(가)조건: $g(x)$ 가 극소, 속함수 $\frac{2}{1+e^{-x}}$ 가 증가 → 겉함수 $|f(x)|$ 가 극소

(나)조건: $g'(\ln 3)<0$ (감소), 속함수 $\frac{2}{1+e^{-x}}$ 가 증가 → 겉함수 $|f(x)|$ 가 감소

속함수가 단순하지 않은 경우에도 그래프의 대응을 통해 겉함수 $f(x)$ 의 개형을 추론할 수 있다. 예를 들어, 두 함수 $h(x)=f(g(x))$ 와 $g(x)$ 가 모두 $x=a$ 에서 극소인 상황을 떠올려 보자.



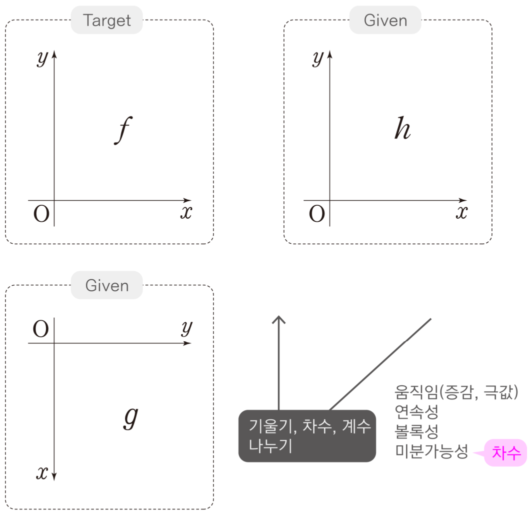
그림에서 $y=h(x)$ 위의 점과 $y=g(x)$ 위의 점을 대응시키며 움직여 보면, 다음 그림과 같이 $f(x)$가 $x=g(a)$의 우측 근방에서 증가하는 개형임을 알 수 있다.



이처럼 점의 대응을 고려하면 겉함수의 개형 역시 얼마든지 추론할 수 있다.

또한 '기울기, 차수, 계수 나누기'를 통해 $h \to f \to g$의 정량적 판단이 가능했던 것처럼, f의 기울기, 차수, 계수 역시 나누기로 추론할 수 있다는 것을 알아두자.

$h=f\times g \Leftrightarrow g=h\div f$
$\Leftrightarrow f=h\div g$



앞서 확인한 예시에서는 '기울기 나누기'를 통해 다음과 같이 추론한 것으로 생각할 수 있다.

거

$x<a$: g, h의 기울기가 모두 음수 $\rightarrow$ f의 기울기 양수

$x>a$: g, h의 기울기가 모두 음수 $\rightarrow$ f의 기울기 양수

2. 차수와 계수의 성질 증명 [본문 26p(2편 6p), 72p(4편 8p), 107p]

본문에서 다룬 차수·계수의 성질을 증명해 보자. 각각의 차수가 존재한다면 다음이 성립한다.

① $(f \circ g$ 차수$) = (f$ 차수$) \times (g$ 차수$)$

② $(f^{-1}$ 차수$) = \dfrac{1}{(f \text{ 차수})}$

③ $(g$ 계수$)^{f\text{ 차수}} = \dfrac{(f \circ g \text{ 계수})}{(f \text{ 계수})}$

증명에서는 편의상 **모든 극한을 우극한으로 가정**하고 우차수, 우계수에 대해서만 증명할 것이다. 이는 정수가 아닌 차수 및 그 계수를 좌·우 각각 다른 방식으로 정의했기 때문인데, 증명은 좌극한인 경우도 모두 동일한 방법으로 진행된다. 증명의 전체적인 흐름만 확인한다고 생각하고 읽어 보자.

Proof **차수, 계수의 성질**

①③ $f(x)$ 의 $x=g(a)$ 에서의 우차수를 p, $g(x)$ 의 $x=a$ 에서의 우차수를 q라 하면 정의에 의해

$$\lim_{x \to g(a)+} \frac{f(x)-f(g(a))}{(x-g(a))^p} = \alpha, \quad \lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^q} = \beta \qquad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$$

라고 쓸 수 있다. 이제 $f(g(x))$ 의 $x=a$ 에서의 우차수를 확인하자.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a+} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{(x-a)^{p \times q}} &= \lim_{x \to a+} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{\left(g(x)-g(a)\right)^p} \times \frac{\left(g(x)-g(a)\right)^p}{(x-a)^{p \times q}} \\ &= \lim_{x \to a+} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{\left(g(x)-g(a)\right)^p} \times \left(\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^q}\right)^p \\ &= \alpha \times \beta^p \ \cdots \ \text{Ⓐ}\end{aligned}$$

에서 $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ 이므로 위의 극한값은 0이 아닌 실수이다. 따라서 $f(g(x))$ 의 $x=a$ 에서의 우차수는 $p \times q$ 이다.

한편 정의에 의해 $f(x)$, $g(x)$ 의 우계수는 각각 $|\alpha|$, $|\beta|$ 이고, Ⓑ에서 $f(g(x))$ 의 우계수는 $|\alpha \times \beta^{\alpha}| = |\alpha| \times |\beta|^{\alpha}$ 이다. 이로부터 ③의 등식이 성립함을 알 수 있다. [증명 끝]

Proof **차수, 계수의 성질**

② ①의 증명에서 g를 f^{-1}로 바꾸면 바로 증명된다. 여기서는 연습을 위해 정의를 통해 증명해 보자.

$f(x)$의 $x=a$에서의 우차수를 p라 하면 정의에 의해 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^p}=\alpha\ (\alpha\neq 0)$이다.

$f^{-1}(x)$의 $x=f(a)$에서의 우차수를 확인하자.

$$\lim_{x\to f(a)+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(f(a))}{\left(x-f(a)\right)^{\frac{1}{p}}}=\lim_{x\to f(a)+}\frac{f^{-1}(x)-a}{\left(f\left(f^{-1}(x)\right)-f(a)\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$=\lim_{x\to f(a)+}\left(\frac{\left(f^{-1}(x)-a\right)^p}{f\left(f^{-1}(x)\right)-f(a)}\right)^{\frac{1}{p}}\ \cdots\ Ⓑ$$

이때 $f^{-1}(x)=t$로 치환하면 $t\to a+$이므로

$$Ⓑ=\lim_{t\to a+}\left(\frac{(t-a)^p}{f(t)-f(a)}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\neq 0$$

이다. 따라서 $f^{-1}(x)$의 $x=f(a)$에서의 우차수는 $\frac{1}{p}$이다. [증명 끝]

위의 증명으로부터 역함수의 계수도 확인할 수 있다. f의 $x=a$에서의 차수가 p, 계수가 α이면 f^{-1}의 $x=f(a)$에서의 계수는 $\frac{1}{\sqrt[p]{\alpha}}$이다. 즉, 다음이 성립한다.

$$f^{-1}\text{ 계수}=\frac{1}{\sqrt[f\text{차수}]{f\text{ 계수}}}$$

3. [2606(미적)28], [2609(미적)28]의 우직한 계산 풀이

특강 ❶-❺를 통해 합성함수 항등식 $f(g(x))=h(x)$를 해석하는 다양한 방법을 배웠는데, 이를 활용하지 않고 우직한 계산만으로 [2606(미적)28]과 [2609(미적)28]을 풀어낼 수도 있다. 수능에서 어떤 풀이가 더 우월한지 따지는 것은 무의미하다. 아래의

열심히 계산하여 정답을 구해내는 풀이

를 정독하며, 복잡한 이론 없이 정확한 계산 능력과 논리력만으로 정답을 구하는 경험을 해보자. 다양한 무기를 갖추어 실제 수능에서는 자신에게 가장 잘 맞는 방법으로 문제를 풀어내는 것이 중요하다.

KEY01 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.6·미적 28번 |

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^{b}$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$이다.

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

(가)조건의 항등식의 양변을 미분하면 다음과 같다.

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) \quad \cdots \text{Ⓐ}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b\right]=\frac{d}{dx}\left[\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)\right]$$

$$\rightarrow \quad 5\left(f(x)\right)^4 f'(x)+3\left(f(x)\right)^2 f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow \quad f'(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} \quad \cdots \text{Ⓑ}$$

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가진다고 했으므로 $f''(x)$를 등장시켜 보자. Ⓑ의 양변을 한 번 더 미분하면 다음을 얻는다.

$$f'(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow \quad f''(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+\left(f'(x)\right)^2\left[20\left(f(x)\right)^3+6f(x)\right]=\frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} \quad \cdots \text{Ⓒ}$$

(나)조건에서 $f(-3)f(3)<0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(k)=0$ 인 상수 k가 열린구간 $(-3,3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

여기서 $f(k)=0$ 인 k를 생각하는 것이 다소 뜬금없이 느껴질 수 있는데, 이러한 행동을 하는 것은 이를 Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ에 대입했을 때 다음과 같이 식의 좌변이 깔끔해지기 때문이다.

$$\text{Ⓐ} \quad \rightarrow \quad \left(f(k)\right)^5+\left(f(k)\right)^3+ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)$$

$$\rightarrow \quad 0^5+0^3+ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right) \quad \rightarrow \quad ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right) \quad \cdots \text{Ⓓ}$$

$$\text{Ⓑ} \quad \rightarrow \quad f'(k)\left[5\left(f(k)\right)^4+3\left(f(k)\right)^2\right]+a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow \quad f'(k)\left[5\cdot 0^4+3\cdot 0^2\right]+a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}} \quad \rightarrow \quad a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}} \quad \cdots \text{Ⓔ}$$

$$\text{Ⓒ} \quad \rightarrow \quad f''(k)\left[5\left(f(k)\right)^4+3\left(f(k)\right)^2\right]+\left(f'(k)\right)^2\left[20\left(f(k)\right)^3+6f(k)\right]=\frac{-2(k+2)(k-1)}{\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow \quad f''(k)\left[5\cdot 0^4+3\cdot 0^2\right]+\left(f'(k)\right)^2\left[20\cdot 0^3+6\cdot 0\right]=\frac{-2(k+2)(k-1)}{\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow \quad 0=\frac{-2(k+2)(k-1)}{\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)^2} \quad \rightarrow \quad -2(k+2)(k-1)=0 \quad \rightarrow \quad k=-2 \text{ 또는 } k=1 \quad \cdots \text{Ⓕ}$$

식이 매우 많고 복잡하지만, 결과만 정리하면 다음과 같다.

$$\text{Ⓓ } ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right), \qquad \text{Ⓔ } a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}}, \qquad \text{Ⓕ } k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

즉, Ⓕ의 $k=-2$ 또는 $k=1$ 을 Ⓔ에 대입하여 a의 값을 구하고, 구한 a의 값과 k의 값을 Ⓓ에 대입하여 b의 값을 구하면 문제를 풀 수 있다. 이때 $k=-2$과 $k=1$ 중 무엇이 정답인 상황인지는 아직 활용되지 않은 조건인 $f'(2)>0$ 을 활용하여 판단하면 될 것이라 예상할 수 있다.

$k=1$ 인 경우부터 생각해 보자. Ⓔ에 $k=1$를 대입하면

$$a = \frac{2\cdot 1+1}{1^2+1+\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}$$

이때 (나)조건의 $f'(2)>0$ 이 성립하는지 확인하기 위하여

$$Ⓑ\ f'(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

에 $x=2$를 대입해 보자. $a=\frac{2}{3}$이므로

$$f'(2)\left[5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\right]+\frac{2}{3}=\frac{2\cdot2+1}{2^2+2+\frac{5}{2}} \quad\rightarrow\quad f'(2)\left[5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\right]=-\frac{4}{51} \quad \cdots\ Ⓖ$$

이때 $f(2)$의 값에 관계없이 $5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\geq 0$인데, (나)조건에서 $f'(2)>0$이므로

$$f'(2)\left[5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\right]\geq 0$$

이 되어 Ⓖ에 모순이 된다. 즉, $k=1$인 경우는 원하는 상황이 아니다.

따라서 $k=-2$일 수 밖에 없으므로[1] 계산하여 정답을 내면 된다. Ⓔ에 $k=-2$를 대입하면

$$a \;=\; \frac{2(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}} \;=\; -\frac{2}{3}$$

이제 Ⓓ에 $a=-\frac{2}{3}$, $k=-2$를 대입하면 다음과 같이 b의 값을 계산할 수 있다.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)(-2)+b=\ln\left((-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}\right) \quad\rightarrow\quad b=-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ a\times e^b \;=\; \left(-\frac{2}{3}\right)\times e^{-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}} \;=\; -3e^{-\frac{4}{3}}$$

각주

1) 이 경우도 다른 조건들을 만족시키는지 모두 확인하여야 완전한 풀이이다. 만약 이 경우도 모순이 나온다면 정답이 존재하지 않는 것인데, 시험문제가 그럴 리 없으므로 믿고 계산만 하면 충분한 것이다. 즉, 정답이 존재하는 '시험문제'라는 것을 고려한 편법(?)과 같은 것이다.

실제로 다른 조건을 모두 만족시키는 것은 스스로 확인해 보도록 하자.

KEY02 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.9·미적 28번 |

삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0) \times \left(g(0)\right)^2$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0) = 0$, $f''(\pi) = 0$

(나) $\sin g(\pi) = 0$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

주어진 항등식의 양변을 미분하면

$$f(x) = g(x) - \tan g(x) \quad \cdots \text{Ⓐ}$$
$$\rightarrow \quad f'(x) = g'(x) - \left(\sec^2 g(x)\right) g'(x) = g'(x)\left(1 - \sec^2 g(x)\right) = -g'(x)\tan^2 g(x) \quad \cdots \text{Ⓑ}$$

이때 (나)조건의 $\sin g(\pi) = 0$ 에서

$$\sin g(\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad g(\pi) = k\pi \ (k\text{는 정수})$$
$$\rightarrow \quad \tan g(\pi) = \tan(k\pi) = 0$$

이므로 Ⓐ, Ⓑ에 $x = \pi$ 를 대입하면

$$\text{Ⓐ} \quad \rightarrow \quad f(\pi) = g(\pi) - \tan g(\pi) = g(\pi) = k\pi$$
$$\text{Ⓑ} \quad \rightarrow \quad f'(\pi) = -g'(\pi)\tan^2 g(\pi) = -g'(\pi) \cdot 0^2 = 0$$

이때 (가)조건에서 $f''(\pi) = 0$ 라 했으므로 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = \pi$ 에서 변곡점을 갖는다. 그런데 위의 $f'(\pi) = 0$ 에서 이 변곡점에서의 기울기가 0 임을 알 수 있으므로 함수 $f(x)$ 의 식을 다음과 같이 세울 수 있다.

$$f(x) - f(\pi) = a(x-\pi)^3 \quad \rightarrow \quad f(x) = a(x-\pi)^3 + f(\pi)$$
$$= a(x-\pi)^3 + k\pi \quad (a\text{는 } a \neq 0 \text{인 상수, } k\text{는 정수}) \quad \cdots \text{Ⓔ}$$

이제 남은 조건인 $f(0) = 0$ 과 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$ 로 a 와 k 의 값을 구해 보자.

먼저 정수 k에 대하여 $g(\pi)=k\pi$이므로 $g(\pi)$로 가능한 값은 다음과 같다.

$$g(\pi) = \cdots,\ -3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$$

이때 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$이므로 사잇값 정리에 의하여 다음 ❶❷의 결과를 얻을 수 있다.

❶ $g(\pi)<\frac{\pi}{2}$인 경우, 즉 $g(\pi)=0,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \cdots$

$\rightarrow$ $g(x_1)=\frac{\pi}{2}$인 실수 x_1이 열린구간 $(\pi,\ \infty)$에 적어도 하나 존재

❷ $g(\pi)>\frac{5\pi}{2}$인 경우, 즉 $g(\pi)=3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ \cdots$

$\rightarrow$ $g(x_2)=\frac{5\pi}{2}$인 실수 x_2가 열린구간 $(\pi,\ \infty)$에 적어도 하나 존재

$\tan\frac{\pi}{2}$와 $\tan\frac{5\pi}{2}$의 값은 정의되지 않으므로 ❶❷의 경우 다음과 같이 삼차함수 $f(x)$가 정의되지 않는 점이 반드시 생기는데, 다항함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 이는 모순이다.

❶ $g(\pi)<\frac{\pi}{2}$인 경우 $\rightarrow$ $f(x_1) = g(x_1)-\tan g(x_1) = \frac{\pi}{2}-\tan\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ $f(x_1)$이 정의되지 않음

❷ $g(\pi)>\frac{5\pi}{2}$인 경우 $\rightarrow$ $f(x_2) = g(x_2)-\tan g(x_2) = \frac{5\pi}{2}-\tan\frac{5\pi}{2}$

$\rightarrow$ $f(x_2)$가 정의되지 않음

$\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{5\pi}{2}$일 때에는 이러한 모순이 생기지 않으므로 $g(\pi)=\pi$ 또는 $g(\pi)=2\pi$이다. 이때 둘 중 무엇이 정답인 상황인지는 다른 조건을 만족시키는지 확인하여 판단하면 된다.

먼저 $g(\pi)=\pi$인 경우부터 생각해 보자. 즉, Ⓔ에서 $k=1$인 경우를 생각하면 된다. $f(0)=0$이므로

Ⓔ $f(x) = a(x-\pi)^3+k\pi = a(x-\pi)^3+\pi$ $\rightarrow$ $f(0) = -a\pi^3+\pi = 0$ $\rightarrow$ $a=\frac{1}{\pi^2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^3+\pi$임을 알 수 있다. 이 함수가 다른 조건을 만족시키는지 확인해 보자.

$g(t_1)>\frac{3\pi}{2}$인 실수 $t_1(t_1>\pi)$이 존재한다면 역시 사잇값 정리에 의하여 $g(t_2)=\frac{3\pi}{2}$인 실수 t_2가 열린구간 (π,t_1)에 적어도 하나 존재한다. $\tan\frac{3\pi}{2}$의 값은 정의되지 않으므로 위의 ❶❷의 경우와 마찬가지로 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$f(t_2) \;=\; g(t_2)-\tan g(t_2) \;=\; \frac{3\pi}{2}-\tan\frac{3\pi}{2} \quad\rightarrow\quad f(t_2)\text{가 정의되지 않음}$$

즉, 삼차함수 $f(x)$가 $x=t_2$에서 정의되지 않는 모순이 생긴다. 따라서 $x>\pi$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le\frac{3\pi}{2}$임을 알 수 있다.

처음에 '$g(t_1)>\frac{3\pi}{2}$인 실수 $t_1(t_1>\pi)$이 존재한다면' 이라는 가정으로 시작하여 모순이 발생했으므로 가정이 거짓이 되는 것이다. 이는 전형적인 귀류법의 논리이다.

즉, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\frac{3\pi}{2}$이고 (π,∞)에서 $g(x)\le\frac{3\pi}{2}$이므로 $x\to\infty$일 때 $g(x)\to\frac{3\pi}{2}-$이고, 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x) \;&=\; \lim_{x\to\infty}\big(g(x)-\tan g(x)\big) \;=\; \lim_{x\to\infty}g(x)-\lim_{x\to\infty}\tan g(x)\\ &=\; \frac{3\pi}{2}-\lim_{s\to\frac{3\pi}{2}-}\tan s \;=\; -\infty\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 그런데 앞에서 구한 $f(x)=\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^3+\pi$는 최고차항의 계수가 양수이므로 당연히 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이고 이는 위에서 얻은 결과와 모순이다. 즉, $g(\pi)=\pi$는 원하는 상황이 아니다.

따라서 $g(\pi)=2\pi$일 수 밖에 없으므로[1] 계산하여 정답을 내면 된다. Ⓔ에서 $k=2$인 경우를 생각하면 된다. $f(0)=0$이므로

$$Ⓔ\;\; f(x) \;=\; a(x-\pi)^3+k\pi \;=\; a(x-\pi)^3+2\pi \quad\rightarrow\quad f(0) \;=\; -a\pi^3+2\pi \;=\; 0 \quad\rightarrow\quad a=\frac{2}{\pi^2}$$

즉, $f(x)=\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+\pi$임을 알 수 있다. 이제 $g'(0)\times\big(g(0)\big)^2$의 값을 구하자. $f(0)=0$이므로

$$f(0)=g(0)-\tan g(0) \quad\rightarrow\quad 0=g(0)-\tan g(0) \quad\rightarrow\quad g(0)=\tan g(0)$$

이다. 이때 Ⓑ에서 $f'(x)=-g'(x)\tan^2 g(x)$이므로 다음을 얻는다.

$$f'(0) \;=\; -g'(0)\tan^2 g(0) \;=\; -g'(0)\times\big(g(0)\big)^2 \quad (\because\;\tan g(0)=g(0))$$

즉, $g'(0)\times\big(g(0)\big)^2=-f'(0)$이다. $f(x)=\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+\pi$의 도함수는 $f'(x)=\frac{6}{\pi^2}(x-\pi)^2$이므로

$$f'(0) \;=\; \frac{6}{\pi^2}(0-\pi)^2 \;=\; 6 \quad\rightarrow\quad g'(0)\times\big(g(0)\big)^2 \;=\; -f'(0) \;=\; -6$$

각주

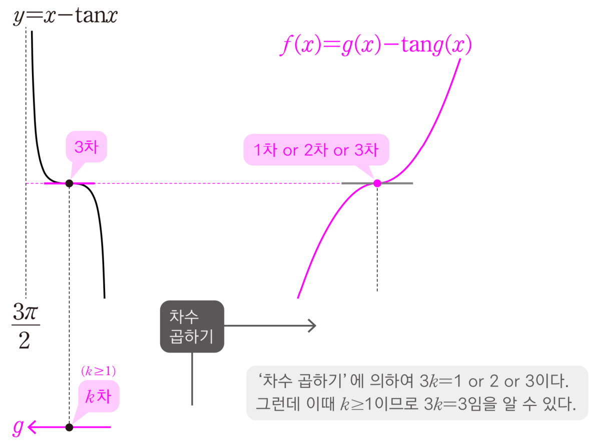
1) 이 경우도 다른 조건들을 만족시키는지 모두 확인하여야 완전한 풀이이다. 실제로 다른 조건을 모두 만족시키는 것은 스스로 확인해 보도록 하자.

여기서 제시한 풀이는 앞의 특강 ❶-❺의 내용을 최대한 배제하고, 여러 함수의 미분법·연속성·사잇값 정리 등 기본적인 개념만을 활용한 풀이이다. 하지만 실제 문제를 풀 때에는 이렇게 제한할 필요가 없고, 오히려 본인이 이해하고 있는 모든 개념과 도구를 유기적으로 결합해 문제를 해결하는 것이 이상적이다.

같은 문항도 접근법에 따라 완전히 다른 사고과정을 경험할 수 있다. 따라서 기출 문제를 여러 번 다른 방법으로 풀어보며 '왜 이렇게 되는가'를 스스로 납득하고, 그 과정을 통해 자신만의 풀이를 완성할 수 있도록 하자. 이렇게 풀이를 완성해본 경험을 쌓아나가면 수학적 사고력 자체가 한 단계 성장하게 될 것이다.

4. [2609(미적)28]의 과조건 [본문 17p(1편 11p)]

[2609(미적)28]에서 (가)조건의 $f''(\pi)=0$ 과 (나)조건의 $\sin g(\pi)=0$ 중 하나는 없어도 되는 과조건이다. 즉, 둘 중 하나만 알아도 다른 하나를 유도해낼 수 있다. 왜 그런지 함께 확인해 보자.



위와 같이 차수논리로 $f(x)$ 에 3차인 점(변곡점)이 있음을 알 수 있는데, 이는 $y=x-\tan x$ 의 변곡점에 대응된다. 그런데 $y=x-\tan x$ 의 변곡점은 $x=n\pi$ (n은 정수)에서 생기므로, 삼차함수 $f(x)$ 의 하나뿐인 변곡점과 $g(x)=n\pi$ 를 만족시키는 점은 반드시 대응될 수밖에 없다. 즉, 어떤 실수 α 에 대하여

$$g(\alpha)=n\pi \quad \Leftrightarrow \quad f''(\alpha)=0$$

이다. 따라서 $\sin g(\pi)=0$ 만 주어져도 $f''(\pi)=0$ 임을 알 수 있고, $f''(\pi)=0$ 만 주어져도 $\sin g(\pi)=0$ 임을 알 수 있는 것이다.

5. 테일러 전개 대학 과정 [본문 22p(2편 7p), 99p(5편 11p)]

본문에서 '자연수 차수'의 함수들은 그 곡선을 '다항함수의 그래프'처럼 볼 수 있음을 배운 바 있다. 여기에서는 다항식의 전개와 그 차수, 계수에 대해 조금 더 조사해 보고, '초월함수의 자연수 차수'의 이론적 근거 및 활용에 대해 공부할 것이다.

먼저 다항함수의 계수를 분석해 보자. 함수 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$에서, '$x=0$ 대입'과 '양변 미분'을 번갈아가며 반복하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{lllll}
f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 & \rightarrow & f(0)=a_0 & \rightarrow & a_0=f(0) \\
f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1 & \rightarrow & f'(0)=a_1 & \rightarrow & a_1=f'(0) \\
f''(x)=6a_3x+2a_2 & \rightarrow & f''(0)=2a_2 & \rightarrow & a_2=\dfrac{f''(0)}{2!} \\
f^{(3)}(x)=6a_3 & \rightarrow & f^{(3)}(0)=6a_3 & \rightarrow & a_3=\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}
\end{array}
$$

위와 같이 $f(x)$의 각 항의 계수는 $f(x)$의 n계도함수의 함숫값과 관련된 값이고, 일반적으로 x^n의 계수는 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$과 같이 나타낼 수 있다.

위 내용에 의하면 이차함수 $f(x)=x^2-3x+4$에서는 $f(0)=4$, $-3=f'(0)$, $1=\dfrac{f''(0)}{2}$이다. 그런데 $f(x)$는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$f(x)=(x-1)^2-(x-1)+2$$

이를 $f(x)$의 $x=1$에서의 전개라고 한다. 이 상태에서 '$x=1$ 대입'과 '양변 미분'을 반복하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{array}{lll}
f(x)=(x-1)^2-(x-1)+2 & \rightarrow & f(1)=2 \\
f'(x)=2(x-1)-1 & \rightarrow & f'(1)=-1 \\
f''(x)=2 & \rightarrow & f''(1)=2
\end{array}
$$

이처럼 $(x-1)^n$의 계수가 $x=1$에서의 n계도함수와 관계된 값임을 알 수 있다. 즉, 함수를 어떻게 전개하느냐에 따라 계수의 의미가 달라진다는 것이다. 구체적으로는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$f(x)=a_3(x-\alpha)^3+a_2(x-\alpha)^2+a_1(x-\alpha)+a_0 \quad \rightarrow \quad a_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

여기에서 $f(x)=\sin x$ 라는 함수를 생각해 보자. **만약 $f(x)$ 를 다항식처럼 나타낼 수 있다면**, 즉

$$\sin x \;=\; a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots \quad \cdots \text{Ⓐ}$$

와 같이 나타낼 수 있다고 가정하면 동일한 관찰을 통해

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

일 것임을 알 수 있다. 이때 $f(x)=\sin x$ 를 미분하면 $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cdots$ 가 반복되므로

$$\begin{gathered} f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f^{(3)}(0)=-1, \\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=1,\ f^{(6)}(0)=0,\ f^{(7)}(0)=-1,\ \cdots \\ \Downarrow \\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-\frac{1}{3!},\ a_4=0,\ a_5=\frac{1}{5!},\ a_6=0,\ a_7=-\frac{1}{7!},\ \cdots \end{gathered}$$

이다. 이를 Ⓐ에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\sin x \;=\; x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\cdots$$

이때 $\sin x$ 는 무한번 미분가능하므로 뒤의 항이 무한히 많이 이어질 것이다. 즉, $\sin x$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sin x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

이것을 $\sin x$ 의 $x=0$ 에서의 전개라고 생각할 수 있다. 이러한 전개를 '테일러 전개'라 한다.

실전 개념 **테일러 전개**

교과서 개념 · 실전 개념

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 무한번 미분가능할 때, 다음을 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 테일러 전개라 한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

특정 조건을 만족시키는 함수와 구간에 대해[1] 위 급수는 $f(x)$ 와 같은 값을 갖는다. 즉, 다음이 성립한다.

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

테일러 전개에 대해서는 이런 것이 있다는 정도만 알아두고 넘어가도 충분하다. 이 개념을 소개한 이유는 기본 함수에 대한 이해도를 높이기 위함이다.

우리가 자주 다루는 e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 와 같은 함수는 모두 각 점의 근방에서 테일러 전개가 가능하고, 이로부터 위 함수들의 그래프 위의 모든 점에서의 **차수가 자연수**임이 보장되어 있다는 것이다.

특히 각 함수의 $x=0$ 에서의 테일러 전개는 다음과 같다.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$ [2]

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

당연히 외울 필요는 없지만 이런 전개가 가능하다는 것을 한 번만 봐 두면 극한 계산 및 차수 판정에 도움이 되는 경우가 있을 것이다. 실제로 2026학년도 9월 모의평가에 출제된 함수 $y=x-\tan x$ 의 차수 판정에 활용되었다. 위의 급수에서

$$x-\tan x = -\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{15}-\cdots$$

사실 이 한 문제 때문에 테일러 급수를 소개한 것이다. 이런 함수가 다시 출제될 확률은 극히 낮으므로, 함수에 대한 이해도를 높이기 위해 한 번쯤 봐둔다는 느낌으로 공부하면 충분하다.

이므로, $x-\tan x$ 의 변곡점에서의 차수가 3 임을 바로 알 수 있었다.

각주

1) 여기에서는 자세히 논하지 않는다. 기본적인 함수 e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 는 각 점의 근방에서 조건을 만족시킨다고 알아두면 된다.

2) $\ln x$ 는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 가장 특징적인 점 $(1, 0)$ 이 원점에 오도록 평행이동하여 전개한 것이다.

6. 로피탈의 정리[대학 과정]와 차수논리 [본문 30p(2편 10p)]

본편에서는 곡선 $y=x-\tan x$ 의 변곡점에서의 차수를 판단할 때

도함수인 $1-\sec^2 x=-\tan^2 x$ 가 2차이므로 원함수가 3차

라고 했고, 간단한 설명 및 주의사항을 공부하였다. 그 내용을 일반적으로 정리하면 다음과 같다.

실전 개념 **미분·적분과 차수** 교과서 개념 실전 개념

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 차수가 $n\,(n\geq 1)$이고, 도함수 $f'(x)$ 의 차수와 부정적분 $F(x)$ 의 차수가 존재할 때 다음이 성립한다.

$$(f'(x) \text{ 의 } x=a \text{ 에서의 차수}) = \begin{cases} n-1 & (n\neq 1 \text{인 경우}) \\ \text{일정하지 않음} & (n=1 \text{인 경우}) \end{cases}$$

$$(F(x) \text{ 의 } x=a \text{ 에서의 차수}) = \begin{cases} n+1 & (f(0)=0 \text{인 경우}) \\ 1 & (f(0)\neq 0 \text{인 경우}) \end{cases}$$

여기에서는 차수와 미분·적분에 대한 이론적 근거인 로피탈의 정리를 간단히 알아보고, 이를 통해 위의 미분·적분과 차수를 증명해볼 것이다. 먼저 로피탈의 정리는 다음과 같다.

실전 개념 **로피탈의 정리** 교과서 개념 실전 개념

a 를 포함하는 열린구간 I 에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

① $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ 또는 $\lim_{x\to a}|g(x)|=\infty$ 이고

② $I-\{a\}$ 에서 $g'(x)\neq 0$ 이며

③ $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 의 값이 존재하거나 $\pm\infty$ 로 발산하면

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 이다.

정리를 적용하기 위해서는 조건 ①②③을 확인해야 하는데, 일단 결과만 한 마디로 표현하면 다음과 같다.

‘분모·분자를 각각 미분한 뒤에 극한을 취해도 같은 값’

연습 삼아 $y=x-\tan x$ 의 $x=0$ 에서의 차수가 3 임을 증명해 보자.

Proof **$x-\tan x$ 의 차수**

정의에 따라 극한값 $\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^n}$ 가 0 이 아닌 값으로 존재하도록 하는 n 의 값을 찾아야 한다.

이때 단순 식 변형으로는 위 극한의 계산이 매우 어려우므로, 로피탈의 정리를 이용해 보자.

극한식의 분모·분자를 각각 미분하면

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-\tan x)'}{(x^n)'} = \lim_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to0}\frac{-\tan^2 x}{nx^{n-1}}$$

이고, 이 극한값이 0 이 아닌 실수로 존재하기 위해서는 $n-1=2$ 여야 하므로 $n=3$ 이다.

이제 로피탈의 정리에 의해

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3} \quad (\neq 0)$$

이므로 함수 $y=x-\tan x$ 의 $x=0$ 에서의 차수가 3 임을 알 수 있다. [증명 끝]

동일한 방법으로 미분·적분과 차수를 증명해 보자.

Proof **미분·적분과 차수**

$f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 차수를 $n\,(n>1)$이라 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=k \ \cdots \ Ⓐ \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{(x-a)^{n-1}}=k$$

를 만족시키는 0 이 아닌 실수 k 가 존재한다. 이때 만약 **$n>1$ 이면** 분모 $(x-a)^{n-1}$ 이 0 으로 수렴한다.

따라서 분자도 0 으로 수렴하므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \quad \rightarrow \quad f'(a)=0$$

이때 **$f'(x)$ 의 차수가 존재**하므로 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n-1}}$ 의 값이 0 이 아닌 실수로 존재한다.

따라서 Ⓐ에서 로피탈의 정리에 의해

$$k = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{n(x-a)^{n-1}} \quad (\because\ f'(a)=0)$$

Proof **미분·적분과 차수**

$$\rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{(x-a)^{n-1}} = nk \neq 0$$

$\therefore$ $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 차수가 $n\,(n>1)$이면 $f'(x)$ 의 차수는 $n-1$ 이다.

$F(x)$ 의 차수 역시 로피탈의 정리를 통해 확인하자.

i) $f(a)=0$ 인 경우

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{k}{n+1} \neq 0$$

이므로 $F(x)$ 의 $x=a$ 에서의 차수는 $n+1$ 이다.

ii) $f(a)\neq 0$ 인 경우

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{(x-a)^{1}} = F'(a) = f(a) \neq 0$$

이므로 $F(x)$ 의 $x=a$ 에서의 차수는 1 이다.

중간에 '$f'(x)$ 의 차수가 존재한다면'이라는 표현을 썼는데, 이는 $f(x)$ 는 차수를 갖지만 $f'(x)$ 는 차수를 갖지 않는 함수도 있기 때문이다. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x^3\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} 2x+3x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

을 생각하면, $x=0$ 에서 2 차이지만 도함수는 차수를 갖지 않는다. 각자 정의를 이용해 확인해 보자.

7. 테일러 전개와 차수논리

추가로, 미분·적분과 차수는 테일러 전개의 관점에서도 설명이 가능하다. 테일러 전개가 가능한 함수에 대해 미분·적분을 자연스럽게 계산할 수 있음이 알려져 있다. 예를 들어 $f(x)$가 $x=0$에서 3차라면

$$f(x) \;=\; a_0+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots \quad (a_3 \neq 0)$$

본문에서 정의한 차수는 '상수항을 제외한 최저차수'이므로 차수가 3 이라는 것은 $a_1=a_2=0$, $a_3 \neq 0$을 의미한다.

라고 쓸 수 있고, 양변을 미분·적분하면 다음과 같이 차수를 확인할 수 있다.

$$f'(x) \;=\; 3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots \quad \rightarrow \quad 2\text{차}$$

$$F(x) \;=\; C+a_0x+\frac{a_3}{4}x^4+\frac{a_4}{5}x^5+\frac{a_6}{6}x^6+\cdots \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 4\text{次} & (a_0=0\text{인 경우}) \\ 1\text{차} & (a_0 \neq 0\text{인 경우}) \end{cases}$$

또한 $f(x)$가 $x=0$에서 1차이면

$$f(x) \;=\; a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \quad (a_1 \neq 0)$$

인데, 이를 미분하면

$$f'(x) \;=\; a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

이다. 이 경우 상수항을 제외한 계수인 a_2, a_3, a_4, $\cdots$ 가 0인지 아닌지에 따라 최저차항이 달라진다. 예를 들어, $a_2=1$이면 $f'(x)$는 1차이고, $a_2=0$, $a_3=1$이면 $f'(x)$는 2차이다.

이처럼 테일러 전개도 미분·적분과 차수를 추적하는 데에 좋은 관점을 제공한다. 마지막으로 테일러 전개에서 실제로 미분·적분이 어떻게 작동하는지 간단한 예시를 확인해 보고 마무리하도록 하자.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

위의 전개에서 양변을 미분해 보면 원래 알고 있던 내용과 잘 맞아떨어지는 결과를 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^x\right) &= \frac{d}{dx}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right) = 0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}+\cdots \\ &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \\ &= e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right) = 1-\frac{2x}{2}+\frac{3x^2}{3}-\frac{4x^3}{4}+\cdots \\ &= 1-x+x^2-x^3+\cdots \\ &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

첫째항이 1 이고 공비가 $-x$ 인 등비수열의 합으로 계산한 것이다. 이는 $-1<x<1$ 일 때만 성립하는데, $x=0$ 의 근방만 관찰하고 있으므로 문제가 되지 않는다. 이 급수의 합이 $\ln(x+1)$ 의 도함수인 $1/(x+1)$ 과 일치하므로 $x=0$ 의 근방에서는 미분이 잘 작동하는 것으로 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right) = 1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\frac{7x^6}{7!}+\cdots \\ &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \\ &= \cos x\end{aligned}$$