04 삼각함수의 미분

미적분II 교과서 Review

문제 1

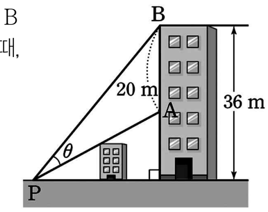
두 각 α, β에 대하여

$$\sin\alpha+\cos\beta=\frac{3}{5},\quad \cos\alpha+\sin\beta=\frac{4}{5}$$

일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

문제 2

오른쪽 그림과 같이 P 지점에서 높이가 36 m인 건물을 올려다보니 다른 건물에 가려서 A 지점에서 B 지점까지 20 m의 부분만 보였다. 두 지점 A, B를 바라 본 시선의 사잇각의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 최댓값을 구하여라.
(단, 눈높이는 생각하지 않는다.)



문제 3

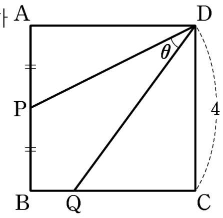
두 도시 A, B는 60 km 떨어져 있고, 도시 O는 두 도시의 중간 지점에 있다. 신도시 P의 위치를 도시 O에서 30 km 떨어진 지점에 정한 후 신도시 P와 도시 A 사이에는 2차선 직선 도로를, 신도시 P와 도시 B 사이에는 4차선 직선 도로를 건설하려고 한다. 2차선 도로는 km당 6억 원, 4차선 도로는 km당 8억 원의 공사비가 소요된다. 두 도로의 공사비로 600억 원이 소요된다고 할 때, 신도시의 위치를 구하여라.

04 삼각함수의 미분

미적분II 교과서 Review

문제 4

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 $\overline{AB}$의 중점을 P, $\overline{BC}$를 1 : 3으로 내분하는 점을 Q라고 하자.
$\angle PDQ = \theta$라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.



문제 5

함수 $f(x) = \sin x + 2\cos x$가 $x = \alpha$에서 최댓값을 가질 때, $\tan\alpha$의 값을 구하여라. (단, $0 \le x \le \pi$)

문제 6

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{\circ} \sin\frac{1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x\tan 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\pi - 3x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

문제 7

이차방정식 $5x^2 + 10x + k = 0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos 2\theta$일 때, 상수 k의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

04 삼각함수의 미분

미적분II 교과서 Review

문제 8

자연수 n에 대하여 $a_n = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x + \tan 2x + \cdots + \tan nx}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하여라.

문제 9

다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 정하여라.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - \cos bx}{x^2} = 8$$

문제 10

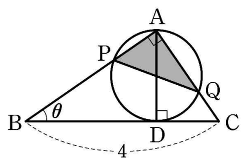
함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{e^{3x}-1} & (x > 0) \\ \dfrac{2\tan x}{9x + \sin x} & (x < 0) \end{cases}$

에 대하여 극한값 $\lim_{x \to 0} f(x)$가 존재할 때, 실수 a의 값은?

① $-\dfrac{3}{5}$ ② $-\dfrac{2}{9}$ ③ $\dfrac{1}{15}$ ④ $\dfrac{2}{9}$ ⑤ $\dfrac{3}{5}$

문제 11

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC} = 4$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle ABC = \theta$라고 하자. 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라고 할 때, 선분 AD를 지름으로 하는 원과 두 변 AB, AC의 교점을 각각 P, Q라고 하자. 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라고 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하여라.



04 삼각함수의 미분

미적분II 교과서 Review

문제 12

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin x + x^2\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

일 때, $f'(0)$의 값을 구하여라.

문제 13

함수 $f(x)=\cos x-\sin x$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(\frac{3}{n}\right)-f(0)\right\}$$

의 값을 구하여라.

문제 14

수 $f(x)=\sin x-\cos x$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)+1}{x}$의 값을 구하여라.

〈정답 및 해설〉
미적분Ⅱ - 5단원. 삼각함수의 미분

1.

1. $\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{4}{5}$를 각각 제곱한 후 더하여 정리하면

$$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=1$$

즉, $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}$

2.

오른쪽 그림에서

$\overline{PH}=x$, $\angle BPH=\alpha$,

$\angle APH=\beta$라고 하면

$\tan\alpha=\dfrac{36}{x}$, $\tan\beta=\dfrac{16}{x}$

이고, $\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\frac{36}{x}-\frac{16}{x}}{1+\frac{36}{x}\cdot\frac{16}{x}}=\frac{20x}{x^2+576}=\frac{20}{x+\frac{576}{x}}$$

이때 $x>0$, $\dfrac{576}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $x+\dfrac{576}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{576}{x}}=48$이므로

$$\tan\theta=\frac{20}{x+\frac{576}{x}}\leq\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$$

따라서 $\tan\theta$의 최댓값은 $\dfrac{5}{12}$이다.

3.

3. $\angle PAB=\theta$라고 하면

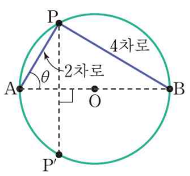
$\angle APB=90°$,

$\overline{AB}=60$ km이므로

$60\cos\theta\times6+60\sin\theta\times8$

$=600\left(\dfrac{3}{5}\cos\theta+\dfrac{4}{5}\sin\theta\right)$

$=600\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5}\right)$



공사비가 600억 원이므로 $600\sin(\theta+\alpha)=600$에서

$$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$$

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$를 만족하고, $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 O 위의 점 P 또는 P'이 신도시의 위치이다.

4.

$\angle PDC=\alpha$, $\angle QDC=\beta$라고 하면

$\tan\alpha=\dfrac{4}{2}=2$, $\tan\beta=\dfrac{3}{4}$

이때 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{2}$$

5.

$$f(x)=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\theta)$$

$$\left(단,\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

이고, $0\leq x\leq\pi$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $0<x+\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

한편, 함수 $f(x)$는 $x+\theta=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 즉 $x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$일 때 최댓값 $\sqrt{5}$를 가지므로 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

즉, $\tan\alpha=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2}$

6.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\circ}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x}$

$\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{180}x\sin\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{180}\cdot1=\frac{\pi}{180}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\tan2x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x\tan2x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\tan2x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2x}{\tan2x}\cdot\frac{1}{2(1+\cos x)}$$

$$=1^2\cdot1\cdot\frac{1}{2\cdot2}=\frac{1}{4}$$

(3) $x-\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{3}$일 때,

$t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-3x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{-3t}{\sin t}=\frac{-3}{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}}=-3$$

(4) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

이때 $x-\dfrac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{4}$일 때,

$t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\sqrt{2}\cdot1=\sqrt{2}$$

7.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta + \cos 2\theta = -2$ ······㉠

$\sin\theta\cos 2\theta = \frac{k}{5}$ ······㉡

㉠에서 $\sin\theta + (1 - 2\sin^2\theta) = -2$

$2\sin^2\theta - \sin\theta - 3 = 0$

$(2\sin\theta - 3)(\sin\theta + 1) = 0$

$\therefore \sin\theta = -1$

$\therefore \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$= 1 - 2 = -1$

따라서 ㉡에서 $-1 \cdot (-1) = \frac{k}{5}$

$\therefore k = 5$

8.

$$a_n = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x + \tan 2x + \cdots + \tan nx}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2 + \cdots + \frac{\tan nx}{nx}\cdot n}$$

$$= \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

이므로

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} = 2$$

답 2

9.

. $\lim_{x\to 0}(a - \cos bx) = 0$ 에서 $a - 1 = 0$ 이므로 $a = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a - \cos bx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos bx}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 bx}{x^2(1 + \cos bx)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{1 + \cos bx} = \frac{b^2}{2}$$

따라서 $\frac{b^2}{2} = 8$ 에서 $b = \pm 4$

10.

⑤

11.

$\overline{PQ}$ 도 원의 지름이므로 $\overline{AD} = \overline{PQ}$

이때 $\overline{AD}$ 와 $\overline{PQ}$ 의 교점을 O라고 하면

$\overline{OA} = \overline{OD} = \overline{OP} = \overline{OQ}$,

$\angle ABC = \angle CAD = \angle PQA = \theta$

따라서

$\overline{AB} = \overline{BC}\cos\theta = 4\cos\theta$,

$\overline{AD} = \overline{AB}\sin\theta = 4\cos\theta\sin\theta$,

$\overline{AP} = \overline{PQ}\sin\theta = \overline{AD}\sin\theta = 4\cos\theta\sin^2\theta$,

$\overline{AQ} = \overline{PQ}\cos\theta = \overline{AD}\cos\theta = 4\cos^2\theta\sin\theta$

이므로 $S(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ} = 8\cos^3\theta\sin^3\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{8\cos^3\theta\sin^3\theta}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} 8\cos^3\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 = 8$$

12.

16 $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin h + h^2\cos\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} + \lim_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h}$$

이때 $-|h| \le h\cos\frac{1}{h} \le |h|$ 이고, $\lim_{h\to 0}|h| = 0$ 이므로

$\lim_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h} = 0$

$f'(0) = 2\cdot 1 + 0 = \mathbf{2}$

13.

. $\frac{1}{n} = t$ 로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(\frac{3}{n}\right) - f(0)\right\} = \lim_{t\to 0} 3\cdot\frac{f(3t) - f(0)}{3t - 0}$$

$$= 3f'(0)$$

$f'(x) = -\sin x - \cos x$ 이므로

$3f'(0) = 3\times(-\sin 0 - \cos 0) = -3$

14.

13 $f(0) = -1$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x) + 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x}$$

여기서 $\sin x = t$ 로 놓으면 $x \to 0$ 일 때 $t \to 0$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0)$$

이때 $f'(x) = \cos x + \sin x$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x) + 1}{x} = f'(0) = \mathbf{1}$$