이해원

2026 합성함수 해석

[2609(미적)28]

실 전 특 강

01

「함수의 합성과 성질 보존」

내용 없는 사유는 공허하고, 개념 없는 직관은 맹목적이다.

— 임마누엘 칸트(1724-1804), 독일 철학자

0. INTRO: [260928] 실전적 접근

28. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

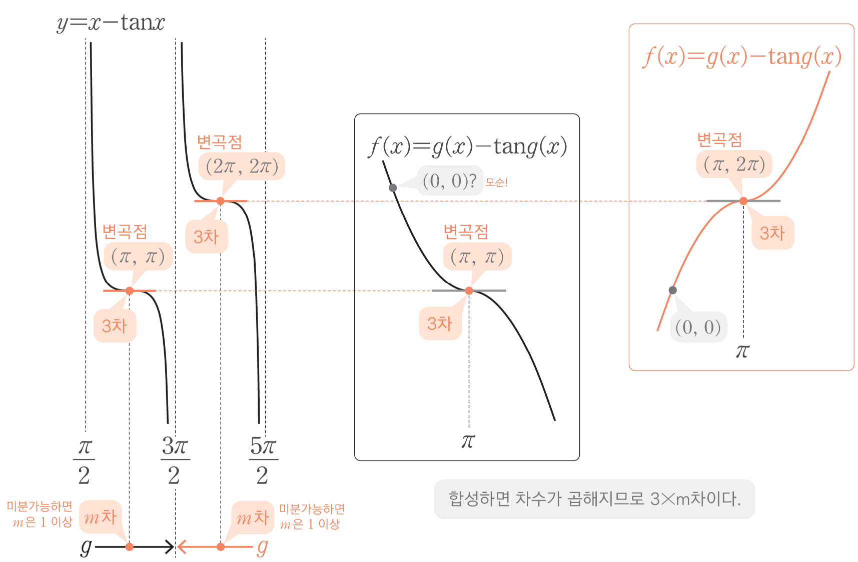
$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0) \times \left(g(0)\right)^2$의 값은? [4점]

> (가) $f(0) = 0$, $f''(\pi) = 0$
>
> (나) $\sin g(\pi) = 0$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

2026학년도 9월 모의평가 미적분 28번



[실전적 접근] $x-\tan x$의 변곡점은 3차이다. 여기에 대응되는 g의 차수를 m이라 하면 이때 f의 차수는 $3\times m$이다. g는 미분가능한 함수이므로 $m \geq 1$이고, 따라서 $3m \geq 3$이다. f는 삼차함수이므로 모든 점에서 최대 3차이다. 즉, $3 \leq 3m \leq 3$에서 $3m = 3$이므로 f는 3차인 점, 즉 미분계수가 0인 변곡점을 가진다.

[2609(미적)28]은 주어진 조건들과

합성함수의 성질 보존 + 「차수논리」

를 활용하여 **문항의 구조를 파악**하고 나면 위 그림을 그리고, [실전적 접근]과 같은 사고 과정을 통해 정답인 상황을 확정 지을 수 있었다. 이러한 관찰을 마치면 다음과 같은 계산을 해 $f(x)$를 구할 수 있다.

$$f(x) = a(x-\pi)^3 + 2\pi \xrightarrow{f(0)=0} f(x) = \frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3 + 2\pi$$

이 풀이에 도달하기 위한 기초적인 관점과, 합성함수에 대한 다양한 접근법 및 논리적 분석을 다음의 다섯 편의 특강에 거쳐 학습해 나갈 것이다.

❶ 「함수의 합성과 성질 보존」
❷ 「차수논리」
❸ 「$f(g(x))=h(x)$ 의 x 좌표 해석」
❹ 「부분역함수」
❺ 「합성함수 총정리」

이번 특강 ❶ 「함수의 합성과 성질 보존」에서는 합성함수가 작동하는 본질적인 원리가 설명되어 있다. 이에 앞서 다음 주의사항을 반드시 읽어보도록 하자.

주 / 의 / 사 / 항

직관에서 논리까지

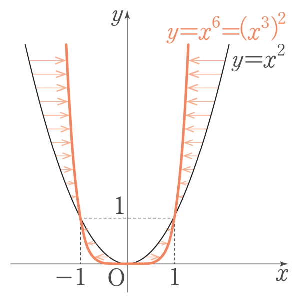
❶~❹에서 다룰 내용은 최근 자주 출제되는 합성함수+항등식 문항의 구조를 '직관적으로' 파악하기 위한 태도·관점입니다. 이때 ❶❷는 지엽적이지 않은, 평범한 상황에서 적용될 수 있는 내용입니다. 즉, 이 해석에 맞지 않는 특이한 함수나 이상한 상황이 얼마든지 존재합니다. ❺에서는 ❶~❹에서 배운 내용을 바탕으로 합성함수의 모든 것을 파악하는 연습을 할 것입니다.

당장은 수학적 엄밀함을 잠시 내려놓고, '대부분의 상황에서 적용되는, 잘 맞아떨어지는 해석'으로 시작합시다. 평가원에서는 비직관적이고 지엽적인 경우의 출제를 지양하므로, 이러한 관점 자체가 수능을 대비하는 입장에서는 유의미한 내용일 것입니다.

학습하는 과정에서 논리적 허점과 그 반례 등을 직접 찾아보는 것도 좋습니다. 그리고 그 허점이 어떤 조건에 의해 어떻게 논리적으로 정당화 되는지, 그 과정을 차례대로 확인해 가는 것이야 말로 수학을 '제대로' 공부하는 것이라고 할 수 있습니다.

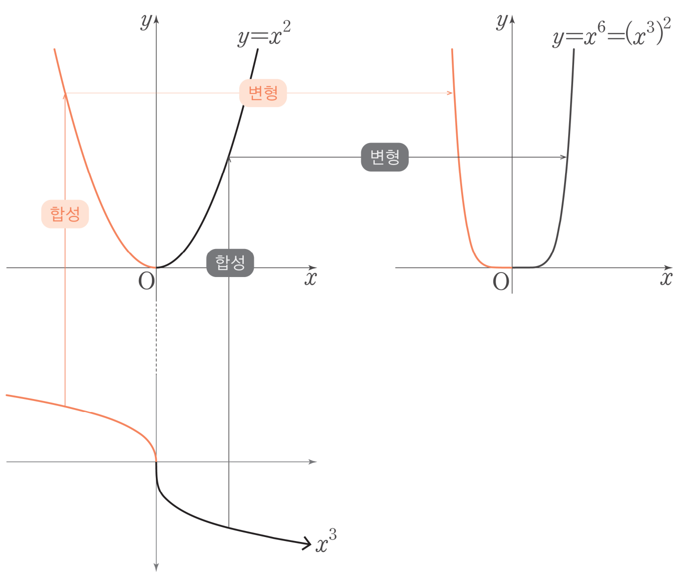
1. INSIGHT: 그래프 찌그러뜨리기

$x^6 = (x^3)^2$ 이므로, 함수 $y = x^6$ 은 함수 $y = x^2$ 에 x^3 을 합성한 것이다. 이것을 그래프에서 생각하면



> **속함수 x^3 이 겉함수 $y = x^2$ 의 그래프를**
>
> 찌그러뜨려서 **합성함수 $y = x^6$ 의 그래프로 바꿔버린 것**

이다. 이처럼 함수의 합성은 겉함수를 속함수로 찌그러뜨려서 그 개형을 바꾸는 것으로 볼 수 있다.

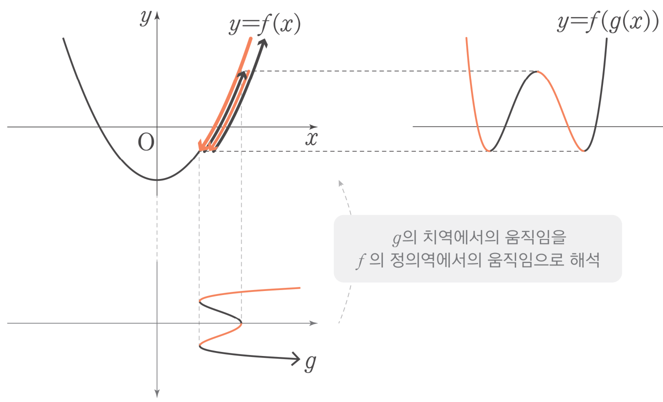


위 그림과 같이 속함수 x^3 이 x축 위를 움직이고, 그에 따라 겉함수 $y = x^2$ 의 그래프가 변형된다고 생각하면 된다. 몇 가지 예시를 보며 이해해 보자.

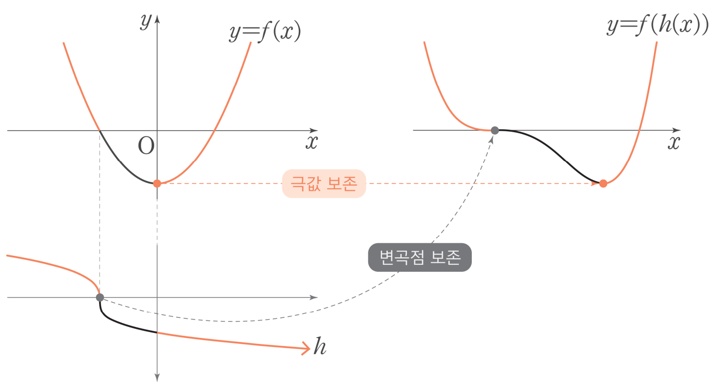
Sample Case

이차함수 $f(x)=x^2-1$ 의 그래프를 사차함수의 그래프로 만들기

1



2



이때 짚고 넘어가야 할 것은 이차함수를 '사차함수처럼 생긴 함수'로 바꾸는 것이 아니라 '진짜 사차함수'로 바꿀 수 있다는 것이다. 즉, 속함수만 잘 선택해 주면 다항함수도 얼마든지 초월함수로 바꿀 수 있고, 그 반대 역시 가능하다.[1)]

Sample Case 1에서는 극대·극소가 아니었던 것이 극대·극소로 바뀌었고 그래프의 개형도 눈에 띄게 바뀌었다. 한편 그래프가 합성에 의해 찌그러지더라도 **그래프의 성질이 보존**되는 경우도 있다. 예를 들면 2와 같이 속함수 $h(x)$ 가 증가함수인 경우, 그래프를 찌그러뜨렸어도 겉함수가 극소인 점은 그대로 극소인 점으로 옮겨졌으며 그 극솟값 -1 역시 다른 값으로 바뀌지 않고 -1 로 보존되었음을 확인할 수 있다.

각주

1) 겉함수의 구조상 불가능한 경우도 있다. 예를 들면 함수의 치역을 확장하는 변형은 합성으로는 불가능하다. 즉, $y=\sin x$ 를 $y=x$ 로 바꿀 수는 없다.

이처럼 함수의 합성을 ‘그래프 찌그러뜨리기’로 이해하면 합성함수에 대한 식을 좀 더 직관적으로 해석할 수 있게 된다. 최근 시행된 9월 모의평가 미적분 28번 문항 역시 그러한 문항이었다.

28. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

발문에서 주어진 식은 다음과 같이 읽을 수 있다.

“곡선 $y = x - \tan x$ 를 $g(x)$ 로 찌그러뜨려서 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프로 만들었다.”

[2609(미적)28]의 본격적인 분석에 앞서 더 이전에 출제된 다른 기출문제를 통해 「그래프 찌그러뜨리기」의 논리를 연습해 보고, 마지막으로 [2609(미적)28]을 살펴보자.

KEY01 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2025·미적 27번 |

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

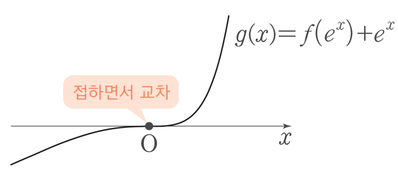
이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$ 에서의 접선이 x 축이고 함수 $g(x)$ 가 역함수 $h(x)$ 를 가질 때, $h'(8)$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{36}$ ② $\dfrac{1}{18}$ ③ $\dfrac{1}{12}$ ④ $\dfrac{1}{9}$ ⑤ $\dfrac{5}{36}$

| 한완기 평수능 미적분 E6·10 |

주어진 함수 $g(x)=f(e^x)+e^x$ 은 **$f(x)+x$ 라는 삼차함수에 e^x 을 합성한 것**으로 생각할 수 있다. 또한 주어진 조건을 이용하면 $y=g(x)$ 의 대략적인 그래프를 떠올릴 수 있다.

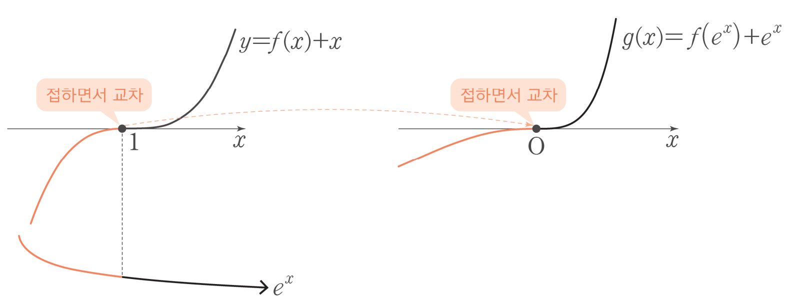
$$\left.\begin{array}{l} g(x)\text{ 가 증가 } (\because \text{ 역함수 존재}) \\ (0,\ g(0))\text{ 에서의 접선이 } x\text{ 축} \end{array}\right\} \rightarrow$$



이 그래프를 '그래프 찌그러뜨리기'의 관점에서 보면 다음과 같은 생각이 들 것이다.

> 삼차함수가 어떻게 생겼어야 e^x 으로 찌그러뜨려서 만든 그래프가 x 축과 접하면서 교차할까?

e^x 이 큰 뒤틀림없이 증가하는 개형이라는 점을 고려하면, 삼차함수 $f(x)+x$ 도 '비슷하게' 생겼어야 함을 예상할 수 있다.



즉, 함수 $y=f(x)+x$ 의 그래프가 $x=e^0$ 에서 x 축과 접하면서 교차함을 알 수 있다. 따라서 이 개형으로부터 바로 함수 $f(x)+x$ 의 식을 얻어내고, 정답을 구하면 된다.

$$f(x)+x=(x-e^0)^3 \quad \rightarrow \quad g(x)=(e^x-1)^3 \quad \rightarrow \quad h'(8)=\frac{1}{g'(\ln 3)}=\frac{1}{36}$$

KEY02 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2024.6·미적 28번 |

두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x \times e^{\sin^2\pi x}+b$이다.
(나) $f(0)=f(2)+1$

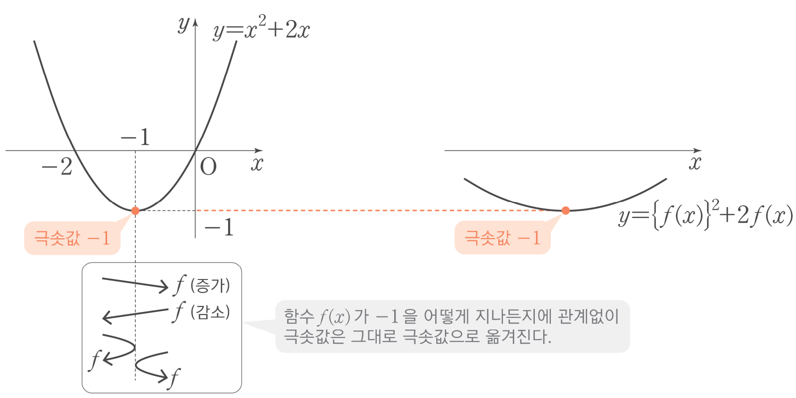
① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

| 한완기 평수능 미적분 E8·22 |

(가)조건의 좌변은 **x^2+2x에 $f(x)$를 합성한 것**으로 볼 수 있다. 그리고 (나)조건의 $f(0)=f(2)+1$으로부터 $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$을 얻는데, 이는 다음을 시사한다.

구간 $[0, 2]$에서 **$f(x)$는 -1을 지난다.** ($\because$ 사잇값 정리)

왜 하필 -1을 봐야 하는가? -1이 겉함수 $y=x^2+2x$의 극솟값이기 때문이다. 이 점에서 $f(x)$에 의해 그래프가 찌그러지는 과정을 생각해 보면 다음과 같다.



즉, x^2+2x의 극솟값 -1이 그대로 $\{f(x)\}^2+2f(x)$의 극솟값으로 보존된다는 것을 알 수 있다. 다시 말해 우변의 함수 $y=a\cos^3\pi x \times e^{\sin^2\pi x}+b$도 극솟값 -1을 갖는다는 것이다.

이제 $f(0)=-\frac{1}{2}$과 $y=a\cos^3\pi x \times e^{\sin^2\pi x}+b$의 극솟값이 -1임을 이용하여 계산하면 a, b의 값을 모두 구할 수 있다.

KEY03 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.6·미적 28번 |

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^{b}$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$이다.

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

좌변의 $ax+b$를 우변으로 이항하자.

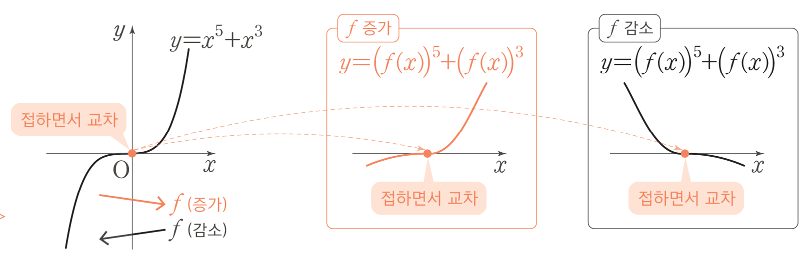
$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$$

이제 좌변에 남은 함수를 x^5+x^3에 $f(x)$가 합성된 것으로 보자. 함수 $y=x^5+x^3$의 그래프를 그려보면 $(0, 0)$에서 x축과 접하면서 교차하는 개형임을 알 수 있다. 그리고 (나)조건의 $f(-3)f(3)<0$으로부터 KEY02에서와 마찬가지로 다음을 알 수 있다.

구간 $[-3, 3]$에서 **$f(x)$는 0을 지난다.** ($\because$ 사잇값 정리)

앞의 두 문제를 잘 공부했다면 이후의 풀이 과정이 이미 다 예상될 것이다.

f가 , 인 경우도 생각할 수 있지만 , 인 경우만 확인하였다. 후자의 상황은 확실하게 나타나는 데에 반해 전자의 상황은 나타나지 않을 수도 있다.



그림과 같이 '$(0, 0)$에서 x축과 접하면서 교차하는' $y=x^5+x^3$의 성질이 f에 의해 찌그러진 함수 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$에도 그대로 유지되어 있을 것이다. 따라서 다음과 같이 정리할 수 있다.

곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$와 x축이 접하면서 교차함

$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$가 직선 $y=ax+b$와 접하면서 교차함

$\Leftrightarrow$ 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 변곡접선

이제 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 변곡접선들을 구한 뒤, 그 중 $f'(2)>0$인 것을 선택하면 된다.

KEY04 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.9·미적 28번 |

삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

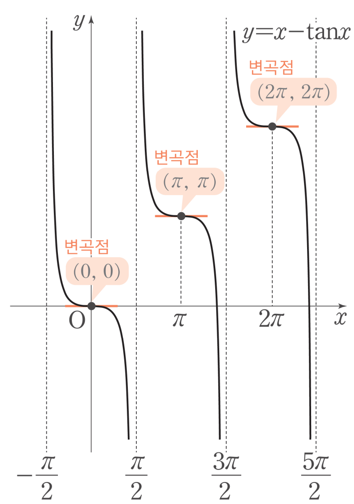
$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times\left(g(0)\right)^2$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$

(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\dfrac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9



우변을 $x-\tan x$ 에 $g(x)$ 가 합성된 것으로 보면 된다. 그리고 미분을 통해 함수 $y=x-\tan x$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.

그래프의 특징을 나열해 보면 다음과 같다.

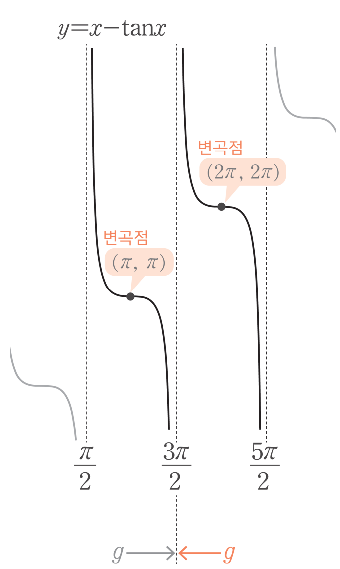
❶ 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$, $\cdots$ 에서 각각 연속된 곡선이 나뉘어져 있음

❷ 각 구간의 양 끝에서 $\pm\infty$ 로 발산

❸ 변곡점($(0, 0)$, (π, π), $(2\pi, 2\pi)$, $\cdots$)에서의 미분계수가 0

이때 ❶❷로부터, 다음과 같이 생각할 수 있다.[1]

❶의 구간 하나만큼의 곡선을 찌그러뜨려서 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프로 만들었구나!



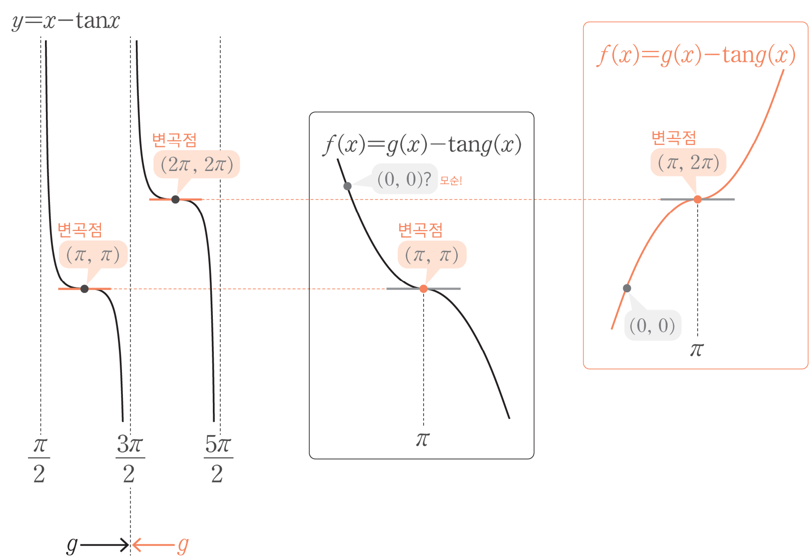
$\lim_{x\to\infty} g(x)=\dfrac{3\pi}{2}$ 이므로, 함수 $g(x)$ 의 치역은 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$ 에 속해야 함을 알 수 있다. 따라서 $\sin g(\pi)=0$ 으로부터 $g(\pi)=\pi$ 또는 $g(\pi)=2\pi$ 이다.

이제 ❸에 주목하자. 곡선 $y=x-\tan x$ 의 변곡점 (π, π), $(2\pi, 2\pi)$ 는 g 에 의해 곡선이 찌그러져도 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점으로 옮겨질 것이다.

각주

1) 여기에는 꽤 많은 논리가 숨어 있는데, 당장은 직관적으로 받아들이고 넘어가자. '연속함수를 만드려면 연속함수를 찌그러뜨려야 한다' 라고 이해하면 된다.

조건에서 $f''(\pi)=0$ 이므로[1] 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 $x=\pi$ 에서 나타남을 알 수 있고, 그 변곡점에서의 미분계수는 0이다. 이는 곧 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이거나 $f'(x)\leq 0$ 임을 의미한다. 따라서 $f(x)$ 는 일대일대응이고, $g\to\frac{3\pi}{2}$ 임을 고려하여 가능한 함수의 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



위에서 얻은 두 개형에서 변곡점의 좌표와 $f(x)$ 의 증감을 고려하면, 함수 $g(x)$ 의 치역이 구간 $\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right)$ 에 속해있는 경우만이 $f(0)=0$ 을 만족시킬 수 있다. 이제 $f(0)=0$ 을 이용하여 $f(x)$ 를 구하면 된다.

$$f(x)=a(x-\pi)^3+2\pi \xrightarrow{f(0)=0} f(x)=\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+2\pi$$

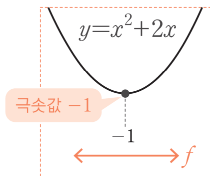
각주

1) 사실 $f''(\pi)=0$ 이라는 조건이 없어도 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 위치를 확정할 수 있다. 즉, $f''(\pi)=0$ 은 의도하지 않은 상황을 고려하지 않도록 준 **과조건**이다.

이처럼 합성함수의 그래프의 원리를 직관적으로 잘 이해하고 있으면 문항의 구조를 더 잘 파악할 수 있게 된다. 이 논리를 체화한 사람들이 시험장에서 구사하는 실제 풀이와 사고 과정은 다음과 같다.

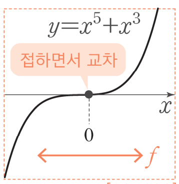
[251127]

합성하기 전에도 x축이 변곡접선이었겠다. → $f(x)+x=(x-1)^3$



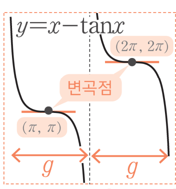
[240628]

f가 -1을 지나니까 f^2+2f도 극솟값 -1을 가짐 → $a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$의 극솟값이 -1



[260628]

f가 0을 지나니까 f^5+f^3도 x축이 변곡접선 → $\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)$의 변곡접선 찾기



[260928]

$g-\tan g$도 변곡접선 기울기 0, 구간 하나를 선택해야 함 → $f(x)=a(x-\pi)^3+n\pi$, 함수의 움직임 조사

지금까지 출제된 문항은 모두

걸함수의 **특징적인 성질**이 그대로 **합성함수에 보존**되는 상황

을 물었다. 따라서 각각의 특징적인 점을 정확히 공략하면 정답을 효과적으로 찾아낼 수 있었다. 그리고 지금까지 출제된 '걸함수의 특징'은 **극값**, **변곡점(변곡접선)**, **점근선(정의역)**이며, 문항의 유형을 조금 더 넓혀 보면 **미분가능성**[260630]을 고려해야 하는 경우도 있었다. 이외에도 연속성, 주기성, 대칭성 등 다양한 성질들이 활용될 가능성이 있고, 나아가 속함수의 성질이 활용되는 경우 역시 얼마든지 출제될 수 있다.

저자's LECTURE

함수의 합성과 성질 보존

이번 특강에서 중요하게 쓰인 것은 **'보존되는 성질'** 에 집중한다는 관점이었고, 이를 위해 필요한 것은 **합성함수의 움직임을 추적**할 수 있는 능력이었습니다. 그래프의 움직임을 직관적으로 이해하고 있었다면, 어떤 성질이 유지되는지를 금방 눈치 챌 수 있었을 것입니다.

다만, 이 특강의 서두에서 선언(?)했던 것처럼, 사실은 여기서 다룬 거의 모든 내용이 '일반적으로는' 성립하지 않습니다. 특정 조건이 있었기에 가능한 관찰이었죠. 이에 대해서는 이후에 차근차근히 보강해 나가면 되고, 지금 단계에서는 무엇보다 합성함수의 움직임에 대한 직관을 키우는 것이 중요합니다.

본격적인 논리적 보강에 앞서, 이 직관을 조금 더 정교하고 날카롭게 다듬어 보고자 합니다.
이를 위해 다음 특강에서는 '근사'와 '차수'를 주제로 다룰 것입니다. 미리 살짝 스포일러를 하자면, 우리가 다루는 '예쁜' 초월함수들은 대부분 다항함수와 크게 다르지 않다는 이야기가 될 것입니다.