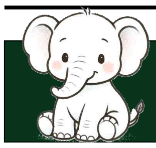
수학 영역(공동) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 24 김진)

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}(2^{1-\sqrt{2}})^2 \times 4^{1+\sqrt{2}} &= 2^{2-2\sqrt{2}} \times (2^2)^{1+\sqrt{2}} \\ &= 2^{2-2\sqrt{2}} \times 2^{2+2\sqrt{2}} \\ &= 2^{2-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}} \\ &= 2^4 \\ &= 16\end{aligned}$$

2) [정답] ① (출제자 : 25 김서연)

[출제의도] 미분계수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = 2x - 4$ 에서

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} \times 2 = 2f'(3)$$

$f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$

이므로

$2f'(3) = 4$

3) [정답] ① (출제자 : 24 김진영)

[출제의도] 시그마의 정의를 이용하여 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k) = 96 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k + 2) = 20,$$

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) = 0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡을 하면

$\sum_{k=1}^{10} (4b_k) = 96$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 24$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10} b_k = 24$ 를 ㉡에 대입하면

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 12$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 12 + 24 = 36$$

4) [정답] ③ (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 연속이면

실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$$

가 성립해야 한다. 이때,

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-2x^2 + a) = -8 + a$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (3x - a) = 6 - a$$

$f(2) = 6 - a$

이므로

$-8 + a = 6 - a$

따라서 $a = 7$

5) [정답] ② (출제자 : 23 이나경)

[출제의도] 구간에 미지수가 있는 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} (3x^2 + 2x)\,dx &= 2\int_0^a 3x^2\,dx \\ &= 2\left[x^3\right]_0^a \\ &= 2a^3 \\ &= 16\end{aligned}$$

$a^3 = 8$ 에서 a 가 실수이므로

$a = 2$

$$\begin{aligned}5\int_{-a}^{a} (x^4 + 2x^3)\,dx &= 5\int_{-2}^{2} (x^4 + 2x^3)\,dx \\ &= 2\int_0^2 5x^4\,dx \\ &= 2\left[x^5\right]_0^2 \\ &= 2 \times 2^5 \\ &= 64\end{aligned}$$

6) [정답] ④ (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 삼각함수의 성질과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$, $\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$,

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta\times\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=-\cos\theta$$

따라서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 인 θ 에 대해서 $0<\sin\theta<1$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

7) [정답] ① (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-p)$ 에서

$f'(x)=(x-2)(x-p)+(x-1)(x-p)+(x-1)(x-2)$

점 $(1,0)$ 에서의 접선의 y 절편은 $(1-p)$ 이고

점 $(p,0)$ 에서의 접선의 y 절편은 $-p(p-1)(p-2)$ 이다.

두 y 절편이 같으므로 $(1-p)=-p(p-1)(p-2)$

$p\neq 1$ 이므로

$1=p(p-2)$

$p^2-2p-1=0$

이 방정식의 판별식을 D 라 하면

$D>0$ 이므로

근과 계수의 관계를 이용하면

모든 실수 p 의 값의 합은 2

8) [정답] ① (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 미지수를 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=\log_a(x+2)$ 의 역함수는

$x=\log_a(y+2)$, $y=a^x-2$

$f^{-1}(x)=a^x-2$

상수 k 에 대해

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2$ 가 만나는 점을 $\mathrm{A}(k,2)$ 라 하면,

$\log_a(k+2)=2$, $k=a^2-2$

따라서

$\mathrm{A}(a^2-2,2)$

상수 n 에 대해

곡선 $y=f^{-1}(x)$ 와 y 축이 만나는 점을 $\mathrm{B}(0,n)$ 이라 하면,

$f^{-1}(x)=a^x-2$

$f^{-1}(0)=-1$, $n=-1$

따라서

$\mathrm{B}(0,-1)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\sqrt{(a^2-2)^2+(2-(-1))^2}\\&=\sqrt{(a^4-4a^2+13)}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

$a^4-4a^2+13=10$, $a^4-4a^2+3=0$

$a^2=1$, $a^2=3$

$a>1$ 이므로 $a=\sqrt{3}$

9) [정답] ② (출제자 : 24 김시현)

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x+6$ 의 교점의 x 좌표를 구해보면

$f(x)=x+6$

$\frac{1}{2}x^2+2=x+6$

$\frac{1}{2}x^2-x-4=0$

$\frac{1}{2}(x-4)(x+2)=0$

이므로

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=5x+13$ 의 교점의 x 좌표는

$x=-2$, $x=4$

따라서

$$\begin{aligned}A&=\int_{-4}^{-2}\{f(x)-(x+6)\}dx\\&=\int_{-4}^{-2}\left(\frac{1}{2}x^2-x-4\right)dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\int_{-2}^{4}\{(x+6)-f(x)\}dx\\&=\int_{-2}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B-A&=\int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)dx-\int_{-2}^{-4}\left(\frac{1}{2}x^2-x-4\right)dx\\&=\int_{-2}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)dx+\int_{-2}^{-4}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)dx\\&=\int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)dx\end{aligned}$$

정적분의 성질에 의해

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+4\right)dx &= \int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+4\right)dx \\ &= 2\int_{0}^{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+4\right)dx \\ &= 2\left[-\frac{1}{6}x^3+4x\right]_0^4 \\ &= -\frac{64}{3}+32 \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

따라서

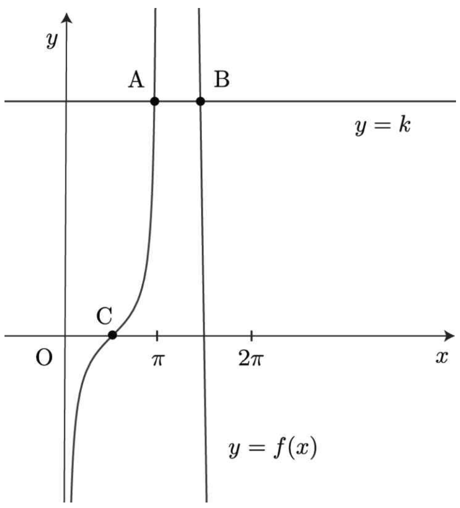
$B-A=\frac{32}{3}$

10) [정답] ③ (출제자 : 24 장경정)

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 평행사변형이 존재하고 평행사변형의 넓이 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$를 나타내면 아래와 같다.



선분 AB와 선분 OC가 평행하므로

사각형 AOCB가 평행사변형이 되기 위해서는

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OC}}$ 여야 한다.

따라서 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\pi}{2}$ 이다.

점 A의 x좌표를 $t\left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)$라 하면

$\mathrm{A}(t,\, k)$이고 $\mathrm{B}\left(t+\frac{\pi}{2},\, k\right)$이다.

이때 점 A는 곡선 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 위의 점이므로

$\tan\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=k$ …… ㉠

또한 점 B는 곡선 $y=a\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 위의 점이므로

$a\tan t=k$ …… ㉡

한편 사각형 AOCB의 넓이가 4π이므로

$\overline{\mathrm{OC}}\times k=\frac{\pi}{2}\times k=4\pi$

$k=8$이다.

㉠에서

$\tan\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan t}$

이므로

$k=-\frac{1}{\tan t}$

따라서 ㉡에 의해

$a\tan t=-\frac{1}{\tan t}$ …… ㉢

이때

$k=a\tan t=8$

이므로

$8=-\frac{1}{\tan t}$

$\tan t=-\frac{1}{8}$

이를 ㉢에 대입하면

$a=-64$

$a+k=(-64)+8=-56$

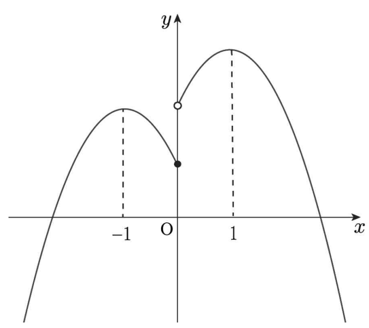
11) [정답] ③ (출제자 : 24 이학송)

[출제의도] 극댓값과 극솟값의 정의를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

[해설]

ㄱ.

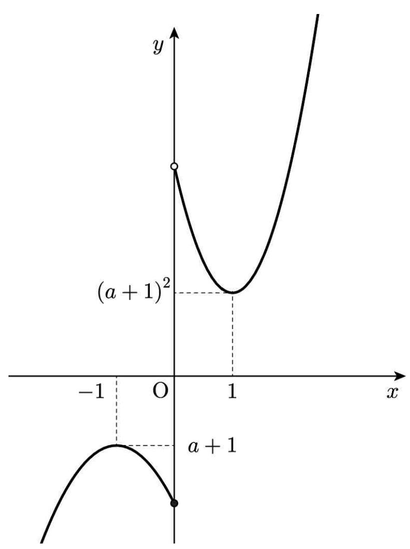
$a=1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



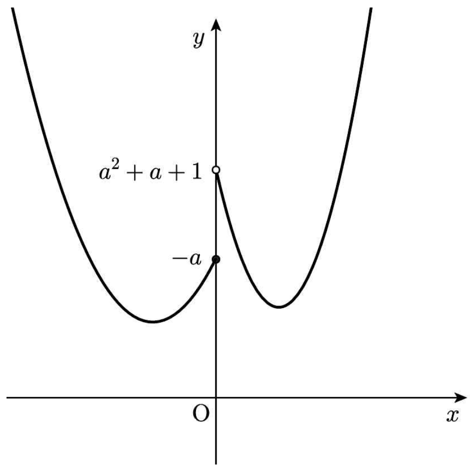
함수 $g(x)$는 $x=-1,\,0,\,1$에서 극값을 가지므로 함수 $g(x)$의 극점의 개수는 3이다. <참>

ㄴ.

$a<-1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같고,



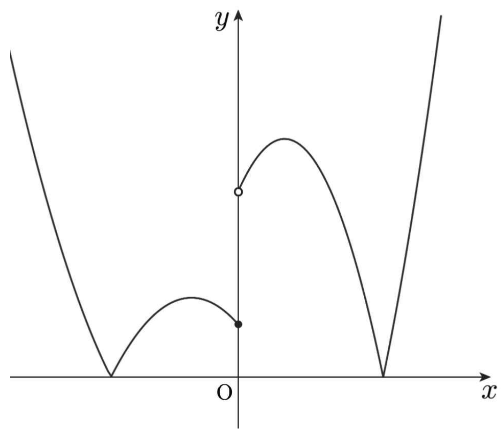
$a < -1$일 때, 함수 $y = |g(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$a^2+a+1-(-a) = (a+1)^2 > 0$ 이므로
$a^2+a+1 > -a$

따라서 $a < -1$이면 함수 $g(x)$는 $x = -1, 1$에서 극값을 가지므로
함수 $|g(x)|$의 극점의 개수는 2이다. <참>

ㄷ.
$a > 0$일 때, 함수 $y = |g(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$a > 0$일 때, 함수 $|g(x)|$의 극점의 개수는 5이다.
그러므로 함수 $|g(x)|$의 극점의 개수의 최댓값은 4라는 명제는 거짓이다.
<거짓>

12) [정답] ② (출제자 : 25 하효진)

[출제의도] 등차수열에서 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
조건 (가)에서
$a_n < 0$이면 $|a_n| - a_n = -2a_n$이고
$a_n \geq 0$이면 $|a_n| - a_n = 0$이다.

(i) $d \geq 0$인 경우
수열 $\{a_n\}$이 공차가 양수인 등차수열이므로
어떤 자연수 p에 대하여 $a_p < 0$, $a_{p+1} \geq 0$이면
$n \leq p$일 때, $a_n < 0$이므로
$\sum_{k=1}^{p}(|a_k| - a_k) = -2a_1 - 2a_2 - \cdots - 2a_p$이고,
$n \geq p+1$일 때, $a_n \geq 0$이므로
$\sum_{k=p+1}^{n}(|a_k| - a_k) = 0$이다.

조건 (가)에 의하여
$\sum_{k=1}^{n}(|a_k| - a_k) \neq 40$을 만족시키는 자연수 n은 3개뿐이므로
$n = 1, 2, 3$일 때 $\sum_{k=1}^{n}(|a_k| - a_k) \neq 40$을 만족시킨다.
따라서 $a < 0$, $d > 0$이고, $\sum_{k=1}^{4}(|a_k| - a_k) = 40$이다.

(ii) $d < 0$인 경우
수열 $\{a_n\}$이 공차가 음수인 등차수열이므로
어떤 자연수 p에 대하여 $a_p > 0$, $a_{p+1} \leq 0$이면
$n \leq p$일 때, $a_n > 0$이므로
$\sum_{k=1}^{p}(|a_k| - a_k) = 0$이고
$n \geq p+1$일 때, $a_n \leq 0$이므로
$\sum_{k=1}^{n}(|a_k| - a_k) \neq 40$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 무수히 많다.
즉, 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 모순이다.

(iii) $d = 0$인 경우
수열 $\{a_n\}$이 공차가 0인 등차수열이므로
모든 자연수 n에 대하여
$\sum_{k=1}^{n}(|a_k| - a_k) = 0$이다.
즉, 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 모순이다.

조건 (나)에서
$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m+1}|a_k| - 40$
$40 - |a_{m+1}| = \sum_{k=1}^{m}(|a_k| - a_k)$
(별해 참고)
(i) $m < 4$인 경우
$40 - |a_{m+1}| = \sum_{k=1}^{m}(|a_k| - a_k)$
$40 = \sum_{k=1}^{m}(|a_k| - a_k) + |a_{m+1}|$
$= -2\sum_{k=1}^{m} a_k - a_{m+1} < -2\sum_{k=1}^{m+1} a_k \leq 40$
따라서 모순이다.

(ii) $m = 4$인 경우
$40 - |a_5| = \sum_{k=1}^{4}(|a_k| - a_k) = 40$
$a_5 = 0$

(iii) $m > 4$인 경우
$40 - |a_{m+1}| = \sum_{k=1}^{4}(|a_k| - a_k) + \sum_{k=5}^{m}(|a_k| - a_k)$
$= \sum_{k=1}^{4}(|a_k| - a_k) = 40$

$a_{m+1}=0$
$d>0$, $a_6>0$ 이므로 모순이다.

따라서
$m=4$
$m+1=5$

$a_1+a_2+a_3+a_4=-20$
$a_5=0$
$4a+6d=-20$
$a+4d=0$
$d=2$
$a=-8$
$m+a_7=4+a_5+2d$
$\quad\quad=4+4=8$

[별해]
$40-|a_{m+1}|=\sum_{k=1}^{m}(|a_k|-a_k)$ 에서
$\sum_{k=1}^{4}(|a_k|-a_k)=40$ 임을 활용하여 $|a_{m+1}|$ 의 값을 구할 수 있도록 $m=4$ 일 때를 기준으로 m 의 범위를 나누어 풀이를 진행한다.

13) [정답] ⑤ (출제자 : 25 이소은)
[출제의도] 정적분과 절댓값이 포함된 함수의 미분가능성을 이해하고 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
$j(x)=\int_1^x(|f(t)|-2)\,dt\times g(x)$ 라 하자.

그러면

$$h(x)=\begin{cases}-j(x) & (j(x)<0)\\ j(x) & (j(x)\ge 0)\end{cases}$$

이므로

$$h'(x)=\begin{cases}-j'(x) & (j(x)<0)\\ j'(x) & (j(x)\ge 0)\end{cases}$$

따라서 함수 $h(x)=|j(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $j(a)=0$ 인 모든 실수 a 에 대하여 $j'(a)=0$ 이어야 한다.

$j(1)=0$ 이므로 $j'(1)=0$ 이다.
$j'(x)=\int_1^x(|f(t)|-2)\,dt\times g'(x)+(|f(x)|-2)\times g(x)$
$j'(1)=(|f(1)|-2)\times g(1)=0$
즉, $|f(1)|=2$ 또는 $g(1)=0$

$g(1)=0$ 인 경우 $g(1)<0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.
따라서, $f(1)=2$ 또는 $f(1)=-2$

(i) $f(1)=2+a=2$, $a=0$ 인 경우
$f(x)=2x^2$
모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\ge 0$ 이므로

$$h(x)=\left|\int_1^x(2t^2-2)\,dt\times g(x)\right|$$
$$=\left|\frac{2}{3}(x-1)^2(x+2)g(x)\right|$$

이때, 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$g(x)=(x-1)(x+2)$ 또는 $g(x)=(x+2)^2$
두 경우 모두 $g(1)\ge 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=2+a=-2$, $a=-4$
$f(x)=2x^2-4x$
$h(x)=\left|\int_1^x(|2t^2-4t|-2)\,dt\times g(x)\right|$
$F(x)=\int_1^x(|2t^2-4t|-2)\,dt$ 라 하면
$0\le x<2$ 일 때 $f(x)\le 0$, $F(1)=0$ 이므로
$F(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^3$
$x<0$ 일 때 $f(x)\ge 0$ 이므로

$$F(x)=\int_1^0(-2t^2+4t-2)\,dt+\int_0^x(2t^2-4t-2)\,dt$$
$$=\frac{2}{3}x^3-2x^2-2x+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}(x+1)(x^2-4x+1)$$
$$=\frac{2}{3}(x+1)(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))$$

즉, $x<0$ 일 때 $F(-1)=0$ 이므로
$g(-1)=0$
$x\ge 2$ 일 때 $f(x)\ge 0$ 이므로

$$F(x)=\int_1^2(-2t^2+4t-2)\,dt+\int_2^x(2t^2-4t-2)\,dt$$
$$=\frac{2}{3}x^3-2x^2-2x+6$$
$$=\frac{2}{3}(x-3)(x^2-3)$$
$$=\frac{2}{3}(x-3)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

즉, $x\ge 2$ 일 때 $F(3)=0$ 이므로
$g(3)=0$

따라서
$g(x)=(x+1)(x-3)$, $g(1)<0$ 로 조건을 만족시킨다.
그러므로
$a+g(7)=-4+32=28$

[별해]
$x<0$ 일 때 $F(-1)=0$ 이므로 $g(-1)=0$
$f(x)$ 가 $x=1$ 에 대해 대칭이고, $F(1)=0$ 이므로
함수 $F(x)$ 는 점 $(1,0)$ 에 대하여 대칭이다.
즉, $F(3)=0$ 이므로
$g(3)=0$
따라서
$g(x)=(x+1)(x-3)$

14) [정답] ⑤ (출제자 : 24 권서현)
[출제의도] 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]
삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여
$\overline{AC} \times \sin C = \overline{AB} \times \sin B$ 이므로
$\overline{AB} \times \sin B = 3\tan B$
$\overline{AB} \times \cos B = \boxed{3}$
코사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{BC}} = \boxed{3}$
이때, $\overline{BC} = 6$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{AC}$
$\angle B = \angle C = \angle CED$ 이므로 사각형 ABDE 는 원에 내접한다.
$\overline{AB} = k$, $\angle B = \theta$ 라 할 때. $\overline{BD} = \dfrac{\overline{AB}}{\cos\theta} = \dfrac{k^2}{\boxed{3}}$
또, 삼각형 ABC 와 삼각형 DCE 가 서로 닮음이므로
$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{BC} : \overline{CE}$ 이고, $\overline{CD} = 6 - \dfrac{k^2}{3}$ 이므로
$k : 6 - \dfrac{k^2}{3} = 6 : \overline{CE}$
$\overline{CE} = \dfrac{\boxed{36} - 2k^2}{k}$
$\overline{AE} = k - \dfrac{\boxed{36} - 2k^2}{k}$ 이므로 삼각형 ADE 에서 사인법칙에 의하여
$\overline{BD} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle ADE}$
$\dfrac{k^2}{3} \times \dfrac{9}{16} = k - \dfrac{36 - 2k^2}{k}$
$k^3 - 16k^2 + 192 = 0$
$(k-4)(k^2 - 12k - 48) = 0$
$k = 4$, $k = 6 + 2\sqrt{21}$, $k = 6 - 2\sqrt{21}$
$k = 6 - 2\sqrt{21}$ 일 때 $6 - 2\sqrt{21} < 0$ 이므로 모순
$k = 6 + 2\sqrt{21}$ 일 때 $\overline{AB} > \overline{BC}$, $\cos(\angle A) > 0$, $\angle A < \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 모순
따라서 가능한 k 의 값은 4 뿐이다.
따라서 $k = \boxed{4}$ 이므로 삼각형 ABC 의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \boxed{3\sqrt{7}}$ 이다.

따라서 $p = 3$, $q = 36$, $r = 4$, $s = 3\sqrt{7}$ 이므로
$p + q + r + s = 43 + 3\sqrt{7}$

15) [정답] ③ (출제자 : 25 심준현)
[출제의도] 미분을 이용하여 상수와 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
함수 $g(x)$ 는 $x \neq 2$, $x \neq 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여
함수 $g(x)$ 는 미분 가능하고 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 에서 $g'(x) = f'(x)$,
$2 < x < 3$ 에서 $g'(x) = mf'(x)$ 이다.……㉠

조건 (가)에서 양의 실수 k 에 대하여
$\lim\limits_{s \to 0+} \dfrac{g(k+s) - g(k)}{s}$ 의 값이 존재하고,

$k = 3$ 일 때
$\lim\limits_{s \to 0+} \dfrac{g(k+s) - g(k)}{s} = \lim\limits_{s \to 0+} \dfrac{f(s+h) - mf(k)}{s}$ 의 값이 존재하므로
$\lim\limits_{s \to 0+} f(3+s) = mf(3)$
$f(3) = 0$

모든 양의 실수 k 에 대하여
$\lim\limits_{s \to 0+} \dfrac{g(k+s) - g(k)}{s}$
의 값이 0 이상이므로
$f'(0) \geq 0$ 이고,
$f'(\alpha) = 0$ 을 만족하는 $\alpha \leq 0$ 인 α 가 존재한다.

$0 \leq m < 1$ 일 때
$f'(\alpha) = f'(a) = f'(b) = 0$ $(\alpha < a < b)$인 경우,
열린구간 (a, b) 에서 $f'(x) < 0$ 이므로
$f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 오직 하나의 극값을 갖는다.
이때,
$\lim\limits_{t \to f(\alpha)+} h(t) \neq \lim\limits_{t \to f(\alpha)-} h(t)$ 이고,

$m \neq 1$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이고,
$\lim\limits_{t \to f(2-)+} h(t) \neq \lim\limits_{t \to f(2-)-} h(t)$,
$\lim\limits_{t \to f(2+)+} h(t) \neq \lim\limits_{t \to f(2+)-} h(t)$ 이다.

이때, 함수 $h(t)$ 가 불연속인 a 의 개수가 3 이므로 조건 (나)에 의해 모순이다.

따라서 $m < 0$ 이고,
함수 $f(x)$ 는
$0 \leq x < 2$ 또는 $x > 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$
$2 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) \leq 0$
을 만족시킨다.

$\lim\limits_{x \to 2-} f'(x) \geq 0$,
$\lim\limits_{x \to 2+} f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로
$f'(2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 3-} f'(x) \leq 0$,
$\lim\limits_{x \to 3+} f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로
$f'(3) = 0$

따라서 $f'(x) = 4(x-\alpha)(x-2)(x-3)$,

이때, 조건 (가)에 의해 $f'(0) \geq 0$ 이고,

$f'(0) \leq 0$ 이므로 $\alpha = 0$ 이다.

따라서 $f'(x) = 4x(x-2)(x-3)$, $f(3) = 0$
이므로
$f(x) = x^4 - \dfrac{20}{3}x^3 + 12x^2 - 9$

이때, 조건 (나)를 만족시키기 위해서 $f(0)=mf(2)$ 이어야 한다.
$f(0)=mf(2)$ 를 만족하는 m 의 값은 $-\frac{27}{5}$ 이고,
$f(0)-m=-\frac{18}{5}$

16) [정답] 4 (출제자 : 24 김시현)
[출제의도] 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]
로그의 진수의 조건에 의하여
$x+2>0$, $6-x>0$
즉, $-2<x<6$ …… ㉠

$-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)=\log_2(x+2)$
이므로
$-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-1\le \log_4(6-x)$
에서
$\log_2(x+2)-1\le \log_4(6-x)$
$\log_2(x+2)\le \log_4(6-x)+1$
$\log_4(x+2)^2\le \log_4(24-4x)$

$(x+2)^2\le 24-4x$
$x^2+8x-20\le 0$
$(x+10)(x-2)\le 0$
$-10\le x\le 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-2<x\le 2$
따라서, 정수 x 는 -1, 0, 1, 2 로
그 개수는 4 이다.

17) [정답] 10 (출제자 : 25 이성연)
[출제의도] 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]
$f'(x)=4x^3-6x+1$ 이므로
$f(x)=\int(4x^3-6x+1)dx$
$=x^4-3x^2+x+C$ (C 는 적분상수)
$f(1)=3$, 즉 $C=4$

따라서
$f(x)=x^4-3x^2+x+4$
이므로
$f(2)=(2)^4-3\times(2)^2+2+4$
$=10$

18) [정답] 12 (출제자 : 25 김근원)
[출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]
$\sqrt{a_p a_{q+1}}=a_{p+1}$
$a_p a_{q+1}=(a_{p+1})^2$ ……㉠
수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로 등비중항의 성질에 의해
$a_p a_{p+2}=(a_{p+1})^2$ ……㉡

㉠과 ㉡에서
$a_p a_{q+1}=a_p a_{p+2}$

수열 $\{a_n\}$ 은
첫째항이 0 이 아니고 공비가 2 인 등비수열이므로
$a_p\ne 0$
$a_{q+1}=a_{p+2}$
$q+1=p+2$
$q=p+1$ ……㉢

$(a_p)^q=(a_q)^p$ 은 ㉢에서
$(a_p)^{p+1}=(a_{p+1})^p$
$\{a_n\}$ 은 공비가 2 인 등비수열이므로
$a_p=2^p$

따라서 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=2^n$ 이다.
$\frac{a_{2q}}{a_{2p}}=\frac{a_{2p+2}}{a_{2p}}=4$, $a_3=8$ 이므로 $\frac{a_{2q}}{a_{2p}}+a_3=12$

19) [정답] 22 (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

[해설]

$t=\frac{2}{3}$ 에서 $t=\frac{8}{3}$ 과 $t=\frac{10}{3}$ 에서 $t=\frac{16}{3}$ 까지의 구간의 길이는 모두 2 이다.

같은 길이의 두 구간의 위치의 변화량이 같으려면 함수 $y=v(t)$ 가 $t=\frac{8}{3}$ 과 $t=\frac{10}{3}$ 의 평균인 $t=3$ 을 대칭축으로 하는 이차함수이어야 한다.

이차함수 $v(t)=3t^2-kt+24$ 의 그래프의 대칭축은

$t=\frac{k}{6}=3$, $k=18$ 이다.

$$v(t)=3t^2-18t+24$$
$$=3(t-2)(t-4)$$

$t=3$ 에서 $t=6$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_3^6 |v(t)|\,dt=\int_3^6 \left|3t^2-18t+24\right|dt$$
$$=\int_3^4 (-3t^2+18t-24)\,dt+\int_4^6 (3t^2-18t+24)\,dt$$
$$=2+20$$
$$=22$$

[별해]

서로 다른 실수 a,b $(a,b\ge 0)$ 와 실수 m $(m>0)$ 에 대하여

서로 다른 두 구간 $(a+m\ne b)$ 에서

시각 $t=a$ 에서 $t=a+m$ 까지 점 P 의 위치의 변화량과

$t=b-m$ 에서 $t=b$ 까지 점 P 의 위치의 변화량이 같을 때,

$$\int_a^{a+m}(3t^2-kt+24)\,dt=\int_{b-m}^{b}(3t^2-kt+24)\,dt$$
$$m^3+3am^2+3a^2m-kam-\frac{k}{2}m^2+24m$$
$$=m^3-3bm^2+3a^2m-kbm+\frac{k}{2}m^2+24m$$
$$3(a+b)m^2+3(a^2-b^2)m=k(a-b)m+km^2$$
$$3(a+b)(m+a-b)=k(a-b+m)$$
$$3(a+b)=k$$

따라서

$$\frac{a+b}{2}=\frac{k}{6}$$

20) [정답] 206 (출제자 : 24 우효정)

[출제의도] 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\frac{1}{k} & (a_n\ge 0) \\ -ka_n & (a_n<0)\end{cases}$$

에서 $a_1=3$ 이므로

$a_2=3-\frac{1}{k}$, $a_3=3-\frac{2}{k}$, $\cdots$

수열 $\{a_n\}$ 이 처음으로 0 이 되는 항은

$a_{3k+1}=3-\frac{1}{k}\times 3k=0$ 이므로

$1\le n\le 3k+1$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n=3-\frac{1}{k}(n-1)$ 이다.

$a_{3k+1}=0$ 이므로

$a_{3k+2}=-\frac{1}{k}$, $a_{3k+3}=1$, $a_{3k+4}=1-\frac{1}{k}$, $\cdots$

그런데 수열 $\{a_n\}$ 이 처음으로 1 이 되는 항은

$a_{2k+1}=3-\frac{1}{k}\times 2k=1$

이므로

$a_{2k+1}=a_{3k+3}$ 이다.

따라서 $n\ge 2k+1$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n=a_{n+k+2}$ 가 성립한다. …… ㉠

$\sum_{n=1}^{7m+4}a_n=pm+q$ 에서

$m=r$ 을 대입하면 (단, r 은 자연수)

$\sum_{n=1}^{7r+4}a_n=pr+q$ …… ㉡

$m=r+1$ 을 대입하면

$\sum_{n=1}^{7r+11}a_n=p(r+1)+q$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면

$\sum_{n=7r+5}^{7r+11}a_n=p$

이므로

$\sum_{n=7r+5}^{7r+11}a_n=\sum_{n=12}^{18}a_n=\sum_{n=19}^{25}a_n=\cdots=p$

따라서

$n\ge 12$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n=a_{n+7}$ 이 성립한다. …… ㉣

㉠과 ㉣에 의해

$k+2=7$

$k=5$

그러므로

$1\le n\le 16$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n=3-\frac{1}{5}(n-1)=-\frac{1}{5}n+\frac{16}{5}$ 이다.

따라서 $a_{16}=0$ 이고

$a_{17}=-\frac{1}{5}$, $a_{18}=1$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{11}a_n=p+q$$
$$=\sum_{n=1}^{11}\left(-\frac{1}{5}n+\frac{16}{5}\right)$$
$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{11}n+11\times\frac{16}{5}$$
$$=22$$

$\sum_{n=1}^{18} a_n = 2p+q$

$= \sum_{n=1}^{16}\left(-\frac{1}{5}n+\frac{16}{5}\right)+a_{17}+a_{18}$

$= -\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{16} n + 16 \times \frac{16}{5} - \frac{1}{5} + 1$

$= \frac{124}{5}$

따라서

$p+q=22$, $2p+q=\frac{124}{5}$

이므로

$p=\frac{14}{5}$, $q=\frac{96}{5}$

$5\times(p+2q) = 5\times\left(\frac{14}{5}+\frac{192}{5}\right) = 206$

21) [정답] 96 (출제자 : 24 김진영)

[출제의도] 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 미정계수를 구할 수 있는가?

[해설]

(i) $\{g(t)\}^2 - \{g(-t)\}^2 \neq 0$

모든 양의 실수 t에 대하여

$\{g(t)\}^2 - \{g(-t)\}^2 = \{g(t)-g(-t)\}\{g(t)+g(-t)\}$ 이고,

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p $(p \neq 0)$라 하면

모든 양의 실수 t에 대하여

$\{g(t)-g(-t)\} = \{3(t^2-2a)f(t)\} - \{-3(-t+a)^2f(-t)\}$

이므로 $g(t)-g(-t)$가 최고차항 계수가 $6p$인 사차함수이고,

$\{g(t)+g(-t)\} = \{3(t^2-2a)f(t)\} + \{-3(-t+a)^2f(-t)\}$

이므로 $g(t)+g(-t)$가 양의 실수 t에 대하여 다항식이다.

따라서 모든 양의 실수 t에 대하여

$\{g(t)\}^2 - \{g(-t)\}^2 \neq 0$이면 사차 이상인 다항식이므로

모든 양의 실수 t에 대하여

$\lim_{x\to t}\frac{x(x-a)+\{g(t)\}^2-\{g(-t)\}^2}{f(x)} = g(1)$일 수 없다.

<반례>

$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-a)+\{g(t)\}^2-\{g(-t)\}^2}{f(x)} = \infty$

따라서

$\{g(t)\}^2 - \{g(-t)\}^2 = 0$

(ii) $\{g(t)\}^2 - \{g(-t)\}^2 = 0$

$\{g(t)\}^2 - \{g(-t)\}^2 = \{g(t)-g(-t)\}\{g(t)+g(-t)\} = 0$,

$g(t) = g(-t)$이거나 $g(t) = -g(-t)$ 이어야 한다.

(ii-ⓐ) $g(t) = g(-t)$일 때

모든 양의 실수 t에 대하여

$g(t) = 3(t^2-2a)f(t)$, $g(-t) = -3(-t+a)^2f(-t)$,

$3(t^2-2a)f(t) = -3(-t+a)^2f(-t)$

$= -3(t-a)^2f(-t)$,

이때, $(t^2-2a)f(t) = -(t-a)^2f(-t)$가 최고차항 계수가 서로 다르므로

모든 양의 실수 t에 대하여 조건을 만족시키는 이차함수 $f(t)$가 존재하지 않으므로 모순이다.

(ii-ⓑ) $g(t) = -g(-t)$일 때

모든 양의 실수 t에 대하여

$g(t) = 3(t^2-2a)f(t)$, $-g(-t) = 3(-t+a)^2f(-t)$,

$3(t^2-2a)f(t) = 3(-t+a)^2f(-t)$,

$(t^2-2a)f(t) = (-t+a)^2f(-t)$ …… ㉠

을 만족시킨다.

$\lim_{x\to t}\frac{x(x-a)+\{g(t)\}^2-\{g(-t)\}^2}{f(x)}$

$=\lim_{x\to t}\frac{x(x-a)}{f(x)} = g(1)$,

이때 $g(1)$을 k라 하자. (k는 상수)

$f(x) = px^2+qx+r$, $(p>0)$

모든 양의 실수 t에 대하여

$\lim_{x\to t}\frac{x(x-a)}{f(x)} = \lim_{x\to t}\frac{x(x-a)}{px^2+qx+r} = k$

이므로 $x(x-a) = k(px^2+qx+r)$,

$f(x) = \frac{1}{k}x(x-a)$, $(k>0)$

㉠에서

$(t^2-2a)f(t) = (t-a)^2f(-t)$,

$\frac{1}{k}(t^2-2a)t(t-a) = \frac{1}{k}(t-a)^2(-t)(-t-a)$

$\frac{1}{k}(t^2-2a)t(t-a) = \frac{1}{k}(t-a)^2(t)(t+a)$,

양변을 $\frac{1}{k}(t)(t-a)$로 묶어 정리하면

$\frac{1}{k}t(t-a)(t^2-2a) = \frac{1}{k}(t)(t-a)\{(t-a)(t+a)\}$,

이 식은 양의 실수 t에 대한 항등식이므로

$t^2-2a = (t-a)(t+a) = t^2-a^2$,

$2a = a^2$

이때, a가 양수이므로 $a=2$이다.

$f(x) = \frac{1}{k}x(x-2)$ 이므로

$x \geq 0$에서

$g(x) = \frac{3}{k}(x-2)^2x(x+2)$이고,

$g(1) = \frac{9}{k} = k$, $k^2 = 9$

이때, k가 양수이므로 $k=3$이다.

$x \geq 0$에서

$g(x) = (x+2)x(x-2)^2$ 이므로

$g(a+2) = g(4) = 6\times4\times4 = 96$

[별해]

함수 $g(x)$가 $(0, 0)$ 점대칭이고, $x=-a$에서 x축에 접하므로 점대칭 성질에 의해 $x=a$에서 x축에 접한다.

따라서

$x \geq 0$ 에서

함수 $g(x)$ 가 $x = a$ 에서 중근을 가져야 한다.

$g(x) = \frac{3}{k}(x^2 - 2a)x(x - a)$, $(x^2 - 2a) = (x - a)(x + a)$ 이다.

이때, a 가 양수이므로 $a = 2$ 이다.

22) [정답] 20 (출제자 : 25 이서현)

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

$2^{a+1} = k$ 라 하고

두 점 A, B 의 x 좌표 차를 $3t$ $(t > 0)$ 라 하자.

점 B 의 y 좌표는 $k \times 2^{3t}$

선분 AB 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점이 D 이므로

점 D 의 y 좌표는 $\frac{2}{3} \times k + \frac{1}{3} \times k \times 2^{3t}$

점 E 의 y 좌표는 $k \times 2^t$

$7\overline{\mathrm{DE}} = 2\overline{\mathrm{B'D'}}$ 이므로

$7\left(\left(\frac{2}{3} \times k + \frac{1}{3} \times k \times 2^{3t}\right) - k \times 2^t\right)$

$= 2\left(k \times 2^{3t} - \left(\frac{2}{3} \times k + \frac{1}{3} \times k \times 2^{3t}\right)\right)$

양변을 k 로 나누고 $(k > 0)$

식을 정리하면

$2^{3t} - 7 \times 2^t + 6 = 0$

인수분해 하면

$(2^t - 1)(2^t - 2)(2^t + 3) = 0$ $(t > 0)$

따라서 $t = 1$ 이다.

각각 점들의 좌표를 a, k 로 나타내면

A(a, k), B$(a + 3, 8k)$, D$\left(a + 1, \frac{10}{3}k\right)$, E$(a + 1, 2k)$ 이다.

곡선 $y = \log_2(x + 1)$ 는 곡선 $y = 2^{x+1}$ 의 역함수 $y = \log_2 x - 1$ 를 x 축 방향으로 -1, y 축 방향으로 $+1$ 이동한 그래프이다.

따라서 점 B 를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 한 점을 x 축 방향으로 -1, y 축 방향으로 $+1$ 이동한 점이 C 이다.

점 C 의 좌표는 $(8k - 1, a + 4)$ 이다.

$2\sqrt{2}(3\overline{\mathrm{DE}} - \overline{\mathrm{DD'}}) = \overline{\mathrm{BC}}$ 에서

(두 점 B, C 의 x 좌표 차) $\times \sqrt{2} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$2\sqrt{2}\left(3 \times \frac{4}{3}k - (-a - 1)\right) = \sqrt{2}(8k - 1 - (a + 3))$

식을 정리하면

$a = -2$

$k = 2^{a+1}$ 이므로

$k = \frac{1}{2}$

B$(1, 4)$, C$(3, 2)$, D$\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, E$(-1, 1)$

따라서

점 B 를 지나고 x 축에 수직인 직선이

선분 EC 와 만나는 점을 M 이라 하자.

점 M 은 선분 EC 의 중점이다.

M$\left(1, \frac{3}{2}\right)$

(사각형 BDEC 의 넓이)

$=$ (사다리꼴 BDEM 의 넓이) $+$ (삼각형 BMC 넓이)

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}\right) \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 2$

$= \frac{17}{3}$

이므로 $p = 3$, $q = 17$

$p + q = 20$

수학 영역(확률과 통계) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

23) [정답] ④ (출제자 : 24 김진영)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$ 의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$

$= {}_5\mathrm{C}_r 2^r x^{10-3r}$ (단, $r=0,1,2,3,4,5$)

이때, x^7 의 계수는

${}_5\mathrm{C}_{r_1} 2^{r_1} x^{10-3r_1} \times x^3$, ${}_5\mathrm{C}_{r_2} 2^{r_2} x^{10-3r_2}$ 이므로

${}_5\mathrm{C}_{r_1} 2^{r_1} x^{10-3r_1} \times x^3$ 에서 $r_1=2$

${}_5\mathrm{C}_{r_2} 2^{r_2} x^{10-3r_2}$ 에서 $r_2=1$

따라서

${}_5\mathrm{C}_{r_1} 2^{r_1} x^{10-3r_1} \times x^3 = {}_5\mathrm{C}_2 2^2 x^4 \times x^3 = 40x^7$,

${}_5\mathrm{C}_{r_2} 2^{r_2} x^{10-3r_2} = {}_5\mathrm{C}_1 2^1 x^7 = 10x^7$

x^7 의 계수는 50

24) [정답] ③ (출제자 : 25 손준기)

[출제의도] 확률의 덧셈정리와 배반사건, 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

두 사건 A 와 B 는 배반사건이므로

$B \subset A^C$

따라서 $\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(B)$ 이므로

$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(B^C) = 1 - \mathrm{P}(B)$ 이므로

$1 - \mathrm{P}(B) - 3\mathrm{P}(A) = \frac{3}{8}$

$3\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{5}{8}$

이때 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$ 이므로

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{3}{8}$

25) [정답] ② (출제자 : 24 우효정)

[출제의도] 주어진 조건을 사용하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

6 장의 카드 중에서 임의로 2 장을 꺼내는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

두 장의 카드에 적힌 숫자의 합은 3 이상 11 이하이므로
두 장의 카드에 적힌 숫자의 합이 소수일 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) 합이 3 인 경우
이 경우의 수는 $(1, 2)$ 뿐이다.

(ii) 합이 5 인 경우
이 경우의 수는 $(1, 4)$, $(2, 3)$ 이다.

(iii) 합이 7 인 경우
이 경우의 수는 $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ 이다.

(iv) 합이 11 인 경우
이 경우의 수는 $(5, 6)$ 뿐이다.

(i) ~ (iv) 에 의해 구하는 경우의 수는 7 이다.

따라서 6 장의 카드 중에서 임의로 2 장을 꺼낼 때 두 장의 카드에 적힌 숫자의 합이 소수일 확률은 $\frac{7}{15}$

26) [정답] ④ (출제자 : 24 권서현)

[출제의도] 여사건을 활용하여 원순열의 경우를 구할 수 있는가?

[해설]

A 와 B 가 이웃하고 남학생들은 서로 이웃하지 않게 앉는 경우를 여사건을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) A 의 양옆에 B 와 여학생이 앉는 경우

$= 6! \times \frac{1}{6} \times {}_4\mathrm{C}_1 \times 2! = 960$

(ii) A 의 양옆에 B 와 여학생이 앉고 A 를 제외한 남학생들이 서로 이웃하는 경우

$= 5! \times \frac{1}{5} \times 2! \times {}_4\mathrm{C}_1 \times 2! = 384$

따라서 A 와 B 는 이웃하고 남학생들은 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 $960-384=576$

27) [정답] ② (출제자 : 25 손준기)

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

[해설]

문제를 만드는 사람 16 명을 임의추출하여 얻은 한 사람이 한 문제를 만드는 데 걸리는 시간의 표본평균이 $\overline{x_1}$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{4}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{4}$

$\frac{a}{4}\le m\le 2a$ 이므로

$2a-\frac{a}{4}=\frac{7a}{4}=2\times1.96\times\frac{\sigma}{4}$

$a=0.56\sigma$

$2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4}=2\overline{x_1}$

$\overline{x_1}=0.63\sigma$

문제를 만드는 사람 n 명을 임의추출하여 얻은 한 사람이 한 문제를 만드는 데 걸리는 시간의 표본평균이 $\overline{x_2}$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$a\le m\le b$ 이므로

$b-a=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$a+b=2\overline{x_2}$

$\frac{\overline{x_2}}{\overline{x_1}}\le\frac{11}{7}$ 이므로

$\frac{a+b}{1.26\sigma}\le\frac{11}{7}$

$a+b\le1.98\sigma$

이때 a 가 0.56σ 이므로

$b-a\le0.86\sigma$

$b-a=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le0.86\sigma$

$\sqrt{n}\ge6$

$n\ge36$

따라서 n 의 최솟값은 36

28) [정답] ⑤ (출제자 : 24 이나경)

[출제의도] 경우의 수를 활용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]

주사위를 던져서 a_n 이 갖는 값은 모두 $\frac{1}{6}$ 로 일정하므로 확률이 아닌 경우의 수로 다음 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있다.

a_n, b_n 이 모두 0 보다 크고 $\frac{b_1\times b_2\times b_3+a_4+1}{2}$ 의 값이 정수이므로 $b_1\times b_2\times b_3+a_4=2n-1$ 을 만족하는 자연수 n 이 존재해야 한다.

즉, $b_1\times b_2\times b_3+a_4$ 는 정수이고 홀수이어야 한다.

마찬가지로 $\frac{b_1\times b_2\times b_3\times b_4}{2}$ 의 값이 정수이므로

$b_1\times b_2\times b_3\times b_4$ 는 정수이고 짝수이어야 한다.

이때 순서쌍 (a_n, b_n) 은 $(1, 2)$, $(2, 16)$, $(3, 8)$, $(4, 1)$, $(5, 32)$, $\left(6, \frac{1}{16}\right)$ 이고 $b_1\times b_2\times b_3+a_4$ 의 값이 홀수이기 위해서는 $b_1\times b_2\times b_3$ 가 홀수이고 a_4 가 짝수이거나 $b_1\times b_2\times b_3$ 가 짝수이고 a_4 가 홀수여야 한다.

이때 $b_1\times b_2\times b_3$ 가 홀수인지 짝수인지는 자연수 $k\,(1\le k\le3)$ 에 대하여 $b_k=\frac{1}{16}$ 이 되는 k 의 개수에 따라 나누어 구할 수 있다.

따라서 a_4 의 홀짝과 k 의 개수에 따라 조건부확률을 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) a_4 가 짝수일 때,

(i -ⓐ) k 의 개수가 0 인 경우 a_4 가 짝수인 경우는 2 , 4 , 6 으로 3 개이고 $b_1\times b_2\times b_3$ 가 홀수여야 하므로 b_1, b_2, b_3 는 모두 1 이다.

따라서 경우의 수는 $3\times1=3$

(i -ⓑ) k 의 개수가 1 인 경우 a_4 가 짝수인 경우는 2 , 4 , 6 으로 3 개이고 $b_1\times b_2\times b_3$ 는 홀수여야 한다. 이때 b_1, b_2, b_3 중 하나가 $\frac{1}{16}$ 이므로 나머지 두 수의 곱이 16 이고 b_1, b_2, b_3 중 하나가 $\frac{1}{16}$ 인 경우의 수는 3 , 나머지 두 수의 곱이 16 인 조합은 $(1, 16)$, $(2, 8)$ 이므로 경우의 수는 $2\times(1+1)=4$ 이다. 따라서 경우의 수는 $3\times3\times4=36$

(i -ⓒ) k 의 개수가 2 이상인 경우 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (i)의 경우의 수는 $3+36=39$

(ii) a_4 가 홀수일 때,

(ii-ⓐ) k 의 개수가 0 인 경우 a_4 가 홀수인 경우는 1 , 3 , 5 로 3 개이고 $b_1\times b_2\times b_3$ 는 짝수여야 하므로 $b_1\times b_2\times b_3\ne1$ 이다.

따라서 경우의 수는 $3\times(5\times5\times5-1)=372$

(ii-ⓑ) k 의 개수가 1 인 경우 a_4 가 홀수인 경우는 1 , 3 , 5 로 3 개이고 $b_1\times b_2\times b_3$ 는 짝수여야 한다. 이때 b_1, b_2, b_3 중 하나가 $\frac{1}{16}$ 이므로 경우의 수는 3 , 나머지 두 수의 곱이 32 를 약수로 가지는 조합은 $(1, 32)$, $(2, 16)$, $(2, 32)$, $(8, 8)$, $(8, 16)$, $(8, 32)$, $(16, 16)$, $(16, 32)$, $(32, 32)$ 이므로 경우의 수는 $2+2+2+1+2+2+1+2+1=15$ 이다.

따라서 경우의 수는 $3\times3\times15=135$

(ii−ⓒ) k의 개수가 2 이상인 경우 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (ii)의 경우의 수는 $372+135=507$

(i)과 (ii)에 의해, $\dfrac{b_1 \times b_2 \times b_3 + a_4 + 1}{2}$ 의 값이 정수인 경우의 수는 $39+507=546$

$\dfrac{b_1 \times b_2 \times b_3 + a_4 + 1}{2}$ 의 값이 정수이면서 $\dfrac{b_1 \times b_2 \times b_3 \times b_4}{2}$ 의 값이 정수인 경우는
(i)에서는 $a_4 = 2$일 때만, (ii)에서는 전부이므로 경우의 수는
$\dfrac{39}{3}+507=520$

따라서 구하려는 조건부확률은 $\dfrac{520}{546}=\dfrac{20}{21}$

29) [정답] 788 (출제자 : 24 오현민)

[출제의도] 정규분포 곡선의 특징을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

[해설]
$f(x-10)=g(x)$에 의하여 $\sigma_1=\sigma_2$이고
$m_1+10=m_2$를 만족시킨다.

$\mathrm{P}(X \geq 4m_1)=\mathrm{P}(Y \leq 3m_2)$
$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{3m_1}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{2m_2}{\sigma_2}\right)$
$\sigma_1=\sigma_2$에 의하여 $-3m_1=2m_2$이다.

$m_1+10=m_2$와 $-3m_1=2m_2$을 연립하면
$m_1=-4$, $m_2=6$

$\mathrm{P}(X \leq 2m_1)+\mathrm{P}(Y \geq 2m_2)=0.327$

$\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{m_1}{\sigma_1}\right)+\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{m_2}{\sigma_2}\right)=0.327$
$\mathrm{P}\left(Z \leq -\dfrac{4}{\sigma_1}\right)+\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{6}{\sigma_2}\right)=0.327$
$\dfrac{1}{2}-\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{\sigma_1} \leq Z \leq 0\right)+\dfrac{1}{2}-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{6}{\sigma_2}\right)=0.327$
$\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{\sigma_1} \leq Z \leq \dfrac{6}{\sigma_2}\right)=0.673$에 의하여
$\sigma_1=\sigma_2=5$

$\mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{10-6}{5}\right)=\mathrm{P}(Z \leq 0.8)=0.788$이므로
$1000 \times \mathrm{P}(Y \leq 10)=788$

30) [정답] 74 (출제자 : 25 손준기)

[출제의도] 순열과 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
공책이 2개이므로 조건 (가)에 의하여 한 학생은 한 개의 공책만을 받을 수 있고 공책을 받은 학생은 적어도 한 개 이상의 볼펜을 받아야 한다.
1학년 중 진영이 아닌 학생을 A, 2학년 중 시현이 아닌 학생을 B라 할 때, 아무것도 받지 못한 학생의 수에 따라 다음과 같이 경우의 수를 구할 수 있다.

(i) 아무것도 받지 못하는 학생이 없는 경우 공책과 볼펜을 모두 받는 학생의 경우는 (진영, 시현), (진영, A), (진영, B), (시현, A), (시현, B), (A, B)이고 조건 (나)에 의하여 시현은 진영보다 많은 볼펜을 받아야 한다.
따라서 각각의 경우의 수는 모두 $2! \times ({}_4\mathrm{H}_1 - 1)=6$이므로
(i)에서의 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

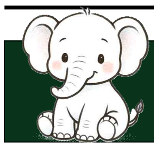
(ii) 아무것도 받지 못하는 학생이 한 명인 경우 조건 (다)에 의하여 2학년 중 아무것도 받지 못하는 학생이 한 명 있어야 하고 조건 (나)에 의하여 시현은 적어도 한 개 이상의 볼펜을 받아야 한다.
이때 공책과 볼펜을 모두 받는 학생의 경우는 (진영, 시현), (진영, A), (시현, A)이고 조건 (나)에 의하여 시현은 진영보다 많은 볼펜을 받아야 한다.
따라서 각각의 경우의 수는 모두 $2! \times ({}_3\mathrm{H}_2 - 2)=8$이므로
(ii)에서의 경우의 수는 $8 \times 3 = 24$

(iii) 아무것도 받지 못하는 학생이 두 명인 경우 조건 (나)에 의하여 시현은 적어도 한 개 이상의 볼펜을 받아야 하고 조건 (다)에 의하여 학생 B는 아무것도 받지 못한다.
이때 공책과 볼펜을 모두 받는 학생의 경우는 (진영, 시현), (시현, A)이고 조건 (나)에 의하여 시현은 진영보다 많은 볼펜을 받아야 한다.
따라서 각각의 경우의 수는 $2! \times ({}_2\mathrm{H}_3 - 2)=4$, $2! \times {}_2\mathrm{H}_4 = 10$이므로
(iii)에서의 경우의 수는 14

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구한 경우의 수는
$36+24+14=74$

수학 영역(미적분) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

23) [정답] ③ (출제자 : 24 박예림)

[출제의도] 로그 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=\log_2 x$ 라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}$$

이므로

$$f'(2)=\frac{1}{2\ln 2}$$

24) [정답] ⑤ (출제자 : 25 이소은)

[출제의도] 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{3e^x+4}{e^x+2}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{2e^x+4+e^x}{e^x+2}dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(2+\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$$
$$=\left[2x+\ln\left(e^x+2\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$
$$=2\ln 4+\ln 6-(2\ln 2+\ln 4)$$
$$=\ln 6$$

25) [정답] ① (출제자 : 25 심준현)

[출제의도] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\dfrac{a_n}{a_n+n}=b_n$ 이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+n}=\lim_{n\to\infty}b_n=3$$

$$a_n=a_nb_n+nb_n$$
$$a_n(1-b_n)=nb_n$$

$a_n=\dfrac{nb_n}{1-b_n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{1-b_n}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=-\frac{3}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}}{\frac{2}{n^2}-3}$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{1}}=\frac{1}{2}$$

26) [정답] ② (출제자 : 24 이학송)

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

매개변수 $t\,(t>0)$ 로 나타내어진 곡선

$x=2^{2t}+3\times 2^{-t+1}$, $y=(\ln at)^2$

에서 x 좌표가 7이 되도록 하는 t 의 값을 구하면

$$2^{2t}+3\times 2^{-t+1}=7$$
$$2^{3t}-7\times 2^t+6=0$$
$$(2^t-1)(2^t-2)(2^t+3)=0$$

$t>0$ 이므로 $t=1$

$a=2$

$$\frac{dx}{dt}=2\times 2^{2t}\ln 2-3\times 2^{-t+1}\ln 2$$
$$\frac{dy}{dt}=2(\ln 2t)\times\frac{1}{t}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2(\ln 2t)\times\frac{1}{t}}{2\times 2^{2t}\ln 2-3\times 2^{-t+1}\ln 2}$$

따라서 $t=1$ 일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$ 의 값은 $\dfrac{2\ln 2}{8\ln 2-3\ln 2}=\dfrac{2}{5}$

27) [정답] ⑤ (출제자 : 25 하효진)

[출제의도] 삼각함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 $\mathrm{CO'E}$ 는 $\overline{\mathrm{O'C}}=\overline{\mathrm{O'E}}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{O'CE}=\angle\mathrm{O'EC}=\theta$ 이고,

$\angle\mathrm{OO'E}=\theta+\theta=2\theta$ 이다.

따라서

$$\angle\mathrm{O'OE}=\frac{\pi}{2}-2\theta$$

점 $\mathrm{O'}$ 과 점 D 를 잇는 선분 $\mathrm{O'D}$ 에 대하여

$\overline{\mathrm{O'E}}=\overline{\mathrm{O'D}}$

$\overline{OE} = \overline{OD}$
$\overline{OO'}$ 은 공통
따라서 삼각형 O′OE 와 삼각형 O′OD 는 서로 합동이다.

$\angle O'OD = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ 이고
삼각형 OAC 는 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형이므로
$\angle OCA = \frac{\pi}{4} + \theta$

이때
점 O 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 점 H 라 하면
$\overline{AH} = \overline{AO} \times \cos(\angle OAC)$
$= 5 \times \cos(\angle OCA)$
$\overline{AC} = 10\cos(\angle OCA)$

따라서
$f(\theta) = \overline{AC} \times \sin(\angle OCB)$
$= \overline{AC} \times \sin(\angle OCA)$
$= 10 \times \cos(\angle OCA) \times \sin(\angle OCA)$
$= 10 \times \frac{1}{2} \times \sin(2\angle OCA)$
$= 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$
$= 5\cos 2\theta$

$f'(\theta) = -10\sin 2\theta$
$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = (-10) \times \left(\frac{1}{2}\right) = -5$

28) [정답] ④ (출제자 : 25 김근원)
[출제의도] 부분적분을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]
$\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3}\tan x}$ 이므로
$$g(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3}\tan x} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan x}{1 + \sqrt{3}\tan x}\right) + \ln\left(\tan x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}\tan x}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}\tan x + 1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \ln\frac{4}{3}$$
따라서 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 에서 $g(x) = \ln\frac{4}{3}$ 이다. ……㉠
$h(x) = \ln\left(\tan x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 라 하자.
$g(x) = h\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + h(x) = \ln\frac{4}{3}$ 이므로
함수 $h(x) = \ln\left(\tan x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 는 점$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\right)$에 대하여 대칭이다.
……㉡

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \times \frac{f(x)}{\cos x}\,dx$$
$$= \left[\tan x \times f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)'dx$$
$$= \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)'dx$$

따라서
$$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)'dx$$

㉠에서
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)'dx$$
$$= \ln\frac{4}{3} \times \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \ln\left\{\tan\left(\frac{2\pi}{9}\cos x\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}dx$$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \ln\left\{\tan\left(\frac{2\pi}{9}\cos x\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}dx$ 에서
$\frac{2\pi}{9}\cos x = t$ 라 하면 $-\frac{2\pi}{9}\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이고,
$x = 0$ 일 때 $t = \frac{2\pi}{9}$, $x = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $t = \frac{\pi}{9}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \ln\left\{\tan\left(\frac{2\pi}{9}\cos x\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}dx$$
$$= \frac{9}{2\pi} \times \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{2\pi}{9}} \ln\left\{\tan t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}dt$$
㉡에서 $\frac{9}{2\pi} \times \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{2\pi}{9}} \ln\left\{\tan t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}dt = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$ 이므로
$$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{4}{3}\right)^2$$

29) [정답] 32 (출제자 : 24 장경정)
[출제의도] 급수의 수렴 조건을 이용하여 등비급수의 합을 계산할 수 있는가?

[해설]
등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 이라 하자.
급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ 이다.

모든 자연수 n 에 대하여
$b_n = |a_n - k| - a_n$ 이므로
$$b_n = \begin{cases} -2a_n + k & (a_n \le k) \\ -k & (a_n > k) \end{cases}$$

$-1 < r < 1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 < k$ 이고,
$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(-2a_n + k) = k$ ……㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_3 + b_n) = \frac{5}{3}$ 이므로
$\lim_{n\to\infty}(-a_3 + b_n) = 0$
㉠에 의해
$\lim_{n\to\infty}(-a_3 + b_n) = -a_3 + k = 0$
따라서 $k = a_3$ 이다.
$a_3 = ar^2$ 이고 $k > 0$ 이므로
$ar^2 > 0$ 이다.

따라서 $a>0$ 이고 $r\neq 0$ 이다.

(i) $0<r<1$ 일 때
$k=a_3$ 이고 공비가 양수이므로
$a_1>k,\ a_2>k,\ a_3=k$ 이고
$b_1=-k,\ b_2=-k,\ b_3=-2a_3+k=-k$
이다.

따라서 $b_2+b_3=-2k$ 이고
$b_2+b_3=4$ 이므로
$k=-2$
이때, k가 양수이므로 모순이다.

(ii) $-1<r<0$ 일 때
$k=a_3$ 이고 공비가 음수이므로
$a_1>k,\ a_2<0,\ a_3=k$ 이고
$b_1=-k,\ b_2=-2a_2+k,\ b_3=-2a_3+k=-k$ ……㉡
이다.

따라서 $b_2+b_3=-2a_2$ 이고
$b_2+b_3=4$ 이므로
$-2ar=4$
$ar=-2$ ……㉢

㉡에 의해

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-a_3+b_n)&=(-a_3+b_1)+(-a_3+b_2)+\sum_{n=3}^{\infty}(-a_3+b_n)\\&=-2ar^2-2ar+\sum_{n=3}^{\infty}(-a_3-2a_n+k)\\&=-2ar^2-2ar-2\sum_{n=3}^{\infty}a_n\\&=-2ar^2-2ar-\frac{2ar^2}{1-r}\\&=-2ar\left(r+1+\frac{r}{1-r}\right)\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-a_3+b_n)=\frac{5}{3}$ 이므로
$-2ar\left(r+1+\dfrac{r}{1-r}\right)=\dfrac{5}{3}$ ……㉣

㉣에 ㉢을 대입하면
$4\times\left(r+1+\dfrac{r}{1-r}\right)=\dfrac{5}{3}$
$12r+7+\dfrac{12r}{1-r}=0$
$12r^2-17r-7=0$
$(3r+1)(4r-7)=0$
이때, $r<0$ 이므로
$r=-\dfrac{1}{3}$

㉢에 의해
$-\dfrac{1}{3}a=-2$
$a=6$

$k=a_3$ 이므로
$k=ar^2=\dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned}18\times(k+b_4)&=18\times(k-2a_4+k)\\&=18\times\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{9}\right)\\&=32\end{aligned}$$

30) [정답] 8 (출제자 : 25 이성연)

[출제의도] 주어진 그래프를 통해 새로운 변수로 정의된 함수를 관찰할 수 있는가?

[해설]
$g(x)=-\dfrac{t}{x^3}$ 로 놓으면
$g'(x)=\dfrac{3t}{x^4}$ 이다.
한편, 접점의 x 좌표를 $s_1,\ s_2$ 로 놓으면
$16m_1=m_2$ ……㉠이므로
$g'(x)=\dfrac{3t}{x^4}$ 에서
$16\times\dfrac{3t}{{s_1}^4}=\dfrac{3t}{{s_2}^4}$
즉, $s_1=2s_2$ 또는 $s_1=-2s_2$ 이다.

(i) $s_1=2s_2$ 일 때
이때, $s_2=k$ 라 하면
두 점 $(a,3),\ (k,g(k))$ 를 지나는 직선의 기울기와
곡선 위 점 $(k,g(k))$ 에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로
$\dfrac{3-g(k)}{a-k}=\dfrac{3t}{k^4}$ ……㉡
또한 두 점 $(a,3),\ (2k,g(2k))$ 을 지나는 직선의 기울기와
곡선 위 점 $(2k,g(2k))$ 에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로
$\dfrac{3-g(2k)}{a-2k}=\dfrac{3t}{16k^4}$ ……㉢
따라서 ㉡, ㉢을 a 에 대하여 정리하면
$a=f(t)$ 이므로
$a=\dfrac{k^4\{3-g(k)\}}{3t}+k=\dfrac{16k^2\{3-g(2k)\}}{3t}+2k$ 에서
$45k^3=-4t$
즉, $f(t)=\dfrac{56}{45}k=-\dfrac{56}{45}\times\sqrt[3]{\dfrac{4}{45}t}$ 이다.
이때 모든 양의 실수 t 에 대하여
함수 $y=f(t)$ 의 치역은 $\{y\,|\,y<0\}$ 이지만
점 $(a,3)$에서 곡선 $y=-\dfrac{t}{x^3}$ 에 그은 접선의 개수가 2 이려면
$a=f(t)>-\sqrt[3]{\dfrac{t}{3}}$ 이어야 하므로
모든 양의 실수 t 에 대하여
㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $s_1=-2s_2$ 일 때
이때, $s_2=k$ 라 하면
두 점 $(a,3),\ (k,g(k))$ 을 지나는 직선의 기울기와
곡선 위 점 $(k,g(k))$ 에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로
$\dfrac{3-g(k)}{a-k}=\dfrac{3t}{k^4}$ ……㉣
또한 두 점 $(a,3),\ (-2k,g(-2k))$ 을 지나는 직선의 기울기와

곡선 위 점$(-2k,\ g(-2k))$에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3-g(-2k)}{a+2k}=\frac{3t}{16k^4}\ \cdots\cdots ㉤$$

따라서 ㉣, ㉤을 a에 대하여 정리하면

$a=f(t)$이므로

$$a=\frac{k^4\{3-g(k)\}}{3t}+k=\frac{16k^4\{3-g(-2k)\}}{3t}-2k \text{에서}$$

$15k^3=4t\ \cdots\cdots ㉥$

$$f(t)=\frac{8}{5}k$$

이때 문제의 조건에서

$f(\alpha)=\dfrac{16}{15}$이므로

$$f(\alpha)=\frac{8}{5}\times k=\frac{16}{15}$$

$$k=\frac{2}{3}$$

㉥에 의하여

$$4\alpha=15\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{40}{9}$$

$$\alpha=\frac{10}{9}$$

또한 ㉥에 의하여

$\dfrac{dk}{dt}=\dfrac{4}{45k^2}$이므로

$f(t)=\dfrac{8}{5}k$에서

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{8}{5}\times\frac{dk}{dt}\\&=2\times\left(\frac{4}{15k}\right)^2\end{aligned}$$

따라서 $f'(\alpha)=f'\left(\dfrac{10}{9}\right)=\dfrac{8}{25}$

$\therefore\ 25\times f'(\alpha)=8$