제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $\sqrt[3]{3}\times 9^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3^{\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{1}{3}}=27^{\frac{1}{3}}=3$

2. 함수 $f(x)=x^3+2x+1$ 에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(1)=(3x^2+2)_{x=1}=5$

3. 첫째항이 8이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1a_3=2a_2a_4$$

를 만족시킬 때, a_5의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$a_1a_3=2\times a_1a_3\times r^2$

$r^2=\frac{1}{2}$ $a_5=a_1\times r^4=8\times\frac{1}{4}=2$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & (x<3) \\ x+2a & (x\geq 3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$9+p=3+2p$

$p=6$

5. 함수 $f(x)=(x^2-x)(2x^2-5)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$f'(x)=(2x-1)(2x^2-5)+(x^2-x)(4x)$

$f'(2)=3(3)+2(8)=9+16=25$

6. $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan(\pi-\theta)=-2$일 때, $\cos\theta-\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ③ 0

④ $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=2$ 3사 → $\sin$ − $\cos$ −

$\sqrt{5}$ 2 1

$\dfrac{-1+2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

7. 곡선 $y=x^3-6x+7$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 y절편은? [3점]

$y'=3x^2-6$ 기:-3

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y=-3(x-1)+2=-3x+5$

8. 두 실수 a, b가

$$3a+b=\log_3 45, \quad a+b=\log_9 5$$

를 만족시킬 때, $a-b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3a+b=\log_3 45$

$+ \quad -2a-2b=\log_3 \frac{1}{5}$

$a-b=\log_3 9=2$

9. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1=-t^3+7t^2-10t, \quad x_2=t^2+2t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$v_1=-3t^2+14t-10$ $v_2=2t+2$

속도같: $3t^2-12t+12=0$ $t=2$로 유일

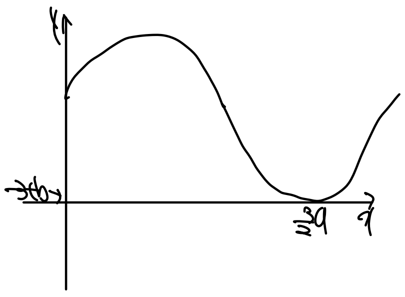
$t=2$일때 $x_1=-8+28-20=0$ $x_2=8$ 거리:8

10. 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0, 2a]$에서 정의된 함수

$$f(x)=3\sin\frac{\pi x}{a}+b$$

의 그래프가 x축과 오직 한 점 $(2, 0)$에서 만날 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



임을 알 수 있다.

$\frac{3}{2}a=2$ $a=\frac{4}{3}$, $b=3$ $a+b=\frac{13}{3}$

11. 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x+3)f(x)=\int_{-3}^{x}(4f(t)-2t^2)dt$$

를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? [4점]

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

미분하면 $(x+3)f'(x)+f(x)=4f(x)-2x^2$ $(x+3)f'(x)-3f(x)=-2x^2$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$(x+3)(2ax+b)-3(ax^2+bx+c)=-2x^2$

$-ax^2$ $(6a-2b)x+3b-3c=-2x^2$

$a=2.\ b=6,\ c=6$

$f(x)=2x^2+6x+6.$ $f(2)=8+12+6=26$

12. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

모든 자연수 n에 대하여 $3{a_n}^2+2na_n-8n^2=0$이다.

① 540 ② 550 ③ 560 ④ 570 ⑤ 580

$(3a_n-4n)(a_n+2n)=0$ $a_n=\mathrm{sel}\left(-2n,\ \frac{4}{3}n\right)$ (정수)

$\sum_{n=1}^{30} a_n$		n이 3의 배수일때	n이 3의 배수가 아닐때
	Max	$\frac{4}{3}n$	$-2n$
	Min	$-2n$	$-2n$

$\mathrm{Max}-\mathrm{Min}=\frac{10}{3}\times n$ $(n=3k\ .\ k=1\sim10)$

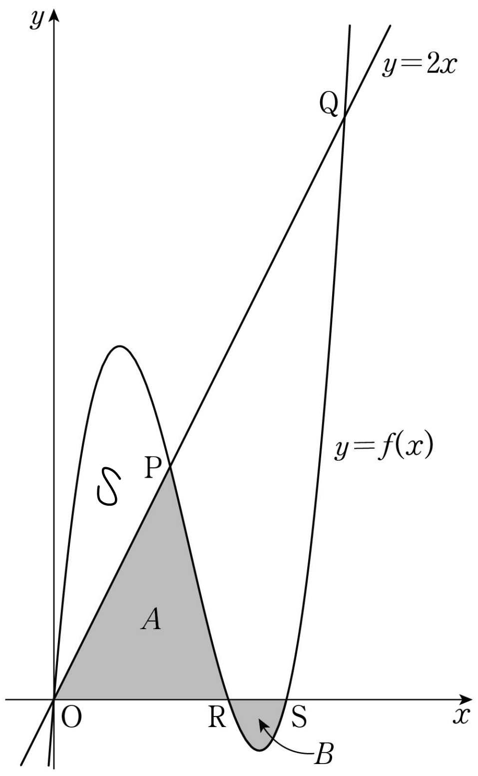
$=\sum_{k=1}^{10}10k=550$

13. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(0)=f(a)=f(a+1)=0$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 세 점 O, P, Q($\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}$)에서 만난다. 두 점 R$(a,0)$, S$(a+1,0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OP, OR로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 RS로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}=5\sqrt{5}$일 때, $A-B$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{61}{12}$ ② $\frac{31}{6}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{65}{12}$



$\overline{OQ}=5\sqrt5$ 이므로 Q(5,10)

$f(x)=x(x-a)(x-a-1)$ 에 대하여 $f(5)=10$ 이므로 $a=3$

또한 $x(x-3)(x-4)=2x$ 에서 $0, 2, 5$ 이므로 P(2,4)

$A-B=\int_0^4 x(x-3)(x-4) - \int_0^2 x(x-2)(x-5)$

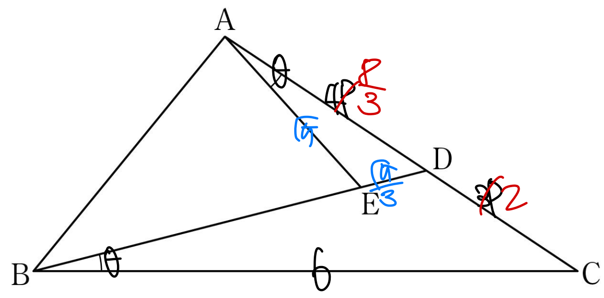
$=\int_0^4 x(x-2)(x-4) - x(x-4) - \int_0^2 x(x-2)(x-1) - 4x(x-2)$

$=\frac{4^3}{6}-4\times\frac{8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=6$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $4:3$으로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 BD 위의 점 E가

$$\angle\mathrm{DAE}=\angle\mathrm{DBC},\quad \sin(\angle\mathrm{DAE}):\sin(\angle\mathrm{EDA})=1:3$$

을 만족시킨다. $\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{5}$일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{180}{11}\pi$ ② $\frac{195}{11}\pi$ ③ $\frac{210}{11}\pi$ ④ $\frac{225}{11}\pi$ ⑤ $\frac{240}{11}\pi$

$\sin\angle DAE : \sin\angle EDA = \overline{DE} : \overline{AE} = 1:3$

이때, $\sin\angle EDA = \sin\angle CDB$ 이므로 $\sin\angle DBC : \sin\angle CDB = \overline{CD} : \overline{BC} = 1:3$

$\sin\angle DAE = \sin\angle DBC$

$\cos\theta = \dfrac{5+\frac{64}{9}-\frac{5}{9}}{2\times\sqrt5\times\frac{8}{3}} = \dfrac{\frac{104}{9}}{\frac{16\sqrt5}{3}} = \dfrac{13}{6\sqrt5}$ $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{6\sqrt5}$

$2=2R\dfrac{\sqrt{11}}{6\sqrt5}$ $R^2\pi=\dfrac{180}{11}\pi$

15. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x |f(t)|dt+\left|\int_0^x f(t)dt\right|$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

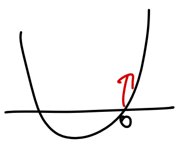
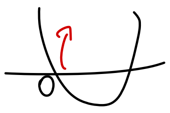
(가) $g(x)=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $-7 \le x \le 0$이다.
(나) 양수 p에 대하여 $g(x)=81$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $4p \le x \le 7p$이다.

$f(-10)$의 값은? [4점]

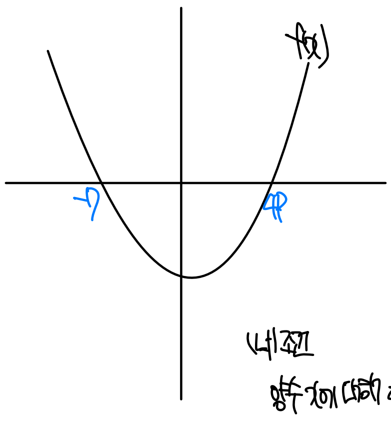
① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

g(x)에서 특별한 event가 일어나려면 { $f(t)=0$인 점에서 $\int_0^x |f(t)|$에서 event가 일어나거나 / $\int_0^x f(t)=0$인 점에서 $\left|\int_0^x f(t)\right|$에서 event가 일어나야 함

현재 g(x)의 event 점은 $-7, 0, 4p, 7p$

이때 $f(0)\ge0$이면 좌우에서 event가 일어날 수 없음

이면 $x>0$에서 event 불가X

이면 $x<0$에서 event 불가X

따라서 $f(0)<0$



(가)조건
음수 x에 대하여 관찰하면 x절편 전까지 $g(x)=-\int_0^x f(t)+\int_0^x f(t)=0$
x절편부터는 구간이 음으로되어 증가함. 따라서 음수 x절편은 -7

(나)조건
양수 x에 대하여 관찰하면 x절편 전까지 $g(x)=-\int_0^x f(t)-\int_0^x f(t)=-2\int_0^x f(t)$로 증가함
x절편에서 $\int_0^x f(t)=0$인 점까지, $g(x)=\int_0^x f(t)-\int_0^x f(t)$이므로 증가되는 넓이가 상쇄 $\left(-2\int_0^x f(t)\text{로 유지}\right)$
$\int_0^x f(t)=0$인 점 이후로는 증가

$f(x)=p(x+7)(x-4p)$

양은 변할수 없으므로 양수 x절편은 $4p$, $\int_0^{7p} f(t)=0$, $-2\int_0^{4p} f(t)=81$

$\cancel{p}\int_0^{7p}(x+7)(x-4p)=0$

$\int_0^{7p} x^2+(-4p+7)x-28p$ $\left[\frac{1}{3}x^3+\left(-2p+\frac{7}{2}\right)x^2-28px\right]_0^{7p}=0$

$\frac{1}{3}7^3p^3+\left(-2p+\frac{7}{2}\right)7^2p^2-4\cdot7^2p^2=0$

$\frac{7p}{3}-2p+\frac{7}{2}-4=0$ $\frac{1}{3}p=\frac{1}{2}$ $p=\frac{3}{2}$

$p\int_0^6 (x+7)(x-6)=-\frac{81}{2}$ $p\times\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-42x\right]_0^6=-\frac{81}{2}$

$p\times(72+18-252)=-\frac{81}{2}$ $p\times-162=-\frac{81}{2}$ $p=\frac{1}{4}$ $f(x)=\frac{1}{4}(x+7)(x-6)$ $f(-10)=\frac{1}{4}(-3)(-16)=12$

단답형

16. 방정식

$$\log_4(x+2)+\log_4 2=\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\log_4(2x+4)=\log_4(x^2-4x+4)$

$x^2=6x.$ $x=6$ $(x>2)$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-2x$이고 $f(1)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3-x^2+2$

$f(2)=16-4+2=14$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{7}(a_n-2)(b_n-2)=60, \quad \sum_{n=1}^{7}(a_n+b_n)=44$$

일 때, $\sum_{n=1}^{7}a_nb_n$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{n=1}^{7}a_nb_n - 2\sum_{n=1}^{7}(a_n+b_n) + \sum_{n=1}^{7}4 = 60$

$\sum_{n=1}^{7}a_nb_n = 60-28+88=120$

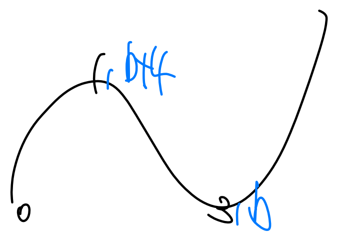
19. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-6x^2+ax+b$$

라 하자. 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖고, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 8이다. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=3x^2-12x+a$ $\quad 27-36+a=0 \quad a=9$

$f(x)=x(x-3)^2+b$



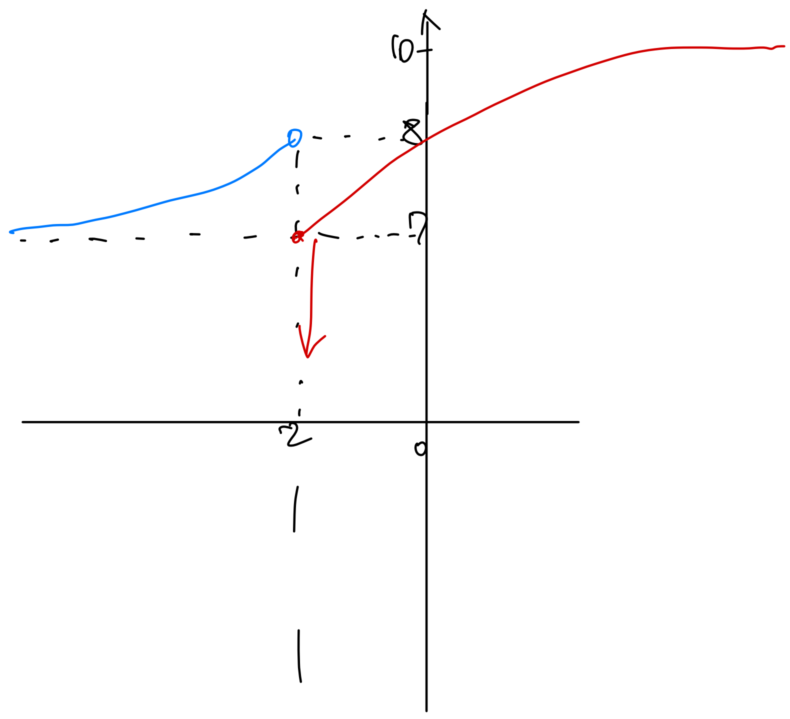
$2b+4=8 \quad b=2$

$a+b=9+2=11$

20. 상수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는 함수

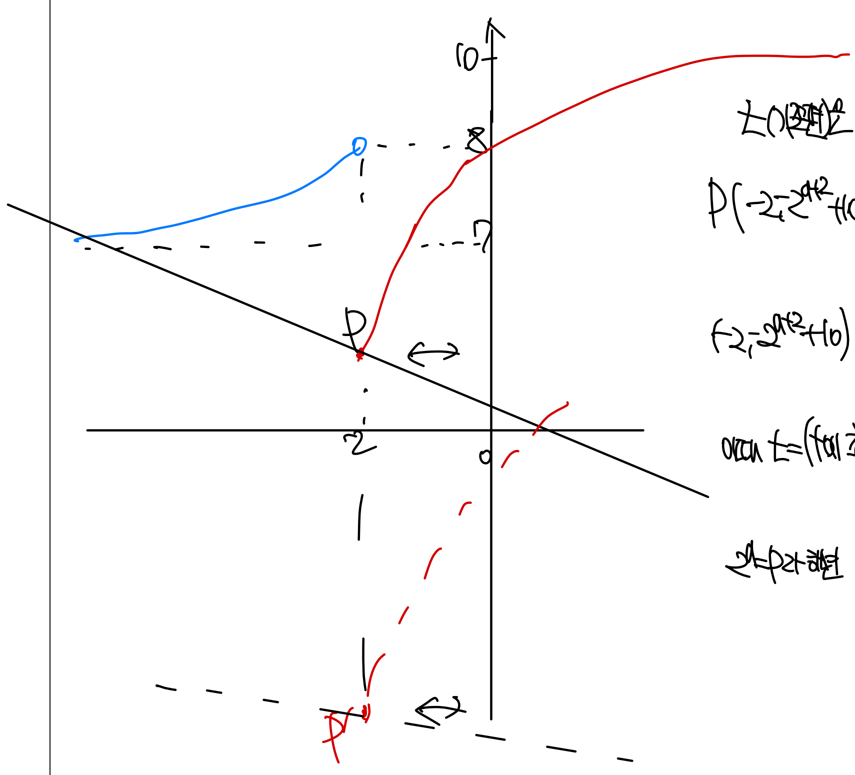
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+2}+7 & (x<-2) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+10 & (x\geq-2) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x+2^ay-t=0$이 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)=2$를 만족시키는 t의 최솟값이 함수 $f(x)$의 최솟값과 같도록 하는 모든 2^a의 값의 곱을 구하시오. [4점]



a 결정 → 최솟값 결정 (P 좌표) → 기울기도 결정

$x+2^ay-t=0$ $\quad$ t(절편)이 t고 기울기 $-\frac{1}{2^a}$인 직선 음수



t 이(최솟값)은

$P(-2, -2^{a+2}+10)$를 지날 때 최소

$(-2, -2^{a+2}+10)$ $\quad$ $-2+2^a(-2^{a+2}+10)=t$

이때 $t=(f$의 최솟값$)=-2^{a+2}+10$ 이므로

$2^a=p$라 하면 $\quad -2+p(-4p+10)=-4p+10$

$-2-4p^2+10p=-4p+10$

$4p^2-14p+12=0$

$2p^2-7p+6=0$

$2p \quad -3$

$p \quad -2$

$2^a=\frac{3}{2}$, $2^a=2$

$\frac{3}{2}\times2=3$

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $$\lim_{x\to k}\frac{2x^2 f(x)-(f(k))^2}{x-k}=\lim_{x\to k}\frac{(f(x))^2-(f(k))^2}{x-k}$$
> 을 만족시키는 실수 k는 t, $-t\,(t>1)$뿐이다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 17일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

① 극한존재 $2k^2 f(k)=\{f(k)\}^2$ $\cancel{f(k)=0}$ or $f(k)=2k^2$
(f 최소 17)

② 극한 값 $\underbrace{4kf(k)}_{8k^3}+2k^2f'(k)=\underbrace{2f(k)}_{4k^2}f'(k)$ $2k^2f'(k)=8k^3$ $f'(k)=4k$

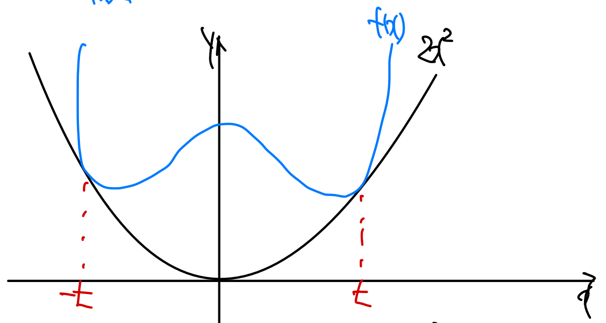
따라서 주어진 극한 조건을 만족시키는 실수가 $\pm t\,(t>1)$뿐이다

⇕

$f(k)=2k^2$, $f'(k)=4k$를 만족시키는 실수가 $\pm t\,(t>1)$뿐이다.

⇕

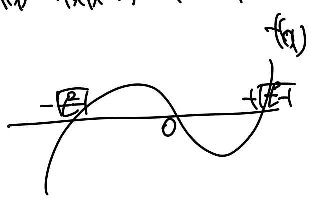
$f(x)$와 $2x^2$가 접하는 접점의 x좌표가 $\pm t\,(t>1)$뿐이다



$f(x)-2x^2=(x^2-t^2)^2$

$f(x)=(x^2-t^2)^2+2x^2$

$f'(x)=4x(x^2-t^2)+4x=4x(x^2-t^2+1)$



$x=\pm\sqrt{t^2-1}$일 때 최소
$(x^2-t^2=-1)$

$f(\pm\sqrt{t^2-1})=1+2t^2-2=17$ $t=3\ (t>0)$

$\Rightarrow f(x)=(x^2-9)^2+2x^2$

답 $f(4)=49+32=81$

22. 실수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}|a_n+n| & (a_n<0)\\ a_n-10+k & (a_n\geq 0)\end{cases}$$
> 이다.

$a_4\times a_5=0$이 되도록 하는 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Guide k의 최댓값과 최솟값을 묻고 있으므로
k를 변화시켜가면서 4항이나 5항이 0이 될 수 있는지를 관찰해봅시다.

Kmax : ① $k\geq 10$이면 a_n은 명백히 감소하지 않는 수열 (X)

② k가 10보다 조금 작으면

	1	2	3	4	5	
a_n	3	$k-7$	$2k-17$	$3k-27$	$4k-37$	⋯<0

이때 $a_4=0$이면 $k=9$, $a_5=0$이면 $k=\frac{37}{4}$ $\frac{37}{4}>9$이므로 Kmax: $\frac{37}{4}$

Kmin : ① 충분히 작은 k에 대하여

	1	2	3	4	5
a_n	3	$k-7$	$5-k$	-5	1

이므로 a_4나 a_5가 0일 수 없다.

이때 경곗값들을 살펴보면 $a_2\to a_3$ 사이 $a_2\leq 0$. $k\leq 7$
a_3의 절댓값 벗기는 과정에서 $k\leq 5$

② 따라서 5보다 조금 큰 실수 k에 대하여

	1	2	3	4	5
a_n	3	$k-7$	$k-5$	$2k-15$	$|2k-11|$

이므로 $k=\frac{11}{2}$일 때 $a_5=0$ Kmin$=\frac{11}{2}$

답 $k_{max}+k_{min}=\frac{37}{4}+\frac{11}{2}=\frac{59}{4}$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{e^x-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+k}$ 의 값은? [3점]

① $\ln\frac{3}{2}$ ② $\ln 2$ ③ $\ln\frac{5}{2}$ ④ $\ln 3$ ⑤ $\ln\frac{7}{2}$

$\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n}=dx$ $\frac{k}{n}=x$

$\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = [\ln(x+2)]_0^1 = \ln(\frac{3}{2})$

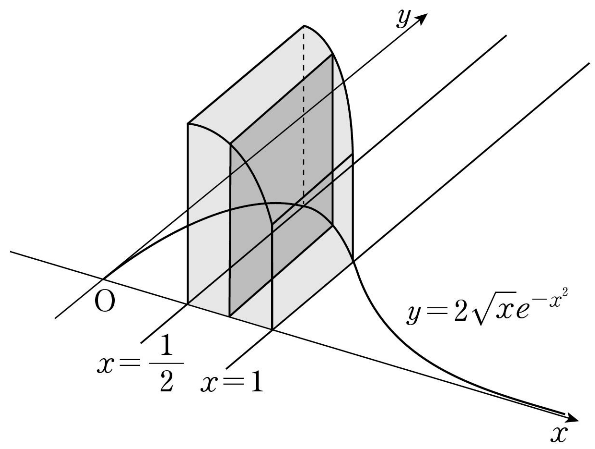
25. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n{}^2+2n}-a_n\right)=\frac{1}{3}$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{2n}{2a_n}=\frac{1}{3}$

$a_n=3n$

26. 그림과 같이 곡선 $y=2\sqrt{x}e^{-x^2}$과 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=1$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $e^{-1}-e^{-2}$ ② $e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$ ③ $e^{-\frac{1}{2}}-2e^{-2}$
④ $e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$ ⑤ $2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$

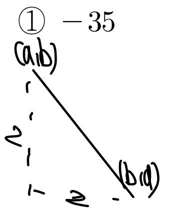
$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 4xe^{-2x^2} = \left[-e^{-2x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -e^{-2}+e^{-\frac{1}{2}}$

27. 세 실수 $k\,(k<-1)$, a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\,b)$, $\mathrm{B}(b,\,a)$가 곡선 $C : x^2-xy+y^2+k=0$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}, \quad \tan\theta=\frac{4}{3}$$

일 때, $k+a+b$의 값은? [3점]

① -35 ② -27 ③ -19 ④ -11 ⑤ -3



$b=a+2$

$C' : 2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$(-x+2y)\frac{dy}{dx} = y-2x$

A $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{-x+2y} = \frac{a+2-2a}{-a+2a+4} = \frac{-a+2}{a+4}$ p

B $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{-x+2y} = \frac{a-2a-4}{-a-2+2a} = \frac{-a-4}{a-2}$ $\frac{1}{p}$

역수관계

$\tan\theta = \frac{p-\frac{1}{p}}{2} = \frac{4}{3}$ $p-\frac{1}{p}=\frac{8}{3}$ $p=3$ or $-\frac{1}{3}$

$\frac{-a+2}{a+4}=3$ $-a+2=3a+12$ $4a=-10$ (X)

$\frac{-a+2}{a+4}=-\frac{1}{3}$ $3a-6=a+4$ $2a=10$ $a=5$, $b=7$

$25-35+49+k=0$

$k=-39$

28. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. 상수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_k^x f'(t)\ln f(t)\,dt$$

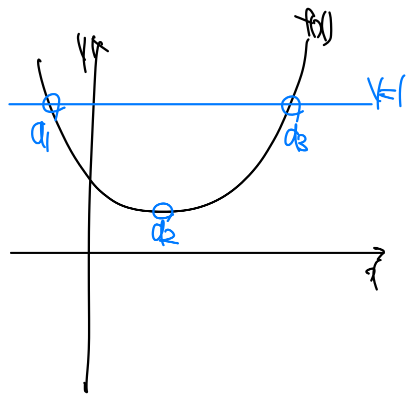
라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 a_1, a_2, a_3이다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a_2)$의 값은? [4점]

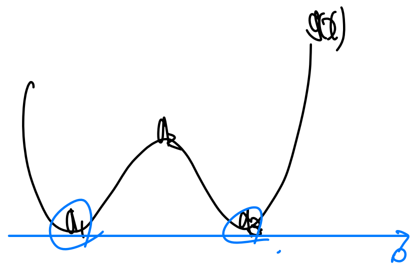
(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이다.

(나) $\displaystyle\int_{a_1}^{a_3}\big(g(x)+f(x)-f(x)\ln f(x)\big)\,dx=\frac{3}{2}$

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$g'(x)=f'(x)\ln f(x)$ 극대/극소이려면 $f(x)=0$ or $f(x)=1$



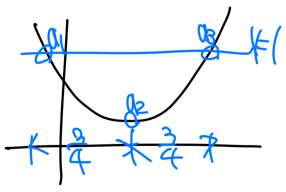


$g(k)=0$, $g(x)\ge 0$임을 고려하면 $k=a_1$ or a_3 $f(k)=1$

$g(x)=\int f'(x)\ln f(x) = f(x)\ln f(x) - \int \frac{f'(x)}{f(x)}\times f(x) = f(x)\ln f(x) - f(x) + C$

$g(k) = \cancel{f(k)\ln f(k)} - f(k) + C = 0$ $C=1$

$\int_{a_1}^{a_3} 1 = \frac{3}{2}$ $a_3-a_1=\frac{3}{2}$



$f(x)=(x-a_1)(x-a_1-\frac{3}{2})+1$ $f(a_2)=f(a_1+\frac{3}{4})=\frac{3}{4}\times -\frac{3}{4}+1=\frac{7}{16}$

단 답 형

29. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=5,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(100a_n-ma_{3n})$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 m의 최댓값을 구하시오. [4점]

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=5$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right)=2$

$|a_2+a_3|$

$-|a_4+a_5|$

$|a_6+a_7|$

r^2

$\frac{a(1+r)}{1-r}=5$

$\div$ $\frac{a|r+r^2|}{1-r^2}=2$

$\frac{1-r}{1+r}\times\frac{1+r^2}{|r+r^2|}=\frac{5}{2}$

$r>0$ $\frac{1+r^2}{(1+r)r}=\frac{5}{2}$ $2r^2+2=5r^2+5r$. $3r^2+5r-2=0$ (X)

$r<0$ $\frac{1+r^2}{(1+r)r}=\frac{5}{2}$ ... $2r^2+2=-5r^2-5r$ ... $7r^2+5r+2=0$ ... wait — $3r^2-5r-2=0$ ... $(3r+1)(r-2)$

$\boxed{r=-\frac{1}{3}\quad a=10}$

$\sum_{n=1}^{\infty}100a_n=\frac{100\times10}{\frac{4}{3}}=750$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}=\frac{\frac{10}{9}}{\frac{28}{27}}=\frac{15}{14}$

$750-\frac{15}{14}m$이 자연수인 m(자연수)의 최댓값

$\Rightarrow m=14k$꼴 $\Rightarrow 750-15k$가 자연수인 k의 최대
(k는 자연수) $k=49$

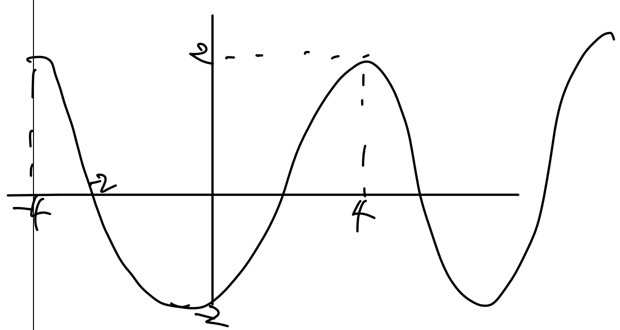
$m=14\times49=686$

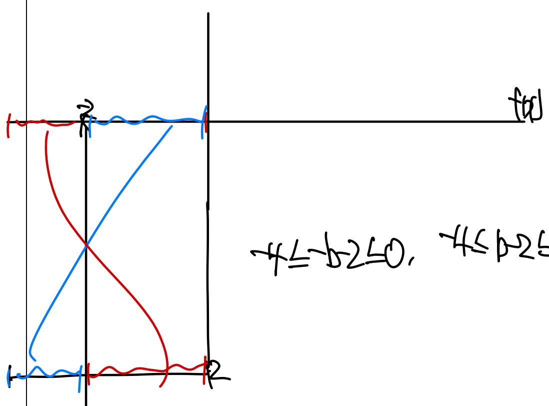
30. 함수 $f(x)=ax^3-2ax^2+bx-b-2$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 $a\,(a\neq0)$, b에 대하여 $h'(-\sqrt{2})$의 최댓값이 $\frac{k}{\pi}$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

> 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
>
> $$g(x)=\begin{cases} f(x)+2 & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{4}f(x)\right) & (0\le x\le 2)\end{cases}$$
>
> 는 역함수 $h(x)$를 갖는다.

역함수를 가질 조건: 일대일대응 이므로 구간별 정의된 함수 $g(x)$가 한 y에 대하여 서로 겹치지 않아야 한다.

이때 $f(x)=ax^2(x-2)+b(x-1)-2$ $f(0)=-b-2$ $f(2)=b-2$





$-4\le-b-2\le0$, $-4\le b-2\le0$ 이므로 $-2\le b\le2$

$b=0$이면

$g(x)$가 -2로 고정

⇓

역함수X

$b=\pm1$이면

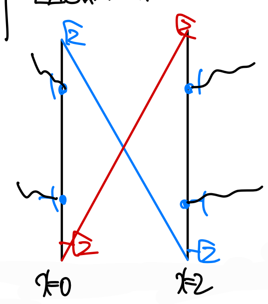
$0\le x\le2$에서

$-3\le f(x)\le-1$

⇓

$-\sqrt{2}\le g(x)\le\sqrt{2}$

전체 $g(x)$에 대하여



이므로 무조건 역함수X

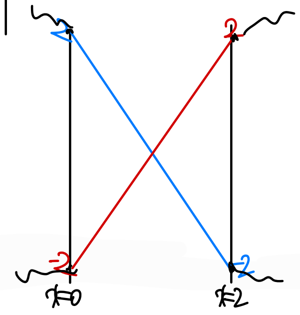
$b=\pm2$이면

$0\le x\le2$에서

$-4\le f(x)\le0$

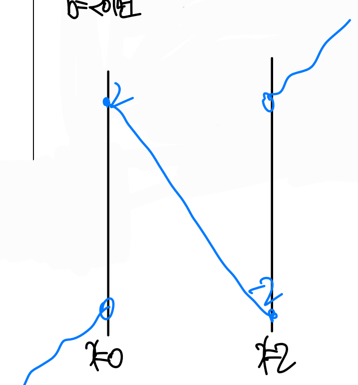
$-2\le g(x)\le2$

$g(x)$에 대하여



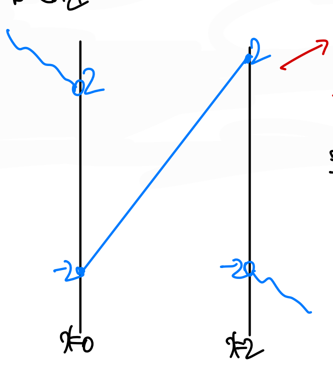
이므로 역함수를 가질 수 있다.

$b=2$이면



감소함수의 역함수는 감소함수이므로 $h'(-\sqrt{2})<0$

$b=-2$이면



실수 전체에서 이 그림을 연속시키려면

$f'(x)\le0$이면 된다.

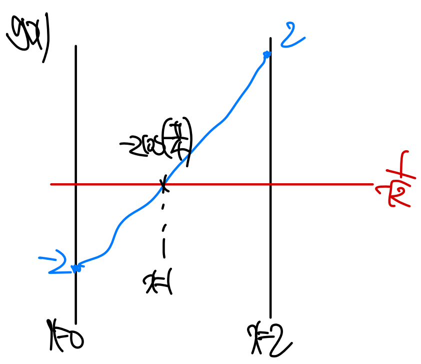
$3ax^2-4ax-2\le0$ $\begin{cases} a<0 \\ \frac{D}{4}\ \ 4a^2+6a\le0 \end{cases}$

$-\frac{3}{2}\le a<0$ 정수 a는 -1로 유일

증가함수의 역함수는 증가함수이므로 $h'(-\sqrt{2})>0$, 찾는 case!

$b=-2$ $a=-1$

$f(x)=-x^3+2x^2-2x$ $g(x)=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}(-x^3+2x^2-2x)\right)$ $(0\le x\le2)$



$g'(1)=\left|\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}(-x^3+2x^2-2x)\right)\times(-3x^2+4x-2)\right|_{x=1}$

$=\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times-1=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ $h'(-\sqrt{2})=\frac{1}{g'(1)}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ $k^2=8$