8. $a>0$, $b>0$이고 $a^3b^2=1$일 때, $\log_a(a^5b^6)$의 값을 구하시오

① -2　② -3　③ -4
④ -5　⑤ -6

9. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ 일 때 정적분 $\int_0^3 f'(x)dx$의 값을 구하시오.

기함수.

$f(3)-f(0)$

① 15　② 13　③ 11
④ 9　⑤ 7

$x^3-4x=f(x)$

$\therefore f(3)-f(0)=15$

10. 점 $(\frac{\pi}{3}, 2)$ 를 지나고 최솟값이 -4인 함수 $f(x)=a\cos(x)+c$ $(a>0)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 교점들 가운데, x좌표의 차이가 양수인 값들 중 최솟값을 이루는 한 쌍을 A, B라 하자. 이때 A의 x좌표를 x_A, B의 x좌표를 x_B라 하고 $x_A<x_B$라 하자. 점 P가 $x_A<x_P<x_B$를 만족하며 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

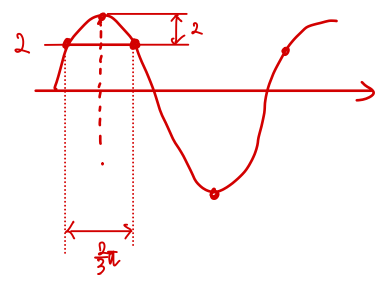
① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{3}$　③ $\frac{2\pi}{3}$
④ π　⑤ $\frac{4\pi}{3}$

$f(\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}+c=2$

$-a+c=-4$

$a=4$

$c=0$



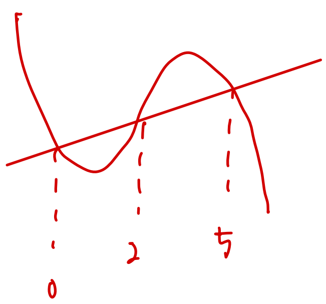
$\therefore \triangle PAB=\frac{2}{3}\pi\times2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\pi$

11. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 집합은 $\{0,2,5\}$이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 6이다.

$f(-1)$의 값을 구하시오

① $\frac{67}{14}$ ② $\frac{66}{14}$ ③ $\frac{65}{14}$
④ $\frac{32}{7}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



$f\left(\frac{7}{3}\right)=3$

$f(x)=ax(x-2)(x-5)+x$

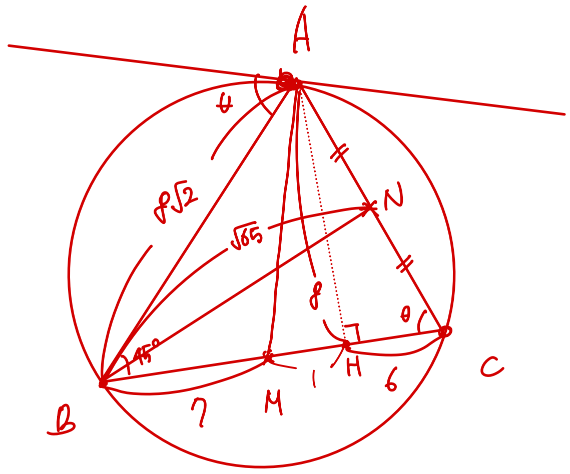
$f\left(\frac{7}{3}\right)=3 \longrightarrow a=-\frac{9}{28}$

$f(-1)=\frac{9}{28}\times 18-1$

$=\frac{67}{14}$

12. 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l과 현 AB가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. 선분 BC의 중점을 M이라 할 때, $AM=\sqrt{65}$이다. 선분 AC의 중점을 N이라 할 때, $BN=\sqrt{137}$ 이다. $\angle ABC=45°$ 이고 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면, $MH=1$이다.
$300\cos^2\theta$의 값을 구하시오

① 108 ② 125 ③ 216
④ 225 ⑤ 275



$\overline{AC}=10$

$\cos\theta=\frac{3}{5}$ ∴ $\cos^2\theta=\frac{9}{25}$

$\boxed{300\cos^2\theta=108}$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 정수 k에 대하여 부등식
> $f(k-1)f(k+1) \ge 0$ 이 성립한다.
> (나) $f(0) = -6$

$f(5)$의 값을 구하시오.

① 12 ② 24 ③ 36
④ 48 ⑤ 60

(가) $\Longleftrightarrow$ 짝수끼리 같은 부호 / 홀수끼리 같은 부호
or
둘 중 하나가 0

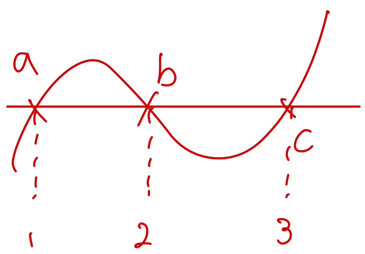
if ① f의 실근 3개 (a, b, c) + | − | + | −
부호변화 a b c

② f의 실근 1개. ⟶ 불가.

$f(0) = -6$ 사용

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ $(a, b, c$는 모두 정수$)$

$abc = 6$



$2 \times 3 \times 4 = 24$

14. 첫째항과 공차가 0이 아닌 정수인 등차수열 a_n과 그 합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 에 대하여 좌표평면 위의 $P_n(n,\ S_n)$은 이차함수 $y = f(x)$ 위에 있다.

> (가) 점 $O(0,0)$, $P_m(m,\ S_m)$, $(m, 0)$을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 외접원의 중심이 직선 $y = x$위에 있도록 하는 자연수 $m > 1$이 유일하게 존재한다.
>
> (나) $\sum_{k=1}^{10} |S_k - k| = 65$ 이다.

다음 조건이 성립 할 때 , 가능한 모든 $S_{14} - a_1$의 값의 합을 구하시오.

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

$a_n = a_1 + (n-1)d$

(가) ⇒ 외심 $\left(\frac{m}{2}, \frac{S_m}{2}\right)$ → $y = x$ 위...

$S_m = m$

$\frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = m$

$2a_1 + (m-1)d = 2$

(나) $S_k - k = \frac{k}{2}(2a_1 - 2 + (k-1)d)$

$t := 2a_1 - 2$ $\quad b_k := t + (k-1)d$ 는 등차

(∵ (1)) $b_m = 0$

∴ $\sum_{k=1}^{10} |S_k - k| = \frac{|d|}{2} \times \sum_{k=1}^{10} k|k-m| = 65$

$F(m) := \sum_{k=1}^{10} k|k-m|$ $\quad m > 1$ 에 대해 계산

$F(2) = 277$ $\quad F(3) = 228$ $\quad F(4) = 185$ $\quad F(5) = 150$

$F(6) = 125$ $\quad F(7) = 112$ $\quad F(8) = 113$ $\quad F(9) = 130$

(∵ (2)) $\frac{|d|}{2} F(m) = 65 \Longleftrightarrow |d| = 1 \quad m = 9$

(1)에 $m = 9$ 대입 $2a_1 + 8d = 2 \Rightarrow 2a_1 = 2 - 8d$

Case 1) $d = 1 \to a_1 = -3$
Case 2) $d = -1 \to a_1 = 5$

Case 1) $S_{14} - a_1 = 52$ $\quad$ Case 2) $S_{14} - a_1 = -26$

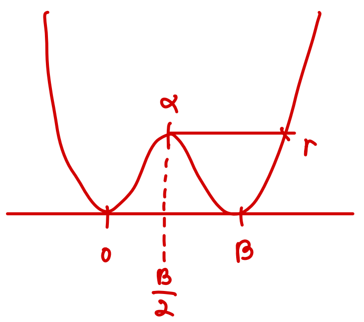
$\boxed{∴ 답: 26}$

15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 $f'(0)=0$을 만족한다. 양수 t에 대하여 $g(t)$를 함수 $|f(x)-f(t)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수로 정의한다. 함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=f(\beta)$를 만족시키는 양수 β가 존재한다.
(나) $g(t)$가 불연속이 되는 양수 t의 집합은 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$이다 $(0<\alpha<\beta<\gamma)$
(다) $\int_{\beta}^{\gamma}(g(t)-3)dt = 4\sqrt{2}-4$

$\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{8}$의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38



$r-\beta = 4\sqrt{2}-4$

$r-\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\beta$

$\beta = 8$

$f(x) = x^2(x-8)^2+c$

$f(4) = 16\times16+c$

$f(8) = c$

$\frac{256}{8} = 32$

16. 방정식

$$\log_3(x-3)=\log_9(3x-5)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+8x$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

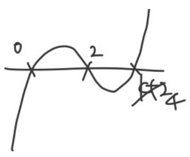
$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x |f(t)|dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다. $g(6)$의 값은?

(가) $f(0)=0$이다. (나) 구간 $(2,4)$의 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(2)$ 이다. (다) $g(2)=8$

$f(2)=0$

$g(x)=\int_0^x \{f(t)+|f(t)|\}dt$



$f(x)=x(x-2)(x-2-k)$
$=(x-2)\{(x-2)^2+(2-k)(x-2)-2k\}$
$=(x-2)^3+(2-k)(x-2)^2-2k(x-2)$

$\frac{1}{4}(x-2)^4+\frac{2-k}{3}(x-2)^3-k(x-2)^2\Big|_0^2=-4+\frac{16-8k}{3}+4k=4$

$16-8k+12k=24$
$4k=8$
$k=2$

$g(6)=2\int_0^2 f(t)dt+2\int_4^6 f(t)dt$
$=8+2\left[\frac{1}{4}(x-2)^4-2(x-2)^2\right]_4^6$
$=8+2\times\left(\frac{4^4-2^4}{4}-2(16-4)\right)=\boxed{80}$
$64-4-24 \quad 36$

22. 첫째항이 a_1이고 공차가 0이 아닌 정수 d인 등차수열 a_n에 대하여, 수열 b_n은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}2 & (a_n>0)\\ 1 & (a_n=0)\\ 0 & (a_n<0)\end{cases}$$ 로 정의하고 $b_m=1$인 자연수 $m>12$이 존재한다.

(가) $\sum_{k=1}^{37} b_k=m+11$ (나) $\lvert a_{m-2}\rvert+\lvert a_{m+3}\rvert=75$

$a_m=0$
$-2d \quad +3d$
m 짝 : $12<m<37$
m 홀 : $m>37$

두 수열 a_n, b_n이 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{60} b_k(a_k+d)$의 값을 구하시오.

i) $d>0$, $a_1<0$
$5d=75$
$d=15$

m짝 : $37-m=p$ $\quad 74-2m+1=m+11$
$\cancel{3m=64}$
~~m홀~~:

ii) $d<0$. $a_1>0$
$d=-15$

m짝: $m-1=p$ $\quad 2m-2+1=m+11$
$\cancel{m=12}$
m홀: $p=37 \rightarrow 74=m+11$
$m=63$

$a_n=-15(n-63)$

$\frac{1}{100}\times 2\sum_{k=1}^{60}\left(-15(n-62)\right)$
$=+\frac{36}{100}\times\frac{+2+61}{2}\times 60$
$=\boxed{567}$

27. 실수 전체에서 정의된 증가하는 미분가능 함수 $f(x)$에 대하여$f(0)=0$이고, 양수 a와 실수 b에 대하여 $f'(x)=a(x-b)^2e^{-x}$이다. $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 $x=e-2$에서만 미분가능하지 않고 $g'(0)=e^{-1}$이다. $f(2)$의 값이 $pe+qe^{-1}$일 때, $p-q$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

$f'(b)=0$ $f(b)=e-2$ $f'(0)=e$

$f'(0)=ab^2=e$

D I
$(x-b)^2$ e^{-x}
$2(x-b)$ $-e^{-x}$
2 e^{-x}
0 $-e^{-x}$

$f(x)=ae^{-x}\{-(x-b)^2-2(x-b)-2\}+c$

$f(b)=-2ae^{-b}+c=e-2$

$f(0)=a(-b^2+2b-2)+c=0$

$-e+2ab-2a+c=0$

$2ab-2a+c-2=e-2$

$2ab-2a-2=-2ae^{-b}$

$ab-a-1=-ae^{-b}$

$b-1-\frac{b^2}{e}=-\frac{1}{e}$ $b=1$ $a=e$ $c=e$

$f(x)=e^{-x+1}\{-(x-1)^2-2(x-1)-2\}+e$

$f(2)=e^{-1}(-5)+e$ 6

28. $x>0$에서 함수 $f(x)$와 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. $\int_1^4 g(x)dx$의 값이 $\frac{p}{q}$ 일 때, $p+q$의 값은? (단 p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 모든 $x>0$에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이
(나) 모든 $x>0$에 대하여 $2x(f'(x))'+f'(x)=0$ 이다.
(다) $f'(1)=4$

① 140 ② 141 ③ 142
④ 143 ⑤ 144

$\frac{(f'(x))'}{f'(x)}=-\frac{1}{2x}$ $f'(x)=4x^{-\frac{1}{2}}$

$\ln|f'(x)|=-\frac{1}{2}\ln x+c$ $f(x)=8x^{\frac{1}{2}}+k$

$|f'(x)|=c'x^{-\frac{1}{2}}$ $8x^{\frac{1}{2}}-8=(x-1)\cdot\frac{4}{\sqrt{g(x)}}$

$f'(1)=c'=4$ $\sqrt{g(x)}=\frac{\sqrt{x}+1}{2}$

$g(x)=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{4}$

$\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_1^4$ 101

$=\frac{\frac{15}{2}+\frac{28}{3}+3}{4}=\frac{45+56+18}{24}=\frac{119}{24}$

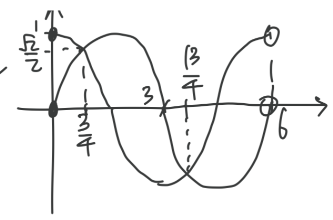
$\boxed{143}$

29. 실수 t에 대하여 방정식 $(\sin(\frac{\pi x}{3})-t)(\cos(\frac{\pi x}{3})-t)=0$를 만족하는 실근 중 $0 \le x < 6$ 범위에 속하는 가장 작은 근을 $\alpha(t)$, 가장 큰 근을 $\beta(t)$라 하고, 함수 $f(t)$를

$f(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \sin(\frac{\pi x}{3})dx$ 로 정의한다. $\alpha(t)$가 미분 불가능한 t의 집합을 $A=\{p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n\}$라 하자.

$(p_0 < p_1 < \cdots < p_n)$ $3 \times \sum_{k=1}^{n} f(p_k) = \frac{q}{\pi}$ 일 때, q의 값을 구하시오.

$\sin\frac{\pi x}{3} = t$, $\cos\frac{\pi x}{3} = t$



$t = 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \cancel{\cdots}$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$3\ \ 0\ \ 3$

$-\frac{3}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}} = 3$

$\boxed{18}$

30. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 세 항 a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 세 항 a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(다) $a_2=(a_1)^2$이고 $\sum_{n=1}^{4}(\frac{1}{a_n})=\frac{37}{36}$ 이다.

극한값 $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n+1}})$ 이 $\frac{q}{p}$ 일 때, 서로소인 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오.

$n=1$: $2a_2 = a_1 + a_3$ $\quad a_3 = 2a_1^2 - a_1$

$a_3^2 = a_2 \cdot a_4$ $\quad a_4 = \frac{4a_1^4 - 4a_1^3 + a_1^2}{a_1^2}$

$= 4a_1^2 - 4a_1 + 1$

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_1^2 - a_1} + \frac{1}{(2a_1-1)^2} = \frac{37}{36} \times 2^2 \times 3$

$\hookrightarrow 2\times2\times3\times3\times2^2\times3$

$\frac{a_1^4(2a_1-1)^3}{2^4 \times 3^3}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$

$= \frac{18+9+6+4}{36}$

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ a_4=9,\ a_5=12,\ a_6=16,\ a_7=20$

$a_1 = 2$ $\quad a_{2m+1} = 2\cdot\sum_{k=1}^{m} k$

$a_3 = 2+4$ $\quad = m(m+1)$

$a_5 = 2+4+6$

$\vdots$

$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n+1}}\right)$

$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2m+1}}$

$\boxed{3}$