이해원

2026
합성함수 해석

[2609(미적)28]

실 전 특 강

05

「합성함수 총정리」

문제를 풀 수 없다면, 더 쉬운 문제로 바꿔라.
그리고 그걸 풀어라.

— 조지 폴리아(1887-1985), 헝가리·미국 수학자

Lecture

실전특강 ❺ 합성함수 총정리

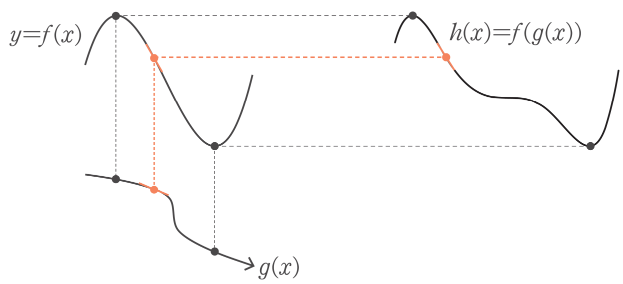
#260630 #190621 #170930

0. INTRO

합성함수 $h(x)=f(g(x))$ 를 바라보는 시선의 핵심은 다음과 같다.

"f의 점을 매개로, g의 점과 h의 점이 대응된다."

다음 그림과 함께 읽으면 더욱 와닿을 것이다.



특강 ❶-❹편에 나온 관점과 위 그림을 총체적으로 이해하면

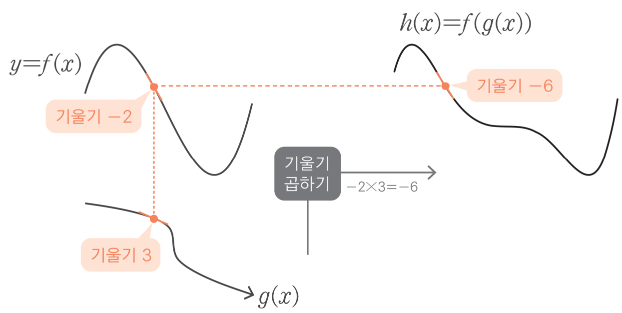
합성함수의 증가와 감소,
극대와 극소,
아래로 볼록과 위로 볼록,
연속성과 미분가능성,
이계도함수

를 빠르고 직관적으로 암산할 수 있다. 이번 특강 ❺ 합성함수 총정리에서는 지금까지 배운 것을 모두 복습함과 동시에, 합성함수의 모든 것에 대하여 다룬다. 확실하게 익혀둘 수 있도록 하자.

참고

서술의 편의를 위해 합성함수가 잘 정의되는 경우에 한해 논하였다. 즉, 속함수의 치역이 겉함수의 정의역에 포함되지 않는 등의 케이스는 논의에서 제외하였다.

1. 합성함수의 증가와 감소



위 그림에서도 확인할 수 있듯

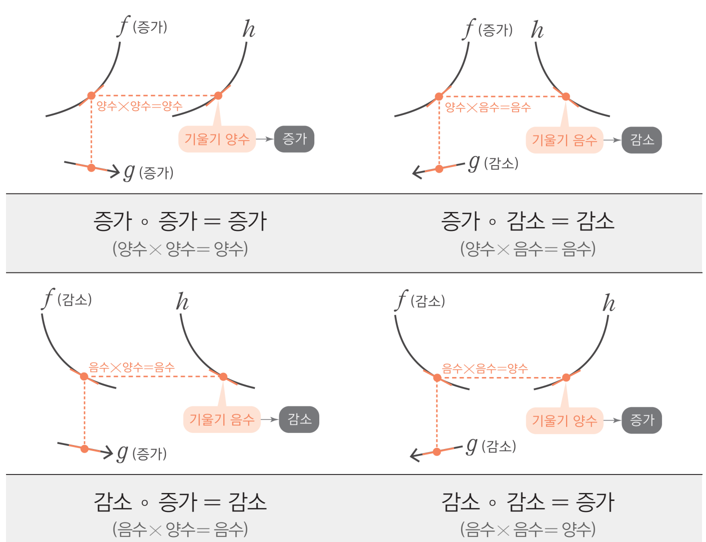
$$h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$$

$$\Updownarrow$$

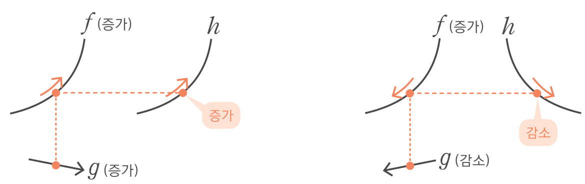
(합성함수 h 의 기울기) $=$ (겉함수 f 의 기울기)$\times$(속함수 g 의 기울기)

이다. 이러한 '기울기 곱'을 이용하면 합성함수의 증가와 감소를 판단할 수 있다.

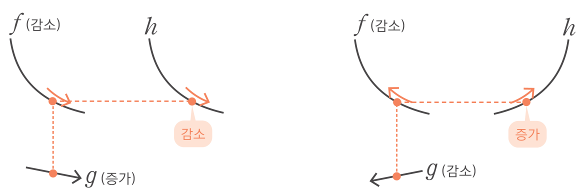
기울기 관점에서 보면 (증가)=(양수), (감소)=(음수)이므로 각 점에서의 기울기를 암산하여 합성함수의 증감을 판단할 수 있을 것이다. 그림을 통해 이해하자.



물론 다음과 같이 f와 g의 움직임을 고려하여 합성함수 h의 증감을 파악할 수도 있다.



증가 ∘ 증가 = 증가	증가 ∘ 감소 = 감소



감소 ∘ 증가 = 감소	감소 ∘ 감소 = 증가

조금 더 어려워도 위 그림과 같이 f를 따라 움직이는 점을 매개로 g를 고려하여 h의 증감을 파악하는 연습을 해두도록 하자. 더 본질적인 이해에 도움이 될 것이다.

실전 개념

합성함수의 증가와 감소

교과서 개념　　실전 개념

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 증감에 따른 합성함수 $h(x)=f(g(x))$의 증감은 다음과 같다.

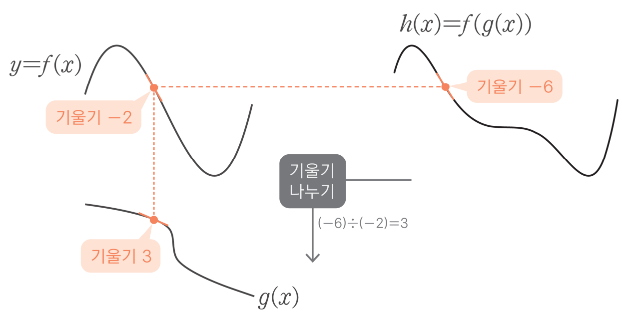
증가 ∘ 증가 = 증가,　　증가 ∘ 감소 = 감소
감소 ∘ 증가 = 감소,　　감소 ∘ 감소 = 증가

'기울기 곱'와 '움직임', 두 관점으로 합성함수의 증감을 해석할 수 있어야 한다.

또한 거꾸로,

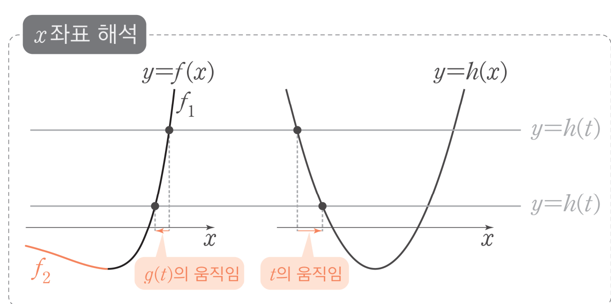
$$(h\text{의 기울기}) = (f\text{의 기울기})\times(g\text{의 기울기})$$
$$\rightarrow \quad (g\text{의 기울기}) = (h\text{의 기울기})\div(f\text{의 기울기})$$

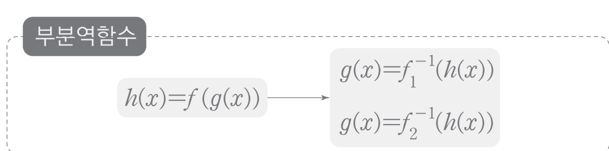
으로 생각할 수 있다. 즉, 다음 그림과 같이 '기울기 나누기'를 통해 속함수 g를 얻을 수도 있다.



이처럼 문제에 겉함수 f와 속함수 g가 주어진 경우에는 '기울기 곱하기'를 통해 합성함수 h를 구하고, 겉함수 f와 합성함수 h가 주어진 경우에는 '기울기 나누기'를 통해 속함수 g를 구할 생각을 하면 된다.

특강 ❸편에서 배운 「x좌표 해석」을 이용하여 속함수 g의 움직임을 x축에 나타내어도 좋고, 특강 ❹편에서 배운 「부분역함수」를 활용하여 속함수 g의 식을 직접 써내도 된다.

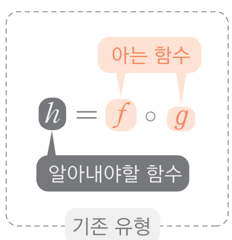


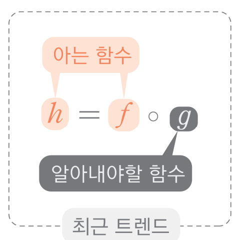


문제마다 조건과 상황이 다르므로 모든 방법을 숙달시켜두고 적절히 활용하는 것이 중요하다. 모의평가나 수능에 출제된 합성함수 미분법 문항의 조건들을 간단히 정리해보면 다음과 같다.

출처	항등식	주어진 정보
2609(미적)28	$f(x)=g(x)-\tan g(x)$	겉함수와 합성함수
2606(미적)28	$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$	겉함수와 합성함수
25수능(미적)27	$g(x)=f\left(e^x\right)+e^x$	겉함수와 속함수
2406(미적)28	$\left\{f(x)\right\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$	겉함수와 합성함수
23수능(미적)30	$g(x)=e^{\sin\pi x}-1$, $h(x)=g(f(x))$	겉함수와 속함수
2209(미적)29	$g(x)=\left\{f(x)+2\right\}e^{f(x)}$	겉함수와 속함수
21수능(가)30	$g(x)=f\left(\sin^2\pi x\right)$	겉함수와 속함수
19수능(가)30	$g(x)=\dfrac{1}{2+\sin\left(f(x)\right)}$	겉함수와 속함수

표와 같이 겉함수와 속함수를 주고 합성함수를 묻는 문항은 비교적 옛날 유형이고, 최근 트렌드는 겉함수와 합성함수에 대한 정보를 주고 속함수에 대하여 묻는 문항이 많아졌음을 확인할 수 있다.





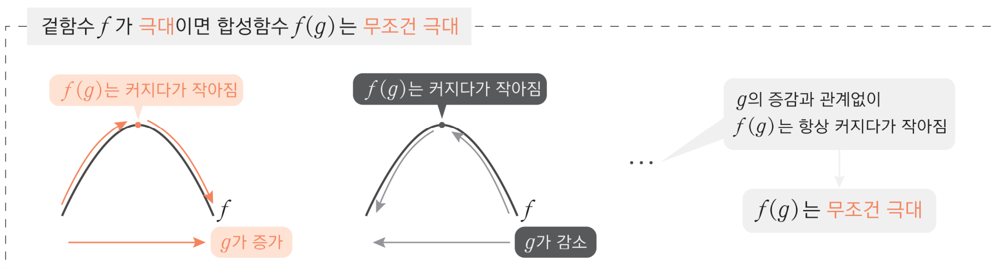
트렌드는 트렌드일 뿐, 올해 수능에 최근 트렌드의 문항이 무조건 출제될지는 모르므로 경중을 나누지 말고 학습할 수 있도록 하자.

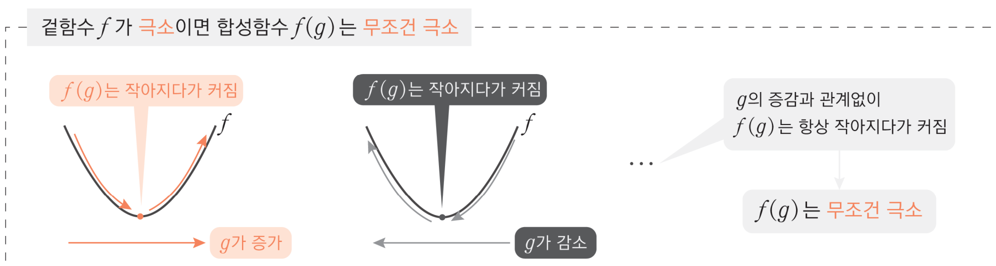
2. 합성함수의 극대와 극소

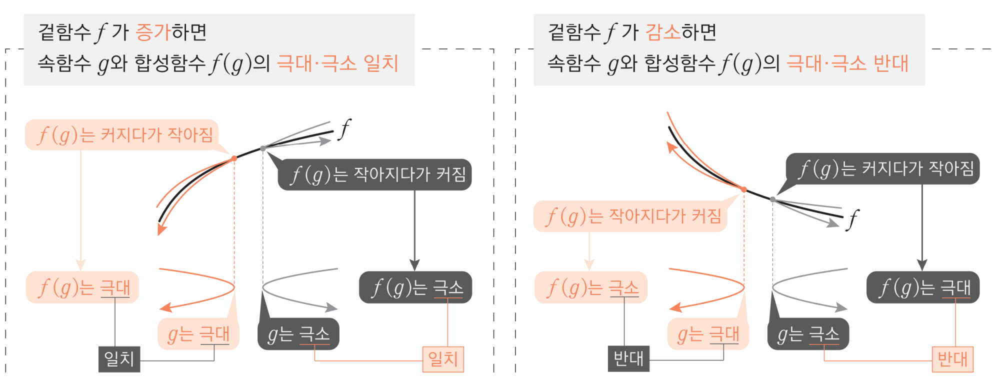
합성함수 $h(x)=f(g(x))$ 의 극대와 극소는 다음 상황에서만 나타난다.

겉함수 f가 극대이면 무조건 극대, 극소이면 무조건 극소
속함수 g가 극대·극소일 때, 겉함수 f가 증가하면 그대로, 감소하면 반대

이외의 상황에서는 극대와 극소가 나타나지 않는다. 그림을 보며 이해해 보자.







역시 f의 점을 매개로 g의 점과 h의 점을 대응시켜가며 생각할 수 있어야 한다.

실전 개념 **합성함수의 극대와 극소** 교과서 개념 실전 개념

합성함수 $h(x)=f(g(x))$ 의 극대와 극소는 다음 상황에서만 나타난다.

겉함수 f가 극대이면 무조건 극대, 극소이면 무조건 극소
속함수 g가 극대·극소일 때, 겉함수 f가 증가하면 그대로, 감소하면 반대

역시 거꾸로, 합성함수 h부터 시작해서 조건을 해석하는 경우를 다음과 같이 생각해볼 수 있다. 합성함수 h가 극대인 경우만 따져보면 다음과 같다.

합성함수 h가 극대이면 다음 세 상황 중 하나이다.

Ⓐ 겉함수 f가 극대

Ⓑ 겉함수 f가 증가하고 속함수 g가 극대

Ⓒ 겉함수 f가 감소하고 속함수 g가 극소

이는 위의 [실전개념]-합성함수의 극대와 극소를 거꾸로 적용한 것에 불과한데, 합성함수의 극대·극소를 다루는 최신 기출문항인 [2606(미적)30]도 이러한 상황으로 출제한 것을 확인할 수 있다.

KEY01 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.6·미적 30번 |

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.

(나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

실전적 해법

함수 $g(x)$를 **$|f(x)|$가 겉함수이고 $\frac{2}{1+e^{-x}}$가 속함수인 합성함수**로 생각하면 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소를 가짐을 다음 세 상황 중 하나로 해석할 수 있다.

Ⓐ 겉함수 $|f(x)|$가 극소

Ⓑ 겉함수 $|f(x)|$가 증가하고 속함수 $\frac{2}{1+e^{-x}}$가 극소

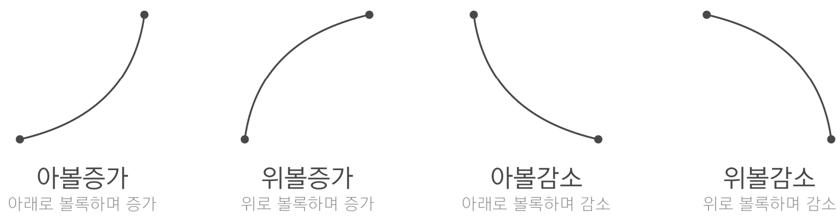
Ⓒ 겉함수 $|f(x)|$가 감소하고 속함수 $\frac{2}{1+e^{-x}}$가 극대

이때 속함수 $\frac{2}{1+e^{-x}}$는 증가함수이므로 극값을 가지지 않는다. 즉, Ⓑ와 Ⓒ는 불가능하고 Ⓐ만이 가능함을 알 수 있다. 따라서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극소라는 것은

함수 $|f(x)|$가 $x=\frac{2}{1+e^{-0}}=1$에서 극소

임을 의미한다. (후략)

3. 합성함수의 아래로 볼록과 위로 볼록

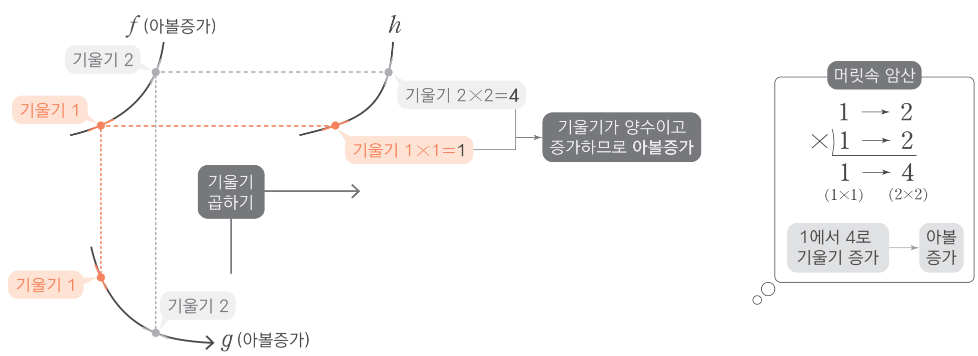


'기울기 곱하기'를 이용하면 아래로 볼록한지 위로 볼록한지도 빠르게 파악할 수 있다. 그래프 개형의 종류는 위 그림과 같이 4가지로 나눌 수 있는데, 그림과 같이 편의상 각각을

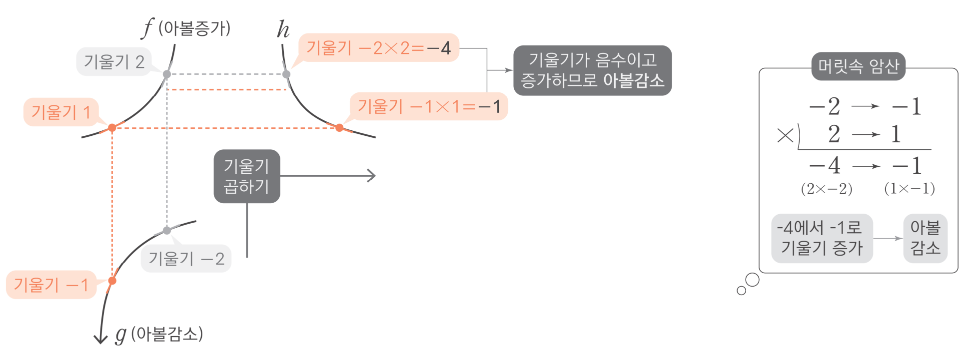
아볼증가, 위볼증가, 아볼감소, 위볼감소

라 하고 어떻게 파악할 수 있는지 생각해 보자.

두 함수 f와 g가 둘 다 아볼증가인 경우에 합성함수 $h=f\circ g$는 무엇일까? 복잡하게 생각하지 말고 간단한 예시를 들어 판단하면 된다. 오른쪽 말풍선과 같이 머릿속으로 충분히 암산할 수 있을 것이다.

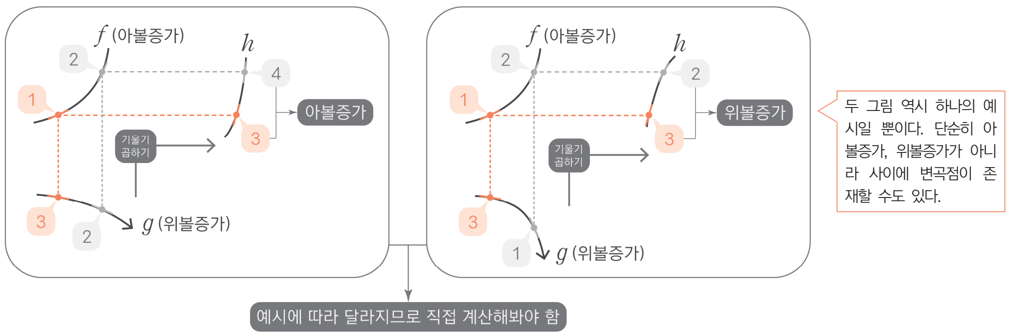


위와 같이 f와 g의 기울기가 둘 다 1에서 2로 변한다고 생각하면 '기울기 곱하기'에 의하여 합성함수 h의 기울기는 1에서 4로 변할 것이므로 $h=f\circ g$도 아볼증가임을 알 수 있다.



비슷하게 f가 아볼증가이고 g는 아볼감소인 경우에도 간단한 예시를 들어 판단할 수 있으면 된다. 이 경우 아래와 같이 합성함수 $h=f\circ g$는 아볼감소이다.

그러나 이러한 ‘예시 들기’로 판단이 불가능한 경우도 있다. f가 아볼증가이고 g가 위볼증가인 경우, 아래와 같이 예시에 따라 결과가 달라짐을 알 수 있다. 즉, 이 경우는 일반적으로 나오는 결과가 없고, 실제로 계산해봐야 알 수 있는 것이다.



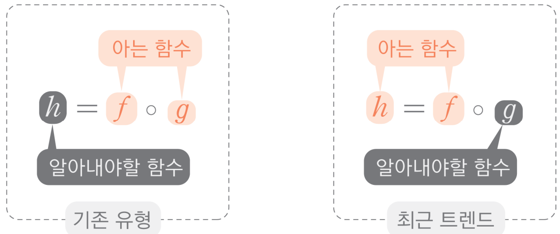
위와 같은 방법으로 합성함수 $h = f \circ g$의 그래프 개형의 모든 경우의 수를 일반적으로 정리해 보면 다음과 같다.

f \ g	아볼증가	위볼증가	아볼감소	위볼감소
아볼증가		계산		계산
위볼증가	계산		계산	
아볼감소	계산		계산	
위볼감소		계산		계산

총 16가지의 경우에서 8가지는 일반적으로 알 수 있고, 나머지 8가지는 실제로 미분하여 계산해야 알 수 있다. 당연히 위 표를 외울 필요는 전혀 없고, 이러한 상황을 만날 때마다

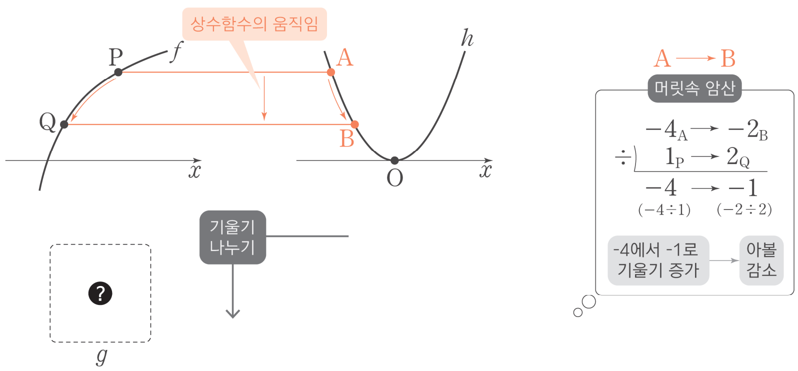
‘예시 들기’로 암산하여 판단

할 수 있으면 된다.

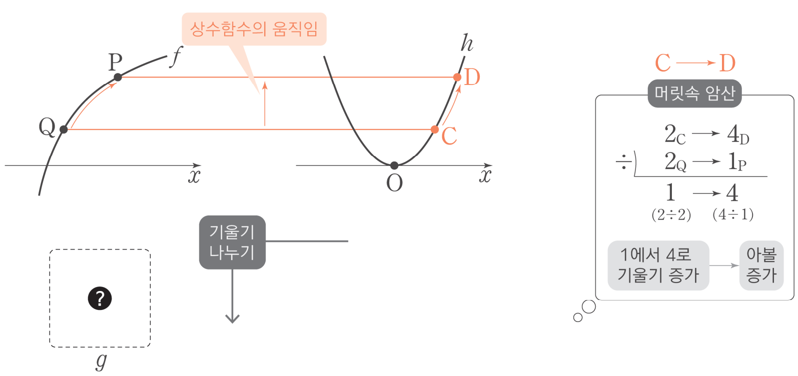


아볼·위볼 합성 역시 위의 최근 트렌드로 출제되어도 두 함수 f, h의 '기울기 나누기'를 활용하면 16가지의 경우에서 8가지를 볼록성을 암산할 수 있다.

f가 위볼증가, h가 아볼감소일 때 $h=f \circ g$인 g의 볼록성과 증감을 **간단한 숫자를 예시로 들어** 암산으로 판단해 보자.



위의 머릿속 암산처럼 h 위의 점 A에서 점 B까지 기울기가 적당히 -4에서 -2로 변한다고 가정하여 계산하면 된다. 기울기가 잘 나누어떨어지도록 f 위의 점 P와 점 Q의 기울기는 각각 1과 2라고 가정하자. '기울기 나누기'를 활용하면 g는 -4에서 -1까지 기울기가 점점 커지므로 아볼감소임을 쉽게 알 수 있다. 이처럼 f가 위볼증가이고 h가 아볼감소이면 그 구간에서 g는 아볼감소가 된다는 것을 미분하지 않고 기울기 암산을 통해 충분히 알아낼 수 있다.

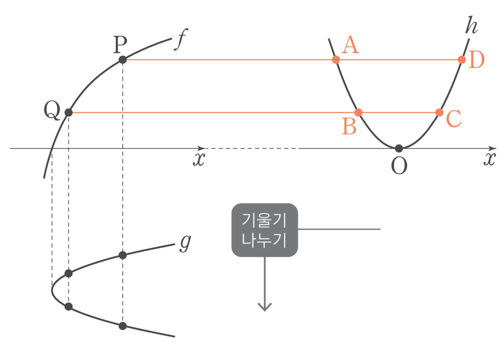


마찬가지로, f가 위볼증가, h가 아볼증가인 경우에는 위 그림과 같이 점 C에서 D까지의 기울기와 점 Q에서 P까지의 기울기를 생각하면 그 구간에서 g가 아볼증가임을 암산으로 알 수 있다.

이렇게 ‘기울기 나누기’로 합성함수 $h=f\circ g$에서 f와 g를 알 때 g의 개형의 모든 경우의 수를 일반적으로 정리해 보면 다음과 같다.

f \ h	아볼증가	위볼증가	아볼감소	위볼감소
아볼증가	계산		계산	
위볼증가	②	계산	①	계산
아볼감소	계산		계산	
위볼감소		계산		계산

앞 페이지에서 다룬 예시의 점 A에서 B까지가 위 표의 ①이고, 점 C에서 D까지가 위 표의 ②이다. 즉, 앞 페이지의 예시의 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아볼감소이다가 아볼증가임을 쉽게 알 수 있다.



역시 총 16가지의 경우에서 8가지는 일반적으로 알 수 있고, 나머지 8가지는 실제로 미분하여 계산해야 알 수 있다. 당연히 위 표를 외울 필요는 전혀 없고, 이러한 상황을 만날 때마다

‘예시 들기’로 암산하여 판단

할 수 있으면 된다.

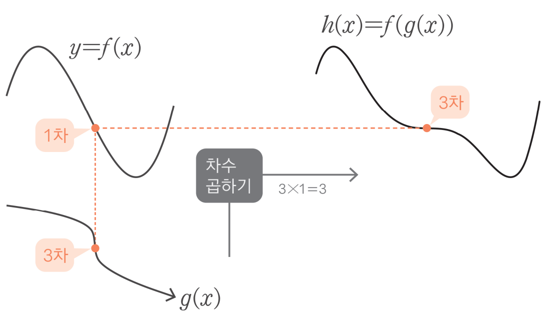
4. 좌·우차수와 미분가능성

'기울기 곱하기'를 생각할 때 $\infty \times 0$의 꼴이 나타나서 미분가능성을 확인해야 하는 경우도 있는데, 이러한 경우를 해석하기 위한 도구로 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 차수라는 개념을 도입한 것이다. 더욱 자세히 배워 보자.

합성함수 $f \circ g$의 차수는 대응되는 점에서

($f \circ g$의 차수) = (f의 차수)$\times$(g의 차수)

로 계산할 수 있었다. '기울기 곱하기'와 마찬가지로 '차수 곱하기'로 그래프에서 추적하면 된다.

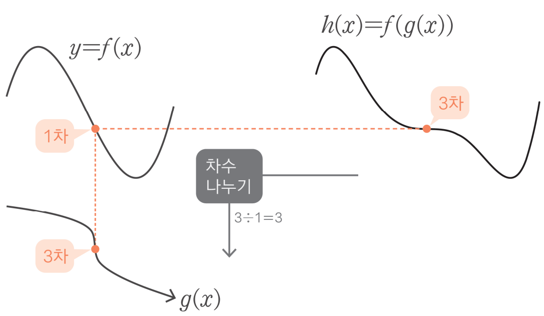


또한 $f(f^{-1}(x))=x$로부터 역함수의 차수도

(x의 차수) = (f의 차수)$\times$(f^{-1}의 차수)

$\rightarrow$ (f^{-1}의 차수) = $\dfrac{1}{(f\text{의 차수})}$

와 같이 계산할 수 있었다. 즉, 역함수의 합성은 '차수 나누기'로 생각하면 된다.



추가로 다음 내용 정도는 배경지식으로 알아두면 좋다.

- **미분가능한 점에서는 항상 1차 이상이고, 1차 이상이면 미분가능하다.**[1)]
- **우리가 [미적분]에서 다루는 대표적인 함수 e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$는 모두 곡선 위의 모든 점에서 '자연수 차수'를 갖는다.**[2)]

각주

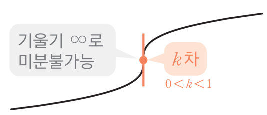
1) 미분가능하지만 차수가 존재하지 않는 경우는 논의에서 제외한다.
2) 추후 부록에서 더욱 자세히 논할 것이다.

차수의 의미를 잘 이해하고 $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x$, $y=x^3$, $\cdots$ 와 같은 함수의 그래프를 생각하면, 차수를 미분가능성을 판단하는 기준으로 삼을 수 있다.

실전 개념 **차수에 따른 미분가능성**

교과서 개념 · 실전 개념

차수가 $k\,(k>0)$인 점에서의 미분가능성은 다음과 같이 분류할 수 있다.

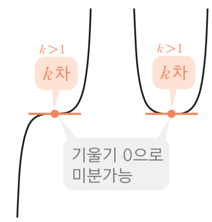


$0<k<1$ 일 때

기울기 ∞ 로 미분가능하지 않음

$k=1$ 일 때

직선으로 미분가능



$k>1$ 일 때

기울기 0 으로 미분가능

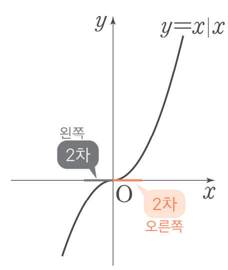
그런데 모든 함수가 양쪽근방에서 동일한 함수로 근사되는 것은 아니다. 그런 경우 **좌·우에서의 차수**를 각각 확인하면 된다.[1)]

Sample Case

❶ $f(x)=x|x|$

함수 $f(x)=x|x|$ 의 $x=0$ 에서의 차수를 찾기 위해 정의를 이용하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{(x-0)^k}=\lim_{x\to0}\frac{x|x|}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x^{k-1}}$$



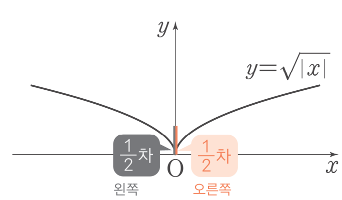
이므로, 이 극한이 0 이 아닌 실수로 수렴하도록 하는 k는 존재하지 않음을 쉽게 확인할 수 있다. 즉, 함수 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 차수는 정의되지 않는다.
그러나 **좌·우로 나누어서 보면 각각 2차인 것은 명백하다.**
따라서 좌·우미분계수가 각각 0 이므로, $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

❷ $g(x)=\sqrt{|x|}$

함수 $g(x)=\sqrt{|x|}$ 역시 $x=0$ 에서의 차수가 존재하지 않지만,

좌·우에서의 차수는 각각 $\frac{1}{2}$ 이라 할 수 있다.

좌·우에서 기울기가 $\pm\infty$ 로 미분가능하지 않다.

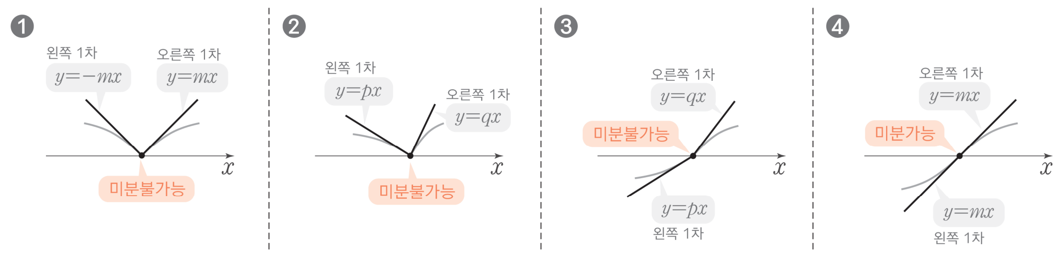


각주

1) 차수의 정의를 좌극한 $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|^k}$, 우극한 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|^k}$ 으로 나누어 보는 것이다.

앞의 Sample Case로부터 **좌·우의 차수가 1이 아닌 경우는 모두 차수만 가지고 미분가능성을 판단할 수 있음**을 알 수 있다.

문제가 되는 것은 좌·우의 차수가 모두 1인 경우이다. **차수가 1인 경우는 좌·우에서의 기울기에 의해 미분가능성이 결정되므로 직접 확인해야 한다.** 직접 계산을 통해 확인할 수도 있지만, 가능한 경우들을 그림으로 나타내 확인해 보는 것도 좋다.



이때 좌·우에서 근사되는 직선의 기울기는 당연하게도 좌·우미분계수를 의미한다. 따라서 미분가능한 (즉, 좌·우미분계수가 동일한) 함수나 그 역함수[1], 그리고 절댓값 함수의 합성[2]으로는 ❷, ❸의 경우가 나타나지 않고, 이런 경우에 한하여

극값 ⇔ 미분불가능(❶), 극값X ⇔ 미분가능(❹)

이라고 생각할 수 있다.[3] 합성함수에서 1차가 등장하면 단순히 차수만 보지 말고 **움직이는 방향**까지 확인하여 극값 여부를 확인하도록 하자.

실전 개념 **차수와 미분가능성** 교과서 개념 실전 개념

'차수 곱하기' 혹은 '차수 나누기'로 구한 연속인 어떤 함수의 $x=a$에서의 좌·우 차수가 모두 1일 때, 극값이 존재하면 $x=a$에서 미분가능하지 않고, 극값이 존재하지 않으면 $x=a$에서 미분가능하다.

① 극값이 존재하지 않을 때는 ❸처럼 미분가능하지 않을 수도 있다. 대부분의 경우 극값의 존재성으로 미분가능성을 판단하면 된다.

좌·우 차수가 1일 때, 극값의 존재성으로 간단하게 미분가능성을 판단하면 된다는 것이 핵심이다.

각주

1) x^3의 역함수 $\sqrt[3]{x}$ 등을 생각하면 된다.

2) 절댓값은 좌우미분계수의 부호만을 바꾸기 때문에 가능한 논의이다. 따라서 $\sqrt{|x|}=(\sqrt{x})\circ(|x|)$와 같이 순수하게 절댓값이 합성된 경우만을 허용하고, $x+|x|$와 같이 '식에 절댓값이 포함되는' 경우는 허용하지 않는다.

3) 정확한 조건은 '극한값 $\lim_{x\to a}\dfrac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|^k}$가 0이 아닌 실수로 존재하도록 하는 k가 존재하는 함수들의 합성함수'이다.

KEY03 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2019.6·가 21번(변형) |

<보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. 함수 $y=\sqrt{\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|}$ 은 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 미분가능하다.

ㄴ. 함수 $y=\sqrt{|\sin^3 x|}$ 은 $x=0$ 에서 미분가능하다.

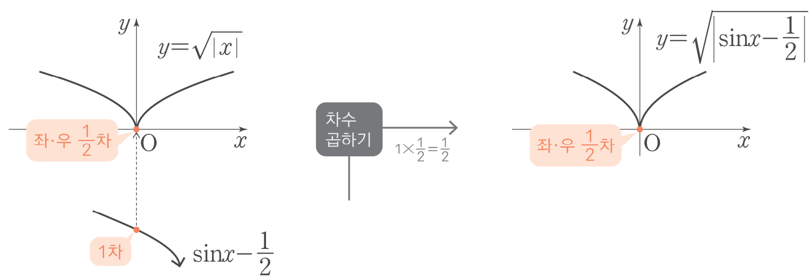
ㄷ. 함수 $y=\sqrt[3]{\sin(x^3)}$ 은 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄹ. 함수 $y=\sqrt{|\cos x+1|}$ 은 $x=\pi$ 에서 미분가능하다.

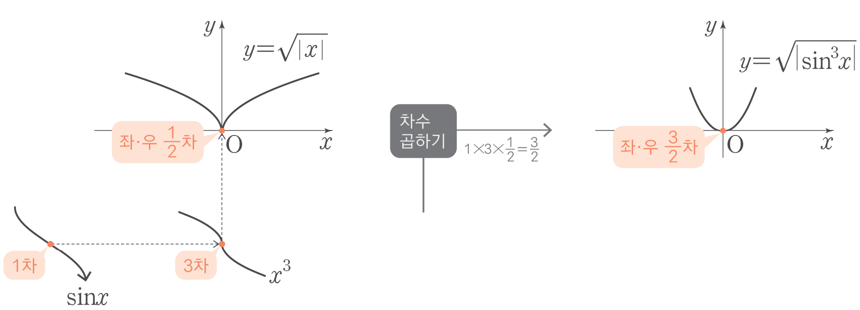
ㄱ. $y=\sqrt{|x|}$ 는 $x=0$ 에서 차수가 정의되지 않지만 좌·우에서 각각 $\frac{1}{2}$ 차이다.

합성함수를 $(\sqrt{x})\circ\left(\sin x-\frac{\pi}{6}\right)$ 와 같이 나타내는 것은 잘못된 표기이지만, 오해의 소지가 없는 경우에는 편의상 이렇게 나타낼 것이다.

$(\sqrt{|x|})\circ\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)$ 의 좌·우차수는 각각 $\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$ 이므로 미분가능하지 않다. (거짓)



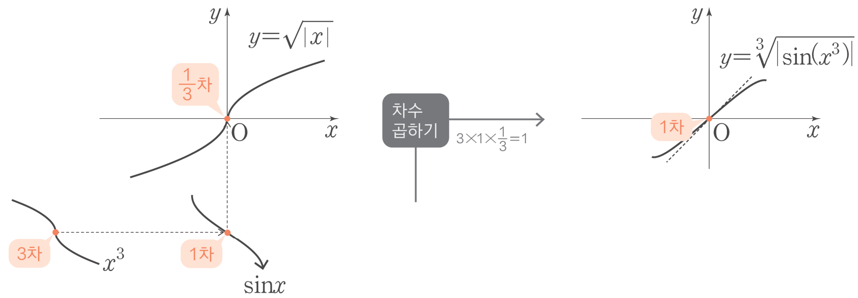
ㄴ. $(\sqrt{|x|})\circ(x^3)\circ(\sin x)$ 의 좌·우차수는 각각 $\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$ 이므로 미분가능하다. (참)



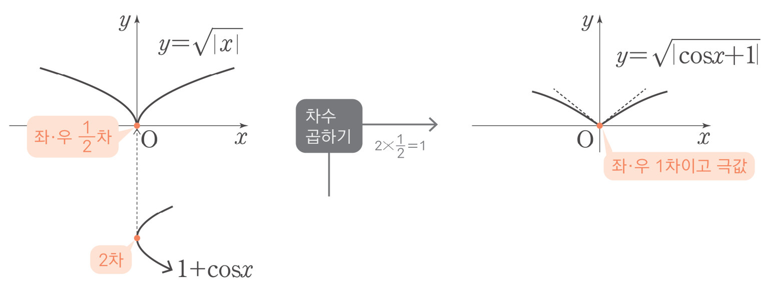
ㄷ. $\sqrt[3]{x}$ 는 좌·우를 나눌 필요 없이 **그냥 $\frac{1}{3}$ 차**이다.

따라서 $(\sqrt[3]{x})\circ(\sin x)\circ(x^3)$ 의 차수는 $\frac{1}{3}\times1\times3=1$ 이다.

즉, $x=0$ 에서 **1차인데 극값이 아니므로** 미분가능하다. (참)



ㄹ. $(\sqrt{|x|})\circ(\cos x+1)$ 의 좌·우차수는 각각 $\frac{1}{2}\times2=1$ 이다. 좌·우 각각 1차인 경우는 차수만으로 미분가능성을 판단할 수는 없고, 그래프의 움직임을 생각해 봐야 한다.



그림에서 $\sqrt{|\cos x+1|}$ 은 $x=0$ 에서 **1차인데 극값**이므로 미분가능하지 않다. (거짓)

풀이에서는 시각적인 이해를 위해 모든 경우의 그래프를 간략하게 그려두었지만, 실제로 그래프 관찰이 필요한 것은 ㄹ뿐이다. 나머지는 모두 차수를 계산한 시점에 미분가능성을 판단할 수 있다.

같은 논리를 역함수에 대해서도 적용해 보자.

KEY04 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

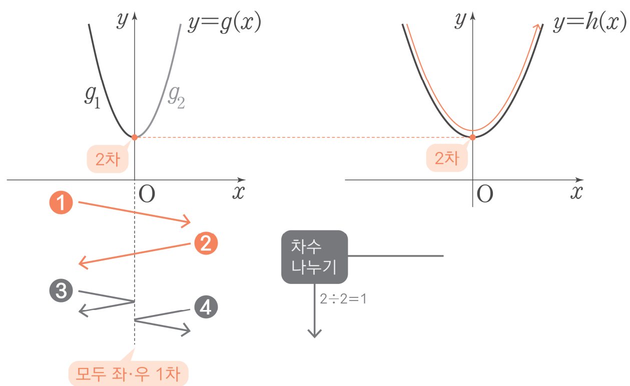
$$e^{f(x)}+e^{-f(x)}=x^2+2$$

를 만족시킬 때, 다음을 보이시오.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 의 치역은 실수 전체의 집합이다.

$g'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이자 최소이고, $g(0)=e^0+e^0=2$ 이다.

이제 두 함수 $g(x)=e^x+e^{-x}$, $h(x)=x^2+2$ 의 그래프를 그려두고 x 좌표 해석으로 접근하자. $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 최솟값이 2 로 동일하고 $y=h(x)$ 위의 점의 y 좌표는 $\infty \to 2 \to \infty$ 로 움직이므로, 이 움직임을 따라 $f(x)$ 의 움직임을 추적하면 다음 네 가지가 가능하다.



1: $g_1 \to g_2$ 2: $g_2 \to g_1$ 3: $g_1 \to g_1$ 4 $g_2 \to g_2$

극솟값을 갖는 점 외의 다른 모든 점에서는 $1\div1=1$ 차인데 극값을 갖지 않으므로 미분가능함을 쉽게 판단할 수 있다. 이제 극솟값을 갖는 점만 주의 깊게 살피면 된다.

극솟값을 갖는 점에서 $g(x)$, $h(x)$ 가 각각 2 차이므로[1], $f(x)$ 는 좌·우에서 각각 $2\div2=1$ 차이다. 따라서 미분가능성을 알기 위해서는 극값 여부만 확인하면 된다. $f(\alpha)=0$ 이 되는 α 를 생각하면 12는 $x=\alpha$ 에서 극값을 갖지 않으므로 미분가능하고, 34는 $x=\alpha$ 에서 극값이므로 미분가능하지 않다.

즉, 미분가능하면 가능한 $f(x)$ 는 1 또는 2인데, 두 경우 모두 $f(x)$ 의 치역은 실수 전체의 집합이다.

각주

1) $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}(e^x-1)^2}{x^2}=1$ 이므로 정의에 의해 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 2 차이다.

마지막으로 미분불가능한 함수의 합성도 확인해 보자. 앞서 '미분가능한 함수들끼리의 합성으로는 ❷(↘), ❸(↗)이 나타나지 않는다'고 했지만, 수능에는 미분불가능한 함수와의 합성이 출제된 적도 있다.

KEY05 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2017.9·가 30번 |

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

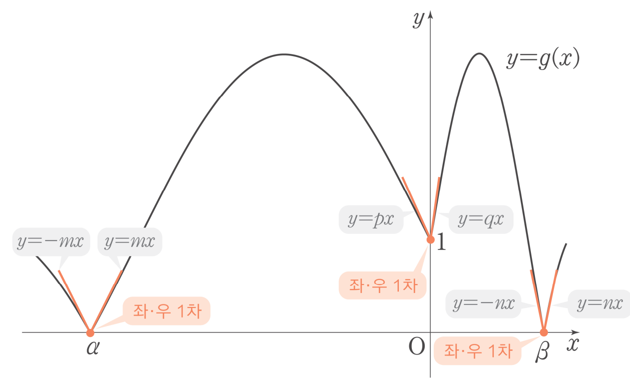
$$g(x)=\left|2\sin\left(x+2|x|\right)+1\right|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

| 한완기 평수능 미적분 K·49 |

함수 $y=g(x)$의 그래프를 대략적으로 그리면 다음과 같다.

α, β, m, n, p, q는 모두 쉽게 구할 수 있는 값들이지만 그 값들이 풀이에 영향을 주지 않기 때문에 적당한 문자로 나타내었다.

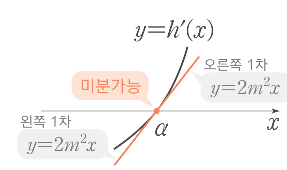


α, 0, β를 제외한 점에서는 당연히 $h''(x)$가 존재한다. 문제가 되는 세 점을 근사와 차수의 관점에서 관찰하자.

먼저 $x=\alpha$인 경우, 좌·우에서 각각 $-mx$, mx로 근사하여 생각할 수 있다. $g(\alpha)=0$이고 이를 $f(x)$에 합성한 $h(x)=f(g(x))$가 미분가능해야 하므로, $f(x)$가 $x=0$에서 2차 이상이다. 2차라고 가정하고 $x=\alpha$에서의 좌·우를 근사를 이용해 나타내면 다음과 같다.

정확하게는 $\pm m(x-\alpha)$로 나타내야 하지만, 편의상 $(\alpha, 0)$이 원점이 되도록 평행이동하여 관찰할 것이다.

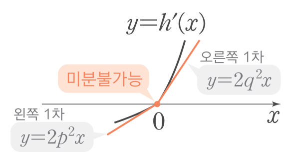
x	$x=\alpha-$	$x=\alpha+$
$h(x)=f(g(x))$	$(-mx)^2$	$(mx)^2$
$h'(x)$	$2m^2x$	$2m^2x$



즉, 도함수 $h'(x)$는 $x=\alpha$의 좌우에서 **동일한 일차함수로 근사**된다. 즉, $h'(x)$가 미분가능하므로 이계도함수의 값 $h''(\alpha)$가 존재한다. $x=\beta$에서도 완전히 동일한 관찰을 통해 $h''(\beta)$의 존재성을 확인할 수 있다.

다음으로 $x=0$인 경우를 보자. $x=0$의 좌·우에서 각각 px, qx $(|p| \neq |q|)$로 근사하여 생각할 수 있다. $g(0)=1$이므로 역시 $f(x)$가 $x=1$에서 2차 이상인데, $x=\alpha$일 때처럼 2차로 가정하면 다음과 같다.

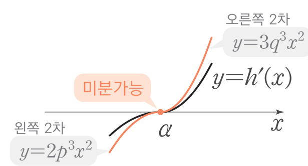
x	$x=0-$	$x=0+$
$h(x)=f(g(x))$	$(px)^2$	$(qx)^2$
$h'(x)$	$2p^2x$	$2q^2x$



이때 $|p| \neq |q|$이므로 도함수 $h'(x)$이 $x=0$의 좌우에서 **서로 다른 일차함수로 근사되고, 따라서 미분가능하지 않다.** 즉, $x=0$에서 이계도함수의 값이 존재하지 않는다.

또한 이 관찰로부터, 조건을 만족시키려면 차수가 더 높아야 할 것으로 예상할 수 있다. 이어서 $f(x)$가 $x=1$에서 3차인 경우를 확인해 보자.

x	$x=0-$	$x=0+$
$h(x)=f(g(x))$	$(px)^3$	$(qx)^3$
$h'(x)$	$3p^3x^2$	$3q^3x^2$



이 경우 도함수가 양쪽에서 각각 2차로 근사되므로, **앞에 붙어 있는 계수의 값과 관계없이 미분가능**하다. 즉, $x=0$에서 이계도함수의 값 $h''(0)$이 존재한다.

여기까지의 결과를 정리하면 $f(x)$는 $x=0$에서 2차, $x=1$에서 3차이다. 따라서 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 1차, $x=1$에서 2차이고, $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로 바로 $f'(x)$의 식을 쓸 수 있다.

$$\therefore \ f'(x)=4x(x-1)^2 \quad \rightarrow \quad f'(3)=48$$

5. ‘기울기 나누기’의 일반화

$\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k} = p$ 를 만족하는 0이 아닌 실수 p가 존재하면 $f(x)$ 의 $x=a$에서의 우차수는 k이다. 이때 $|p|$를 우계수라 약속하자. 좌계수도 유사한 방법으로 정의한다.[1)]

— Sample Case

❶ $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\cos x$ 의 $x=0$ 에서의 우계수는 $\dfrac{1}{2}$

❷ $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2} = 2$ $\rightarrow$ e^{2x^2} 의 $x=0$ 에서의 우계수는 2

이때 $k=1$이면 우계수는 우미분계수에 해당하므로, 우미분계수를 차수에 대응하여 확장한 것이 우계수라고 이해하면 된다. 따라서 미분계수의 성질도 계수[2)]의 성질로 확장할 수 있다.

합성함수 $h(x)=f(g(x))$ 에서 속함수의 미분계수(기울기)를 찾을 때

$$\text{기울기 나누기: } (g \text{ 기울기}) = \frac{h \text{ 기울기}}{f \text{ 기울기}}$$

로 계산할 수 있었듯이, 속함수의 계수는 다음과 같이 찾을 수 있다.

$$\text{계수 나누기: } (g \text{ 계수})^{f \text{ 차수}} = \frac{h \text{ 계수}}{f \text{ 계수}}$$

‘기울기’가 ‘계수’로 바뀌고, 속함수의 계수에 ‘겉차수제곱’이 추가된 것이다.[3)]

속계수$^{\text{겉차수}}$ = 계수 나누기

라고 기억하면 된다. 결국 ‘기울기 나누기’라는 공식은 ‘우계수 나누기’의 특수한 경우인 것이다. ‘우계수 나누기’에서 모든 대응점에서의 차수가 1인 공식이 ‘기울기 나누기’이다. 우선은 암기하고 문제에 적용하는 연습을 해 보자.

각주

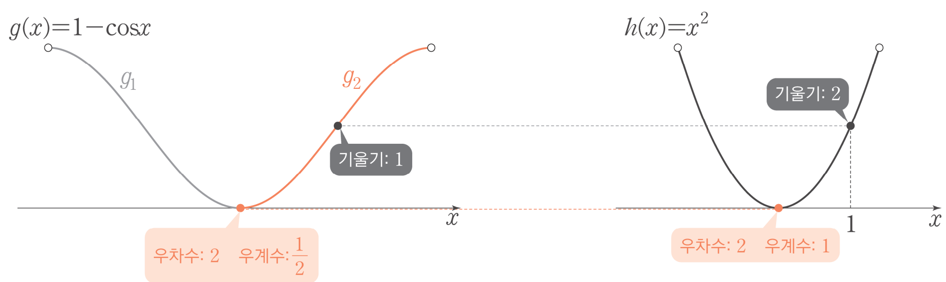
1) 정의의 극한식을 $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)-f(a)}{(a-x)^k}$ 로 바꾸면 된다. k가 정수가 아닐 때 거듭제곱의 밑이 음수가 되는 경우를 피하기 위해 좌·우를 따로 정의하는 것일 뿐 큰 차이는 없다.
2) 앞으로는 편의상 좌·우계수를 구별하지 않고 ‘계수’라고 할 것이다. 문맥에 맞는 좌·우계수 중 하나만을 언급하는 것이라고 이해하면 된다.
3) 당연히 ‘계수 곱하기’로 이해할 수도 있다. ‘기울기 곱하기’에서 기울기를 계수로 바꾸고 속계수에 ‘겉차수제곱’만 해주면 된다.
기울기 곱하기: $(h \text{ 기울기}) = (f \text{ 기울기}) \times (g \text{ 기울기})$ $\rightarrow$ 계수 곱하기: $(h \text{ 계수}) = (f \text{ 계수}) \times (g \text{ 계수})^{f \text{ 차수}}$

KEY06 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$1-\cos f(x)=x^2$$

이고, $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다. $f'(1)\times\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=k$일 때, k^2 의 값을 구하시오.



$g(x)=1-\cos x$, $h(x)=x^2$이라 하고 x좌표 해석을 통해 접근하자. 위 그림으로부터 함수 $f(x)$가 연속이고 $x=0$에서 극솟값을 가지려면 $f(x)$의 값은 모두 g_2를 따라 결정되어야 함을 알 수 있다.

$f'(1)$은 기울기 나누기를 통해 구하면 된다. 1 대응되는 점을 찾아 $g(x)$, $h(x)$의 접선의 기울기를 찾으면 각각 1, 2이므로 $f'(1)=\frac{2}{1}=2$이다.

다음으로 $f(x)$의 $x=0$에서의 우계수 a를 구하자. 대응되는 두 점에서의 '우계수를 나누면' 된다.

속계수$^{\text{겉차수}}$ = **계수 나누기** → $a^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}=2$ → $a=\sqrt{2}$ 2

또한 $x=0$에서 함수 $f(x)$의 우차수는 1이므로, 우계수 a의 값은 우미분계수의 절댓값과 같다. 즉, $\left|\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\sqrt{2}$이다. 그런데 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 우미분계수는 양수이다. 3

$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt{2} \quad\to\quad k^2=(2\sqrt{2})^2=8$$

[KEY 06] Point

1 합성함수에서 '기울기 나누기'로 속함수의 미분계수를 쉽게 구할 수 있다.

2 '기울기 나누기'와 같이 '계수 나누기'로 속함수의 계수를 구할 수 있다.
이때 '겉차수제곱'을 잊으면 안 된다. '계수 나누기'로 구한 값은 **속계수**$^{\text{겉차수}}$이다.

3 계수를 $|p|$의 값으로 정의했기 때문에 계수 연산을 통해 구한 값은 $|p|$이다.
실제 문제에서는 p의 값을 묻는 경우가 많으므로 그래프의 개형을 통해 부호를 판단하면 된다.

KEY07 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

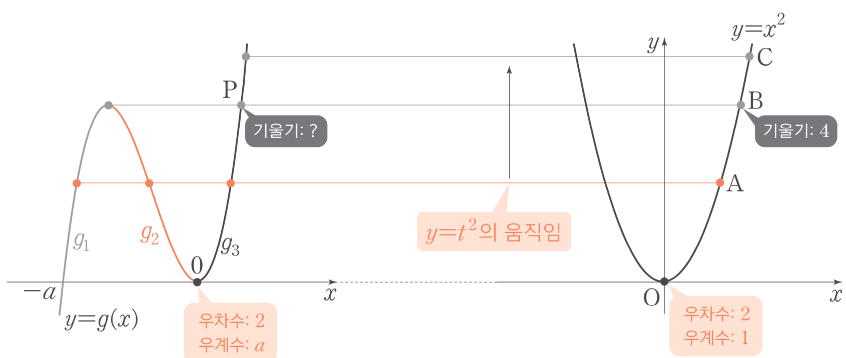
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^3+a\{f(x)\}^2=x^2$이다. ($a$는 양의 상수)

(나) $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'(2)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$g(x)=x^3+ax^2$라 하면 $g(f(x))=x^2$의 꼴이다. 즉, $g(x)=x^3+ax^2$과 $y=t^2$의 그래프를 좌·우에 나란히 그린 후 상수함수의 움직임을 생각하자.



위의 그림처럼 상수함수 $y=t^2$의 움직임을 살펴보면 $t\to\pm\infty$일 때 모두 $g(f(t))\to\infty$이어야 하므로 $f(x)$는 g_3를 따라서만 정의되어야 함을 알 수 있다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$g(x)$는 $x=0$에서 우차수 2, 우계수 $\lim_{x\to 0+}\frac{x^3+ax^2}{x^2}=a$이고, x^2은 $x=0$에서 우차수 2, 우계수 1이다.

또한 (나)조건에 의하여 f의 우계수는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 따라서

속계수[결차수] = 계수 나누기 $\rightarrow$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{a}$ $\rightarrow$ $a=3$

이다. 이제 기울기 나누기를 활용하여 $f'(2)$의 값을 구하자. $y=x^2$의 $x=2$인 점 B에서의 접선의 기울기는 4이고, $y=g(x)$ 위의 대응점을 찾으면 $\mathrm{P}(1,4)$이므로 $y=g(x)$의 접선의 기울기는 $g'(1)=9$이다.

$\therefore\ f'(2)=4\div 9=\frac{4}{9}$ $\rightarrow$ $p+q=9+4=13$

KEY08 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

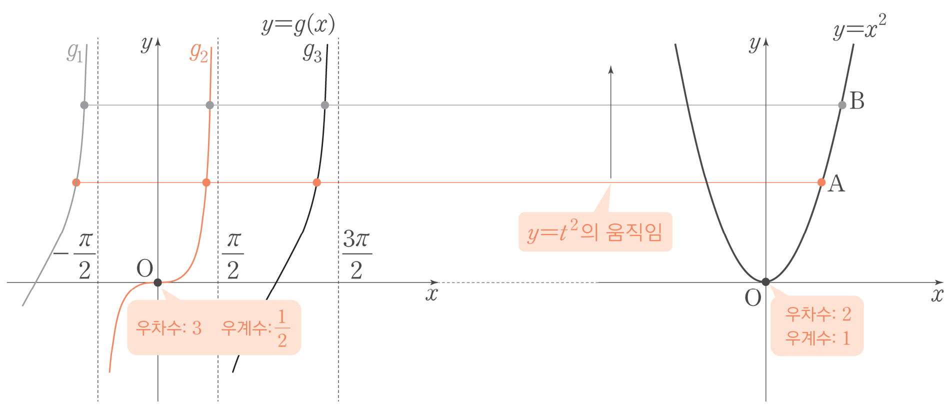
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $\tan f(x) - \sin f(x) = x^2$ 이다.

(나) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x^k} = p\ (p \neq 0)$일 때, $6(k+p^3)$ 의 값을 구하시오.

$g(x) = \tan x - \sin x$ 라 하고 그래프를 그리자.



$f(x)$ 가 연속이면서 (나)조건의 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ 를 만족시키려면 그림의 g_2 에 의해 $f(x)$ 가 결정되어야 함을 알 수 있다. 한편

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x^3} = \lim_{x \to 0+} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \frac{1}{2} \rightarrow x=0 \text{에서 우차수 } 3\text{, 우계수 } \frac{1}{2}$$

이고 $h(x) = x^2$ 는 $x=0$ 에서 우차수 2, 우계수 1 이므로, 따라서 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 우차수, 우계수는 각각 '나누기'를 통해 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다. 즉, $k = \frac{2}{3}$ 일 때 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x^k} = p\ \ (p \neq 0), \qquad \textbf{속계수}^{\textbf{겉차수}} = \textbf{계수 나누기} \rightarrow |p|^3 = \frac{1}{2}$$

이때 $f(x)$ 가 $x=0$ 의 우측에서 증가한다는 사실을 고려하면 $p > 0$ 이므로 $p^3 = \frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore\ 6(k+p^3) = 6\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = 7$$

저자's LECTURE

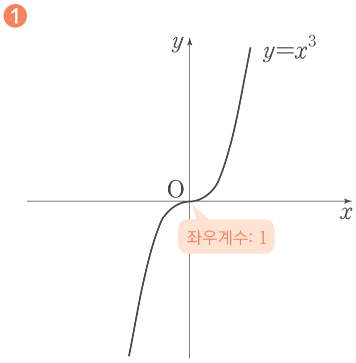
계수 나누기와 부호

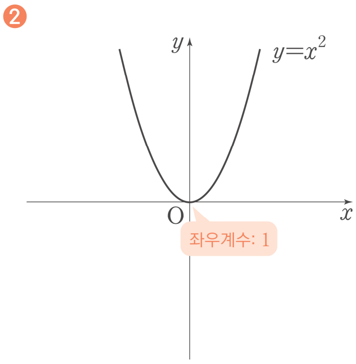
$f(g(x))=h(x)$ 의 꼴에서 두 함수 f, h 의 '기울기 나누기'를 활용해 g 의 기울기를 대부분 구할 수 있었습니다. 그러나 기울기를 나누다보면 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 의 꼴처럼 나누기로 쉽게 구할 수 없는 경우가 나타납니다. 이런 경우의 관찰을 정량화하기 위해 '계수 나누기'를 통해 미분계수를 확장한 극한값인 '계수'를 생각했으며, 계수 역시 대응점에서

속계수$^{\text{겉차수}}$ = 계수 나누기

와 같이 계산할 수 있었습니다. 특별히 1차일 때에는 '계수'는 미분계수와 같아지기도 합니다.

한편 계수는 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=p\,(p\neq0)$일 때 $|p|$로 정의했는데, 실제로는 p의 값을 찾아야 하는 경우가 많습니다. 그런 경우 그래프의 개형을 고려하여 p의 부호를 확인해야 하는데, 이는 단순히 '증가하면 양수, 감소하면 음수'가 되는 것은 아닙니다.





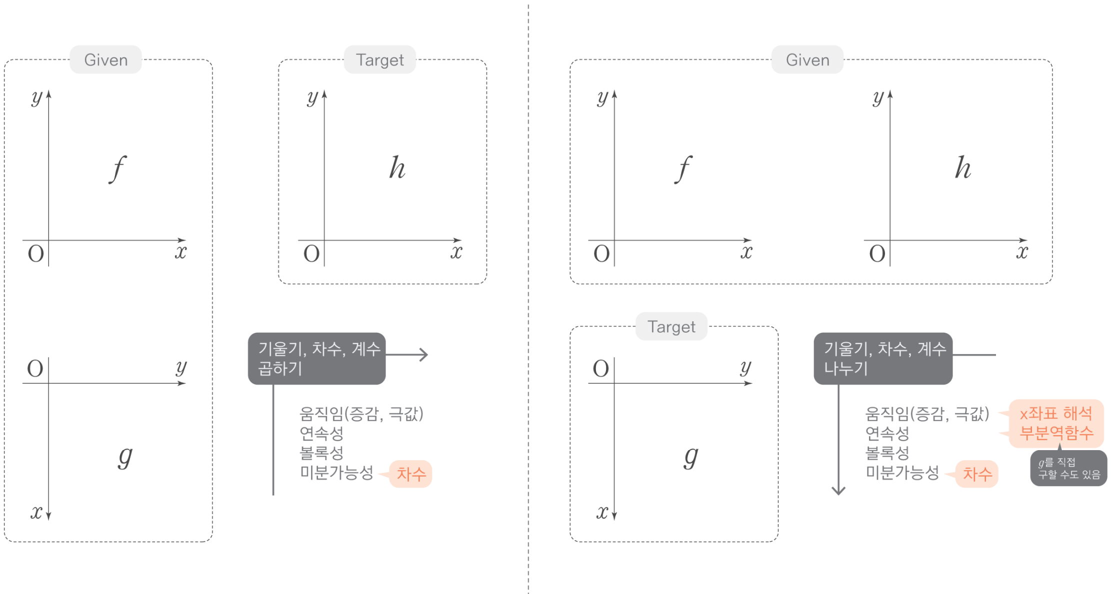
❶ $y=x^3$은 $x=0$에서의 좌·우계수가 모두 양수이고 증가하는 데에 반해,

❷ $y=x^2$는 $x=0$에서의 좌·우계수가 모두 양수이지만 $x<0$에서 감소, $x>0$에서 증가합니다.

이처럼 차수와 실제 그래프의 개형을 고려해서 p의 부호를 결정해야함을 명심합시다.

6. Summary

여기까지 합성함수의 움직임 및 다양한 성질이 어떤 원리에 의해 작동하고 기술되는지를 알아보았다. 아래의 도식을 보고 각각의 성질을 어떤 방식으로 해석할 수 있는지, 스스로 체크해 보도록 하자.



f가 매개가 되어 g와 h가 움직이는 동영상, 그리고 근사와 차수에 의한 이해가 잘 되어 있다면 직접 계산하지 않고도, 그래프를 그리지 않고도 많은 성질을 바로 알아낼 수 있을 것이다.

저자's LECTURE

"합성함수의 이해"

여기까지 다 읽으신 분들 정말 수고하셨습니다.

처음부터 반복하여 강조했듯이 우리의 목표는 어떤 스킬 하나를 배우는 것이 아니었습니다. 합성함수의 구조와 그것이 작동하는 원리를 깊게 이해하고 최대한 많은 것을 본질적이고 직관적으로 이해하는 것이 중요했습니다.

이 정도까지 많이 공부하다 보면 '이럴 바에 그냥 미분해서 풀면 되지' 라는 생각이 들 수도 있습니다. 그러나 미적분 문제의 대부분은 그래프와 직관에서 힌트를 얻어, 계산으로 마무리하는 방식으로 해결됩니다. 장담컨대 '그냥 미분해서 푸는' 풀이에서도 지금까지 공부한 내용들이 크게 도움이 될 것입니다.

초기 계획으로는 ❺편에서는 사소한 이야기들이나 자잘한 논증 등을 모두 마무리할 예정이었습니다만, 특강의 분량 상 그 내용들은 부록으로 넘기게 되었습니다. 부록은 궁금한 사람들만 봐도 좋습니다.
이 정도에서 직관이 완성되었다고 느낀다면 이제는 문제를 많이 푸는 게 더 도움이 될 것입니다.

마지막으로, 6월·9월 모의평가 28번들을 계기로 합성함수에 대해 깊게 공부해 왔으나 실제 수능에도 동일한 유형이 또 출제될 것이라는 보장은 없습니다. 모쪼록 합성함수에만 몰입하지 말고 다양한 유형의 문항을 충분히 학습하시기 바랍니다.

특강 ❶편에서 ❺편까지의 내용의 손글씨 버전을 오른쪽 QR에서 다운로드 받으실 수 있습니다. 학습에 활용하시기 바랍니다.

이 교재의 내용 중 그냥 넘어간 부분의 수학적 증명과, 좀 더 엄밀한 정의, 좀 더 현학적인 수학 이야기는 오른쪽 QR의 '부록' 으로 빼서 정리해 두었습니다. 역시 학습에 활용하시기 바랍니다.