이해원

2026
합성함수 해석

[2609(미적)28]

실전특강

02

「차수논리」

지식이 깊어질수록, 의심도 자란다.

거의 모른다고 말하는 자가 가장 정확히 알고 있다.

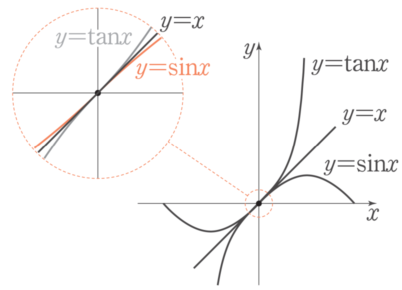
— 요한 볼프강 폰 괴테(1749-1823), 독일 작가·철학자·과학자

1. 근사와 차수논리

합성에 의해 어떤 상황이 나타나는지를 더욱 직관적이고 빠르게 파악하기 위한 도구로 '초월함수의 차수'를 생각할 수 있다. 「차수」란 기본적으로 다항함수에서만 정의된 개념인데, 이것을 초월함수로 확장하여 생각할 것이다. 간단히 이해하고 넘어가자. 우선 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한을 이해하는 데에서 시작하면 된다.

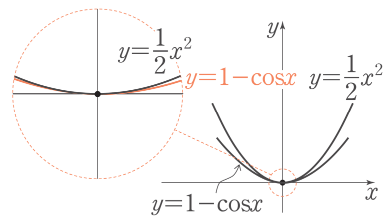
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$x=0$의 근방에서는 곡선 $y=\sin x$, $y=\tan x$가
직선 $y=x$와 거의 똑같다는 거구나!



$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$x=0$의 근방에서는 곡선 $y=1-\cos x$가
곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 거의 똑같다는 거구나!



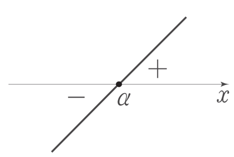
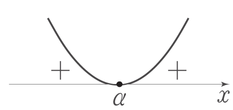
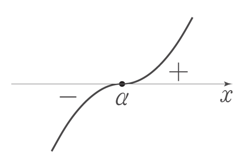
함수의 극한을 이렇게 해석했다면

초월함수도 각각의 점의 근방에서는 다항함수처럼 움직인다

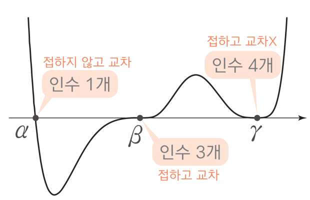
는 것을 이해할 수 있을 것이다. 여기에 다항함수의 그래프의 성질을 더해서 생각해 보자.

실전 개념 **인수의 개수와 다항함수의 그래프** 교과서 개념 실전 개념

함수 $y=(x-\alpha)^n$의 그래프는 인수의 개수에 따라 그래프의 개형이 달라진다. (단, n은 자연수이다.)

		
$n=1$일 때 x축과 접하지 않고 교차함	n이 짝수일 때 x축과 접하고 교차하지 않음	n이 1보다 큰 홀수일 때 x축과 접하고 교차함

다양한 인수를 갖는 경우에도 각각의 근의 근방에서 동일한 형태가 나타난다. 예를 들면 함수 $y=(x-\alpha)^1(x-\beta)^3(x-\gamma)^4\ (\alpha<\beta<\gamma)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

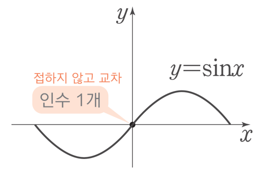


Sample Case

$x=0$ 의 근방에서

❶ $y=\sin x \approx x$

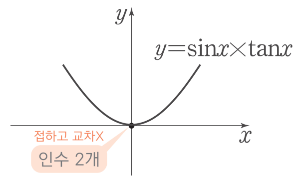
→ $(0,\,0)$ 에서 x 축과 접하지 않고 교차함



❷ $y=\sin x\times\tan x \approx x\times x = x^2$

→ $(0,\,0)$ 에서 x 축과 접하고 교차하지 않음

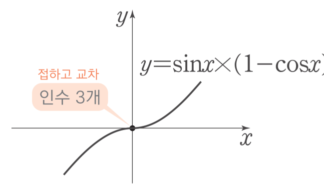
→ $x=0$ 에서 극값



❸ $y=\sin x\times(1-\cos x) \approx x\times\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{x^3}{2}$

→ $(0,\,0)$ 에서 x 축과 접하고 교차함

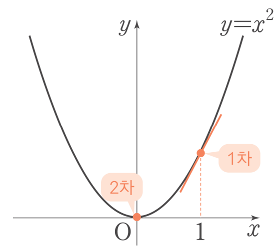
→ $x=0$ 에서 변곡점



x 축과의 교점이 아닌 경우에도 마찬가지로 몇 차인지 생각할 수 있다. 예를 들어 함수 $f(x)=x^2$ 은 $x=0$ 의 근방에서는 2차이지만

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2 \quad\to\quad x=1\text{ 의 근방에서 }\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\approx 2$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)\approx 2(x-1)+f(1)$$

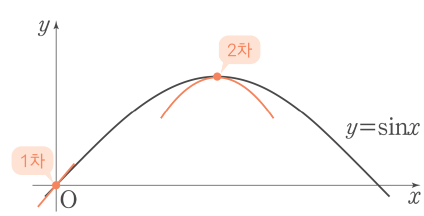


이므로 $x=1$ 의 근방에서는 기울기가 2인 직선, 즉 일차식처럼 움직인다는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 함수 $f(x)=x^2$ 은 $x=1$ 에서는 1차라 할 수 있다.

또한 $y=\sin x$ 는 $x=0$ 근방에서는 일차함수 $y=x$ 처럼 움직였는데, 앞에서 공부한

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad\to\quad x=0\text{ 의 근방에서 }1-\cos x\text{ 가 이차함수 }\frac{1}{2}x^2\text{ 처럼 움직임}$$

을 생각하면 똑같이 생긴 함수 $y=\sin x$ 역시 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 의 근방에서 이차함수처럼 움직인다는 것을 알 수 있다.



즉, 함수 $y=\sin x$ 는 $x=0$ 에서는 1차, $x=\dfrac{\pi}{2}$ 에서는 2차라 할 수 있다.

실전 개념 $x=a$ 에서의 차수 (최저차수)[1]

교과서 개념 · 실전 개념

연속함수 $f(x)$ 와 실수 a 에 대하여 극한값 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ 가 0 이 아닌 실수로 존재하도록 하는 자연수 k 가 존재한다면 k 를 **함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 차수**라고 한다.

여기까지의 흐름을 잘 이해했다면, 함수 $f(x)$ 의 차수를 위와 같이 정의하는 것을 자연스럽게 받아들일 수 있을 것이다. 차수의 계산은 기본적인 극한 계산이나 미분을 통해 찾아낼 수 있다. 간단한 함수들을 통해 연습해 보자.

KEY01 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

다음 함수의 주어진 점에서의 차수를 구하시오.

① $y=x^4+3x^2$, $x=1$　② $y=e^x$, $x=3$　③ $y=\cos x$, $x=0$

④ $y=\cos^2 x$, $x=0$　⑤ $y=\tan x-\sin x$, $x=0$

실전적 해법

① $\lim_{x\to1}\dfrac{x^4+3x^2-(1^4+3\cdot1^2)}{(x-1)^1}=(x^4+3x^2)'\big|_{x=1}=10\ (\neq0)\ \rightarrow\ 1$차

② $\lim_{x\to3}\dfrac{e^x-e^3}{(x-3)^1}=(e^x)'\big|_{x=3}=e^3\ (\neq0)\ \rightarrow\ 1$차

③ $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos0}{x^2}=\lim_{x\to0}\dfrac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}=-\dfrac{1}{2}\ (\neq0)\ \rightarrow\ 2$차

④ $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 0}{x^2}=\lim_{x\to0}\dfrac{-\sin^2 x}{x^2}=-1\ (\neq0)\ \rightarrow\ 2$차

⑤ $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}\ (\neq0)\ \rightarrow\ 3$차

KEY01에서 다룬 함수들의 그래프를 직접 그려보고 각 점에서 어떤 함수처럼 움직이는지를 눈으로 확인해 보도록 하자.

각주

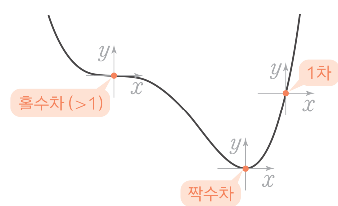
1) 일반적으로 사용하는 '다항함수의 차수'는 최고차항의 차수를 의미하는데, 여기에서는 근사의 관점이 중요하므로 최저차항의 차수에 대해 논할 것이다. 한완수 독자는 (차수)=(0으로 가는 속도)라고 생각하면 된다. 동일한 개념이다.

차수 계산을 빠르게 하는 방법이나 다양한 함수의 근사에 대한 내용은 뒤로 미루어 둘 것이다. 여기에서 확실하게 알아두어야 하는 것은 정해진 함수에서도 각 점마다 차수가 다르다는 것이다.

가장 간단한 다항함수의 경우, 다음 그림과 같이 좌표평면의 원점이라고 생각하고[1] 그래프의 형태(교차, 접함 여부)를 생각하면 그 점의 근방에서의 차수의 홀짝을 알 수 있다.

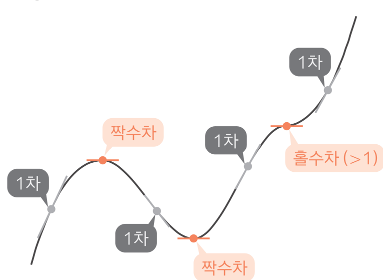
> 기울기가 0이 아니면 1차,
> 기울기가 0이면서 극대·극소이면 짝수차,
> 기울기가 0이면서 접선과 교차하면 홀수차(>1)

이라고 생각하면 된다. 다음 그림을 보며 판단 기준을 이해할 수 있도록 하자.

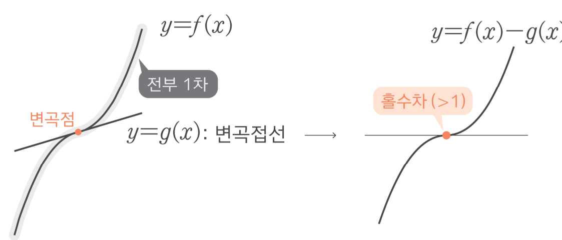


— Sample Case

❶ 다항함수 전체의 차수



❷ 삼차함수와 변곡접선



실전 개념 **여러 함수의 차수** 교과서 개념 · 실전 개념

① 미분가능한 점은 1차 이상이다.
즉, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수는 모든 점에서 1차 이상이다.
② n차 다항함수의 차수는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$만 가능하다.

각주

1) 즉, 각각의 점을 원점으로 평행이동해서 생각하는 것이다. 굳이 원점으로 옮기지 않아도 '각 점에서 다항함수처럼 움직인다'는 것을 이해하면 충분하지만, 논리적 서술에 있어서는 원점으로 옮겨서 생각하는 것이 편하므로 이 관점도 기억해 두자.

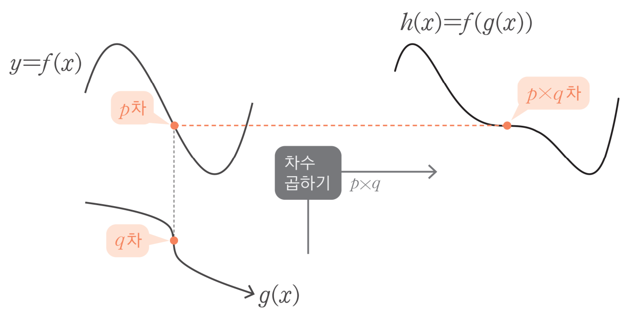
이제 합성함수의 차수를 생각해 보자. 각각의 함수를 원점으로 옮긴다는 관점을 고려하면, 간단한 두 함수 $f(x)=x^p$, $g(x)=x^q$ 으로 확인하면 충분하다는 것을 알 수 있다.

$$f(g(x)) \;=\; (x^q)^p \;=\; x^{pq}$$

이라는 간단한 식으로부터

(합성함수의 차수) = (겉함수의 차수)×(속함수의 차수)

임을 알 수 있고, 이를 합성함수의 구조를 나타내는 그림에서는 다음과 같이 나타낼 수 있다. '대응되는 점에서의 차수의 곱'이 합성함수의 차수가 된다고 이해하면 된다.



참고

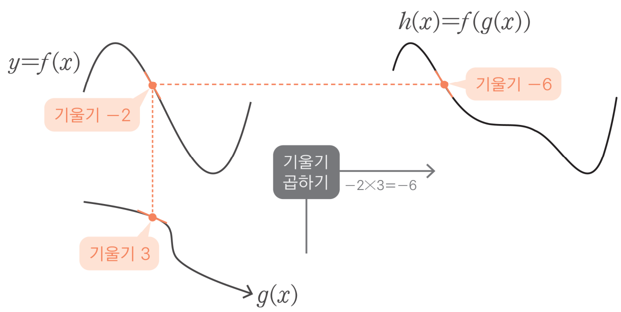
합성함수의 미분법

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\times g'(x)$$

$$\Updownarrow$$

(합성함수의 미분계수) = (겉함수의 미분계수)×(속함수의 미분계수)

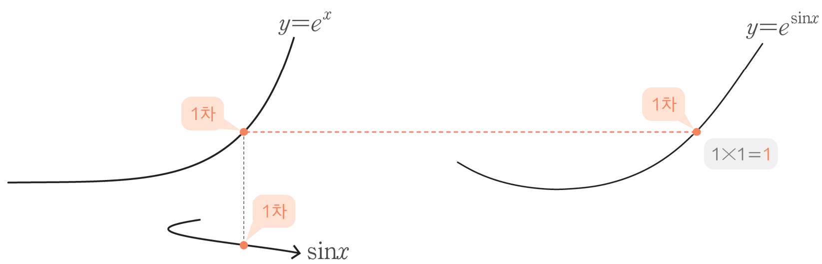
역시 같은 방식으로 나타낸다. 합성함수의 미분계수는 대응되는 두 점에서의 미분계수의 곱이 합성함수의 미분계수이다.



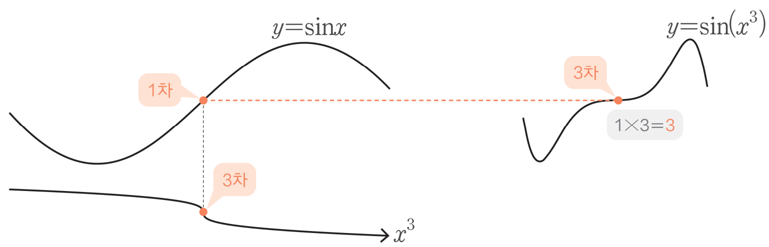
— Sample Case —

———— $x=0$ 의 근방에서 ————

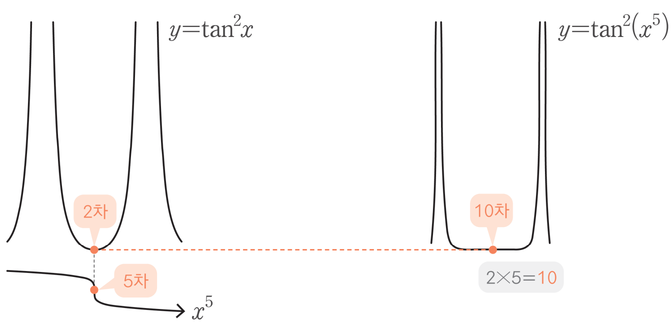
❶ $e^{\sin x}$: 1차(e^{x})에 1차($\sin x$)를 합성했으므로 1차(x)처럼 움직인다.



❷ $y=\sin(x^{3})$: 1차($\sin x$)에 3차(x^{3})를 합성했으므로 3차(x^{3})처럼 움직인다.

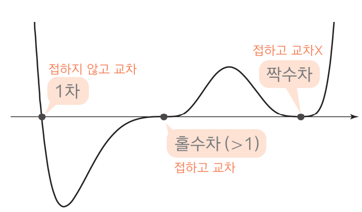


❸ $y=\tan^{2}(x^{5})$: 2차($\tan^{2}x$)에 5차(x^{5})를 합성했으므로 10차(x^{10})처럼 움직인다.



여기까지 이해했다면 합성함수의 움직임 및 극값, 변곡점 등의 판단을 할 준비가 된 것이다.

특강 ❶ 「함수의 합성과 성질 보존」에서 풀었던 기출문제들 중 일부를 차수논리로 풀어보자. 이때, 문제의 $f(x)$, $g(x)$ 와 같은 정체를 알 수 없는 함수들이 모두 **다항함수로 근사되는 예쁜 함수라는 가정** 하에 풀이를 하면 된다. 다항함수의 개형에 따른 차수 판정법을 다시 한 번 확인하자. 오른쪽 그림이 이해되면 된다.



KEY02 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2025·미적 27번 |

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

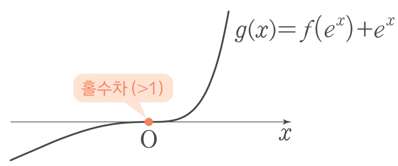
$$g(x) = f(e^x) + e^x$$

이라 하자. 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선이 x 축이고 함수 $g(x)$ 가 역함수 $h(x)$ 를 가질 때, $h'(8)$ 의 값은? [3점]

| 한완기 평수능 미적분 E6·10 |

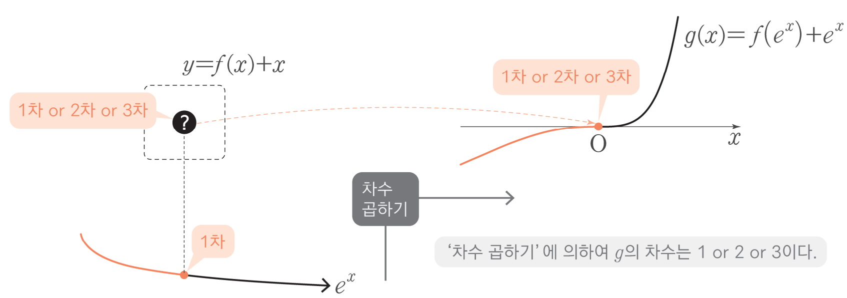
곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선이 x 축이고 함수 $g(x)$ 가 역함수를 가진다는 것은

$g(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 기울기가 0 이고, x 축과 교차해야함
→ $g(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 차수가 홀수(>1)임

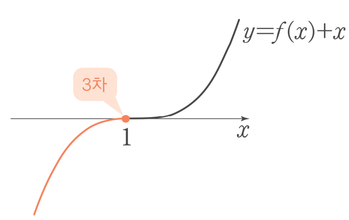


을 의미한다.

한편 $f(x)+x$ 는 삼차함수이므로 차수가 1, 2, 3 만 가능하고 e^x 의 차수는 항상 1 이므로 '차수 곱하기'에 의하여 두 함수의 합성함수 $g(x) = f(e^x) + e^x$ 의 차수도 1, 2, 3 만 가능하다.



이때 위에서 함수 $g(x) = f(e^x) + e^x$ 의 차수가 홀수(>1)이라 했으므로 3 차만이 가능하다. 따라서 함수 $f(x)+x$ 도 그 점$(x = e^0 = 1)$에서 3 차이다. 즉, 삼차함수 $y = f(x)+x$ 의 그래프가 다음과 같이 $x = 1$ 에서 x 축에 접하며 교차함을 알 수 있다.



삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로 $f(x)+x = (x-1)^3$ 이다.

KEY03 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.9·미적 28번 |

삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0) \times \left(g(0)\right)^2$ 의 값은? [4점]

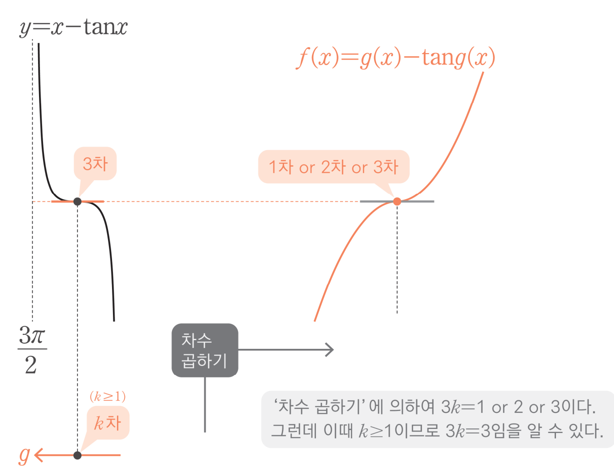
(가) $f(0) = 0$, $f''(\pi) = 0$

(나) $\sin g(\pi) = 0$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$

함수 $y = x - \tan x$ 를 미분하면

$$y' = 1 - \sec^2 x = -\tan^2 x : \ \boldsymbol{x = 0} \textbf{에서 } \boldsymbol{2}\textbf{차}$$

이므로 함수 $y = x - \tan x$ 의 $x = 0$ 에서의 차수는 3 이고,(★) 이로부터 곡선 $y = x - \tan x$ 의 모든 변곡점에서의 차수가 3 임을 알 수 있다.



이제 함수 $y = x - \tan x$ 의 변곡점에 대응되는 점의 함수 $g(x)$ 의 차수를 k 라 하자. **$g(x)$ 는 미분가능하므로 $k \geq 1$ 이고**, '차수 곱하기'에 의하여 그 점에서 함수 $y = g(x) - \tan g(x)$ 의 차수는 $3k(\geq 3)$이다.

그런데 삼차함수 $f(x)$ 는 모든 점에서의 차수가 1, 2, 3 만 가능하므로, $3k = 3$ 일 수 밖에 없다.

따라서 곡선 $y = f(x)$ 가 어떤 상수함수의 그래프와 접하면서 교차하는 점이 존재하는데, (가)조건에 주어진 $f''(\pi) = 0$ 에서 변곡점의 위치가 $x = \pi$ 임을 알 수 있으므로 $f(x) - f(\pi) = a(x - \pi)^3$ 이다.

미분가능한 함수는 모든 점에서 차수가 1 보다 크거나 같다는 것을 반드시 기억하자.

저자's LECTURE

미분·적분과 차수

앞의 풀이의 ★와 같이 도함수를 활용하여 차수를 판단할 수 있습니다. 직관적으로는 x^3 (3차)의 도함수가 $3x^2$ (2차)인 것을 떠올려서 이해하도록 합시다. $x=0$ 에서 몇 가지 예시를 확인해 봅시다.

$y=\cos x$: 2차 $\rightarrow$ $y'=-\sin x$: 1차
$y=x-\sin x$: $y'=1-\cos x$ 가 2차이므로 $x-\sin x$ 는 3차
$y=x-\tan x$: $y'=1-\sec^2 x=-\tan^2 x$ 가 2차이므로 $x-\tan x$ 는 3차

이런 예시로부터, 미분할 때마다 차수가 1 씩 작아진다고 생각할 수 있습니다.

3차 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 2차 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 1차 $\xrightarrow{\text{미분}}$??

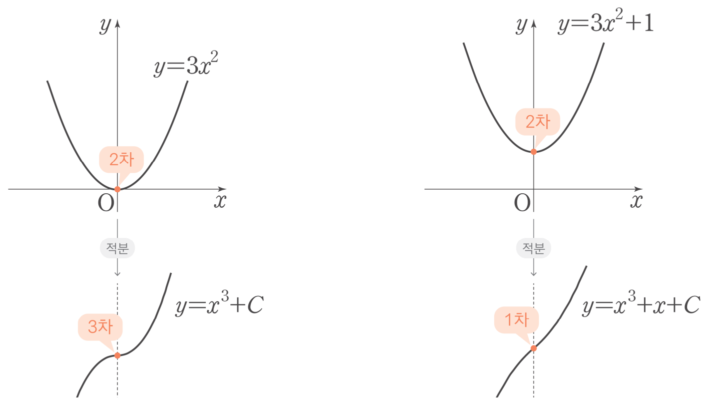
이때 주의할 점이 두 가지 있습니다.

❶ 1차를 미분했을 때의 차수는 알 수 없다

간단히 e^x (1차)를 확인해 봅시다. 이 함수는 몇 번을 미분해도 e^x 로 항상 1차입니다.
또한 $\sin x$ 의 경우 $x=0$ 에서 1차이지만 도함수인 $\cos x$ 는 $x=0$ 에서 2차입니다.
이처럼 1차의 경우 미분했을 때의 차수는 함부로 확정지어서는 안 됩니다.

❷ 적분한다고 차수가 1씩 커지는 것은 아니다

$y=3x^2$ 와 $y=3x^2+1$ 은 모두 $x=0$ 에서 2차이지만, 각각의 부정적분의 차수는



$\int 3x^2dx=x^3+C$: 3차 $\qquad$ $\int (3x^2+1)dx=x^3+x+C$: 1차

가 됩니다. 우리가 논하는 차수는 '최저차수'이기 때문에 나타나는 일이죠.
즉, 함숫값이 0 일 때에만 적분했을 때 차수가 1 만큼 커지는 것입니다.
함숫값이 0 이 아닌 점에서는 적분했을 때 항상 1차입니다.
★에서는 도함수의 값이 0 이고 2차였기 때문에 원함수가 3차라고 할 수 있었던 것입니다.

두 가지 사실에 유의하여 활용하도록 합시다.

KEY04 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.6·미적 28번 |

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\left(f(x)\right)^5 + \left(f(x)\right)^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0$, $f'(2) > 0$

$y = x^5 + x^3$의 원점에 대응되는 점에서의 $f(x)$의 차수를 k라 하면, $f(x)$는 미분가능하므로 $k \geq 1$이다. 따라서 $\left(f(x)\right)^5 + \left(f(x)\right)^3$의 차수는 $3k$ $(3k \geq 3)$이고, 이는 함수 $\ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - ax - b$의 어떤 점에서의 차수가 3 이상임을 의미한다.

한편 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - ax - b$를 미분하면

$$y' = \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}} - a = \frac{(\text{이차식})}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$$

인데, 이때 분모는 $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$이므로 차수에 영향을 주지 않는다. 따라서 y'의 차수는 최대 2이다. 이를 바탕으로 원함수의 차수를 생각해 보면

y': 1차 or 2차
- $y'=0$인 경우 → y: 2차 or 3차
- $y' \neq 0$인 경우 → y: 1차

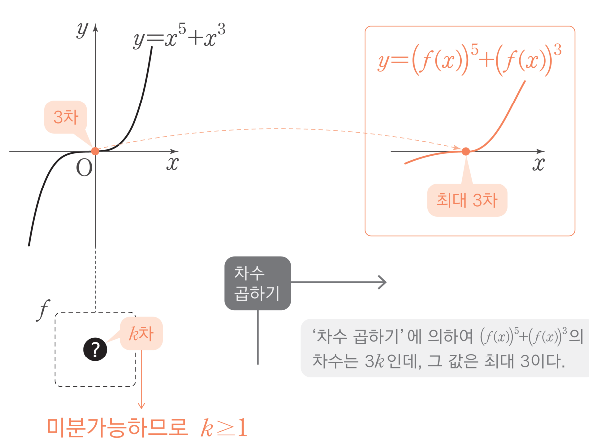
이므로 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - ax - b$의 차수는 최대 3이다.

결과적으로 $y = x^5 + x^3$의 원점에 대응되는 점에서 $\left(f(x)\right)^5 + \left(f(x)\right)^3$의 차수 $3k$는

$$3 \leq 3k \leq 3 \quad \rightarrow \quad 3k = 3$$

이다. 즉, x축이 $y = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - ax - b$의 변곡접선이다.

차수논리의 연습을 위한 다소 어려운 풀이이고, ①편의 '성질보존'으로 변곡접선임을 알아내는 것이 정석 풀이이다.



저자's LECTURE

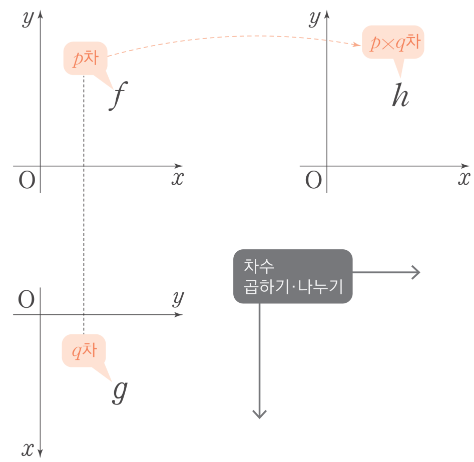
합성함수와 차수논리

앞의 세 기출문제 KEY02·03·04를 차수논리로 풀어내며, 합성함수 문제에서 차수논리를 어떻게 활용할 수 있는지 감이 잡히셨을 것입니다. 공통된 논리는 다음과 같습니다.

$f(g(x))=h(x)$ 가 주어졌을 때,

① 주어진 조건으로 세 함수 f, g, h의 차수 파악

② '차수 곱하기·나누기'로 세 함수 f, g, h의 차수의 관계 파악



③ 찾아낸 관계로 식을 확정하고 문제 풀이

이렇게 겉함수 f, 속함수 g, 합성함수 h의 차수를 활용하여 '3인 캐치볼'을 하듯 서로의 관계성을 파악하는 것이 차수논리의 핵심입니다. 다른 문제나 상황에서도 연습해 보시길 바랍니다.

2. 다항함수로 근사되지 않는다면

특강 ❶「함수의 합성과 성질 보존」에서 직관적으로 구사했던 풀이에 차수 개념을 도입한 것으로 비교적 정량적이고 논리적으로 보이는 풀이가 완성되었다. 이전보다 확실한 판단의 근거가 생겼다는 느낌을 받으면 성공적으로 학습했다고 생각하면 된다.

그러나 우리에게는 아직 숙제가 남아 있다.

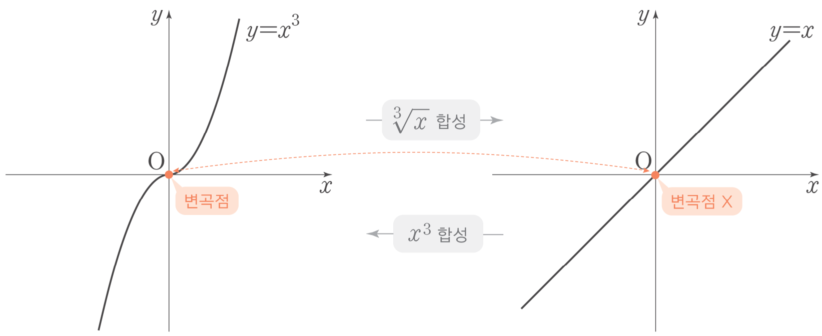
$f(x)$, $g(x)$와 같은 정체를 알 수 없는 함수들이 모두 다항함수로 근사되는 예쁜 함수라는 가정

하에 문제를 풀었는데, 실제 발문에는 그런 보장이 없었기 때문이다. 즉, 새롭게 확인한 풀이 역시 반쪽짜리 풀이에 불과하다.

다항함수로 근사되지 않는 경우에 어떤 일이 일어나는지 간단히 알아보자.

2-1. 정말 유지되는가?

함수 $y=x^3$ 의 그래프는 $x=0$ 에서 변곡점을 갖지만, 여기에 $\sqrt[3]{x}$ 을 합성하면 $y=x$ 가 되어 변곡점을 갖지 않는다. 반대로 함수 $y=x$ 의 그래프는 변곡점을 갖지 않지만 x^3 을 합성하여 $y=x^3$ 으로 만들면 다시 변곡점이 생길 수도 있다.



이처럼 속함수의 선택에 따라 변곡점이 없어질 수도, 새로 생길 수도 있다. 그런데 왜 우리는 이런 상황을 고려하지 않고 '성질 보존', '차수'와 같은 이야기를 통해 문제를 풀 수 있었는가?

그 근거는 일차적으로 '미분가능성'에서 찾아볼 수 있다. **두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모두 미분가능할 때,**

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))\times g'(x)$$

이다. 이 기본적인 식만 봐도 $f'(x)=0$, $g'(x)=0$ 을 만족시키는 점에서의 성질이 합성함수 $f(g(x))$ 에 거의 그대로 반영될 것이라는 추측을 할 수 있다.

또한 위의 예시인 $(x^3)\circ(\sqrt[3]{x})$ 에서 변곡점이 없어진 이유는 $\sqrt[3]{x}$ 이 **$x=0$ 에서 미분가능하지 않기 때문**이라는 것도 알 수 있다. 식으로 확인하기 위해 $\lim\limits_{x\to0}f'(g(x))g'(x)$ 를 생각하면 $0\times\infty$ 꼴로 해석되고[1], $f'=0$ 에 의해 나타나던 성질이 $g'\to\pm\infty$ 에 의해 없어지는 것이라고 직관적으로 이해할 수 있다.

따라서 '성질 보존'의 논리를 활용할 때에는 **미분가능성을 확인**하도록 하자. 논리의 빈틈을 조금이라도 채울 수 있는 최소한의 보험이다.

각주

1) 직접 계산해 보길 권한다.

2-2. 차수가 존재하지 않는 경우

실전 개념 **$x=a$에서의 차수 (최저차수)** 교과서 개념 실전 개념

연속함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 극한값 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$가 0이 아닌 실수로 존재하도록 하는 **자연수 k**가 존재한다면 k를 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 차수라고 한다.

앞서 차수를 정의할 때 k가 자연수인 경우만 고려하였다. 차수의 정의를 잘 이해했다면 '차수'는 **0으로 가는 속도**를 정량적으로 나타낸 개념임을 알 것이다. 그런데 함수의 극한 문제를 충분히 풀어 봤다면 다항함수가 아닌 함수들의 '0으로 가는 속도' 역시 생각해 본 적이 있을 것이다.

예를 들어 함수 $f(x)=x|x|$는 $x\to 0$일 때 '2차의 속도'로, 함수 $g(x)=\sqrt[3]{x^5}$는 $x\to 0$일 때 '$\dfrac{5}{3}$차의 속도'로 0에 수렴하는 함수이다. 그런데 이 두 함수 $f(x)=x|x|$, $g(x)=\sqrt[3]{x^5}$은 정의에 따르면 **차수가 존재하지 않는** 함수들이다.[1)]

그렇다고 차수논리를 활용하는 풀이를 포기할 필요는 없다. 차수의 본질이 '0으로 가는 속도'임을 이해하고 있다면, **좌·우의 차수를 각각 생각해서** 같은 논리를 적용하면 그만이다. 구체적으로는 좌·우의 차수를 각각

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|^k},\quad \lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|^k} \text{가 } 0\text{이 아닌 실수로 존재하도록 하는 실수 } k$$

와 같이 새롭게 정의하여 활용하는 것인데, 본질적으로는 앞서 배운 정의와 다를 것이 없다. 좌·우의 차수를 나눠서 생각하면 된다는 것만 알아두자. ❺편에서는 좌·우의 차수를 활용한 다양한 예시도 다루어 볼 것이다.

마지막으로, 좌·우로 나누어도 차수가 존재하지 않는 함수도 있다는 것을 알아두자.

$$h(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

이라는 함수는 $x=0$에서 미분가능하지만 차수가 존재하지 않는다. 직접 확인해 보자.

Hint: 모든 자연수 n에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$ 임을 이용하자.

각주

1) $f(x)$의 경우 명백하게 2차일 것 같지만 직접 대입하여 계산하면 좌·우극한의 값이 서로 달라서 차수를 논할 수 없다.
$g(x)$의 경우는 차수의 정의를 '자연수 k'에서 '실수 k'로 정의하면 '$\dfrac{5}{3}$차'라고 할 수 있을 것 같지만, 유리수 지수가 $x<0$에서 정의되지 않는다는 이슈가 있어 함부로 정의하기는 곤란하다. 직접 확인해 보자.

2-3. 마무리

여기까지의 본질적인 이해가 완벽히 되어 있어야 수능에서 차수논리를 능숙하게 활용할 수 있을 것이다.

차수논리를 제대로 구사하여 문제를 풀 줄 아는 사람들의 머릿속에서는 여기까지 배운 함수의 움직임과 속도에 대한 논리(또는 직관)이 완성되어 있다. '한 줄 풀이'라고 하는 것은 그만큼 머릿속에서 많은 것들이 처리되고 있다는 것이며, 함수의 움직임과 차수의 본질적 논리를 이해하지 않고

'대충 공식 적용해서 차수논리 딸깍'

과 같은 방식으로 문제를 풀 수는 없다는 것을 명심하자.

저자's LECTURE

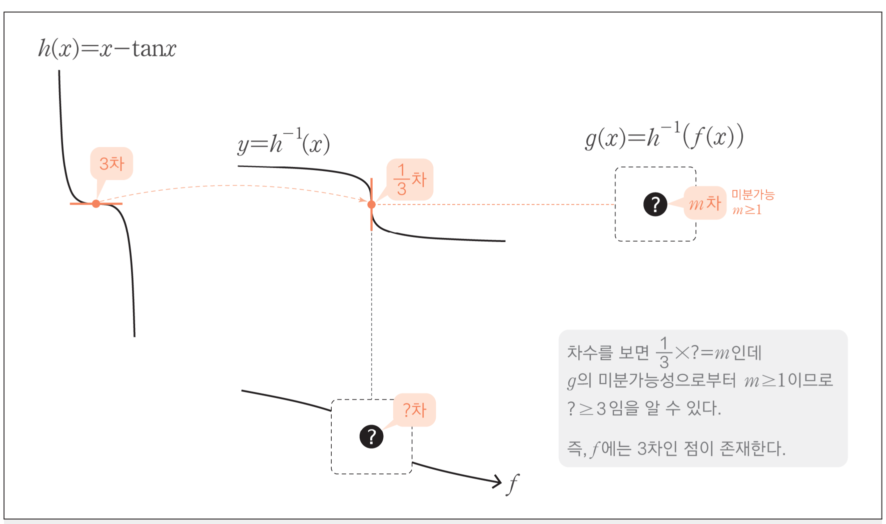
차수논리

이번 특강에서 가장 중요한 한 마디는 '**다항함수처럼 움직인다**'입니다.

충분히 확인하지는 않았지만, 우리가 주로 다루는 함수들은 대부분 그런 성질을 갖는 「예쁜」 함수들이라는 것을 이미 느끼고 있을 것입니다. 대부분 미분가능한 함수들이니까요. 미분가능하다고 해서 예쁜 함수가 아니라는 것도 방금 막 확인한 참이긴 하지만.. 실제로 우리가 다루는 건 거의 다 예쁜 함수가 맞습니다. 수능에 나오는 함수들도 대체로 예쁜 함수들이구요.

지난 특강에서 예고한 것처럼, 함수의 움직임에 대한 직관을 더욱 단단히 하기 위한 관점의 하나로 차수논리를 학습해 보았습니다. 차수를 가지고 할 수 있는 이야기는 아직 한참 많이 남아 있지만, 단 여기서 한번 멈추는 게 좋겠습니다. 우선은 '합성함수의 이해'에 집중하고, 남은 이야기는 ❺편에서 마저 하도록 하죠.

다음 특강에서는 합성함수를 이해하는 또 다른 관점을 소개할 예정입니다.
매일 앞자리에 앉는 사람도 옆에서 보면 또 다르게 보인다는 내용입니다. 어차피 똑같은 사람이지만요.



예고