03 삼각함수의 뜻과 그래프

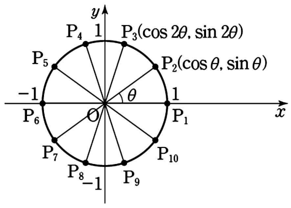
미적분II 교과서 Review

문제 1

직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)(a<0)$와 원점 O를 잇는 선분 OP를 동경으로 하는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하여라.

문제 2

오른쪽 그림과 같이 좌표평면의 단위원을 10등분 하여 각 점을 차례대로 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,$ P_{10}이라고 하자. P_1의 좌표는 $(1,\ 0)$이고,
$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{O}\mathrm{P}_2=\theta$라고 할 때,
$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots \cos 10\theta$의 값을 구하여라.



문제 3

$\sin\theta\cos\theta>0,\ \cos\theta\tan\theta<0$을 동시에 만족하는 각 θ에 대하여 다음 식을 간단히 하여라.

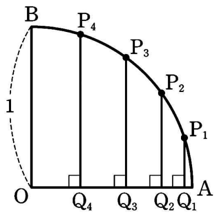
$$|\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta-\tan\theta|$$

03 삼각함수의 뜻과 그래프

미적분II 교과서 Review

문제 4 길이가 60 cm인 철사로 부채꼴을 만들 때, 그 부채꼴의 넓이 S의 최댓값을 구하여라. 또, 그때의 반지름의 길이 r와 중심각의 크기 θ의 값을 구하여라.

문제 5 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 사분원의 호 AB를 5등분하는 점을 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라고 하자.
점 P_1, P_2, P_3, P_4에서 반지름 OA에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4라고 할 때, $\overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\overline{P_3Q_3}^2+\overline{P_4Q_4}^2$의 값을 구하여라.
(풀이 과정을 자세히 써라.)



문제 6 다음은 $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ$의 값을 구하는 과정이다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$\sin(90^\circ-\alpha^\circ)=\cos\alpha^\circ$ 이므로
$\sin^2\alpha^\circ+\sin^2(90^\circ-\alpha^\circ)=\boxed{(가)}$
$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ=\boxed{(나)}$

문제 7 $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\cos^2\theta}-\dfrac{\sin(\pi+\theta)\tan^2(\pi-\theta)}{\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)}$를 간단히 하여라.

03 삼각함수의 뜻과 그래프

미적분II 교과서 Review

문제 8

다음 중 함수 $y=3\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

② 최댓값은 4이다.

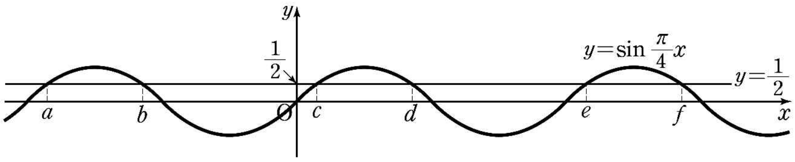
③ 최솟값은 -2이다.

④ 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

⑤ $y=3\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

문제 9

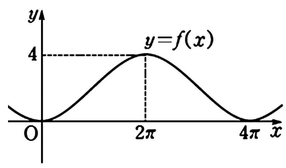
$-8\le x\le 12$일 때, 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$라고 한다. 이때 $a+b+c+d+e+f$의 값을 구하여라.



문제 10

오른쪽 그림은 함수

$f(x)=a\sin\left(bx-\frac{\pi}{2}\right)+c$의 그래프의 일부이다. 이때 $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라. (단, $a>0,\ b>0$)



문제 11

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$일 때, $\sin^3\theta-\cos^3\theta$의 값은? $\left(단,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

03 삼각함수의 뜻과 그래프

미적분II 교과서 Review

문제 12

x에 대한 이차방정식

$$x^2+2x\cos\theta+1-\sin\theta=0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 θ의 값의 범위를 구하여라. $(0\le\theta<2\pi)$

문제 13

방정식 $\frac{x}{10}=\sin x$의 실근의 개수를 구하여라.

문제 14

$0\le x<2\pi$일 때, 자연수 n에 대하여 방정식 $4\cos\frac{x}{n}+1=0$의 근의 개수를 a_n이라고 하자. $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하여라.

문제 15

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta>0$$

이 성립할 때, θ의 값의 범위를 구하여라. (단, $0\le\theta<2\pi$)

〈정답 및 해설〉

미적분Ⅱ - 3단원. 삼각함수의 뜻과 그래프

1.

직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위의 한 점을 $P\left(a,\ -\frac{1}{2}a\right)$로 놓으면

$$\overline{OP}=\sqrt{a^2+\left(-\frac{1}{2}a\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

그런데 $a<0$이므로 $\overline{OP}=-\frac{\sqrt{5}}{2}a$

따라서

$$\sin\theta=\frac{-\frac{1}{2}a}{-\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{5}}{5},\quad \cos\theta=\frac{a}{-\frac{\sqrt{5}}{2}a}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

2.

. $\cos\theta+\cos 6\theta=0$, $\cos 2\theta+\cos 7\theta=0$, $\cdots$,
$\cos 5\theta+\cos 10\theta=0$
이므로

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta=0$$

3.

$\sin\theta\cos\theta>0$을 만족하는 각 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고, $\cos\theta\tan\theta<0$을 만족하는 각 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.
따라서 두 식을 동시에 만족하는 각 θ는 제3사분면의 각이다.
이때 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로

$$\begin{aligned}&|\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta-\tan\theta|\\&=-(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta+(\cos\theta-\tan\theta)\\&=-\tan\theta\end{aligned}$$

4.

!. 부채꼴의 호의 길이를 l이라고 하면

$$2r+l=60$$

이때

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(60-2r)\\&=-(r-15)^2+225\end{aligned}$$

그러므로 $r=15$일 때 넓이의 최댓값은 $225\,\text{cm}^2$이다.
이때 $l=30$이므로 $30=15\theta$에서 $\theta=2$

5.

점 P_n이 호 AB를 5등분하는 점이므로

$$\angle P_nOA=\frac{\pi}{2}\times\frac{n}{5}=\frac{n}{10}\pi$$

$\overline{OP_n}=1$이므로

$$\overline{P_nQ_n}=\overline{OP_n}\sin\frac{n}{10}\pi=\sin\frac{n}{10}\pi$$

따라서

$$\begin{aligned}&\overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\overline{P_3Q_3}^2+\overline{P_4Q_4}^2\\&=\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\frac{3}{10}\pi+\sin^2\frac{4}{10}\pi\\&=\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{2}{10}\pi+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{10}\pi\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)\\&=\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{2}{10}\pi+\cos^2\frac{\pi}{10}=2\end{aligned}$$

6.

$\sin(90^\circ-\alpha^\circ)=\cos\alpha^\circ$이므로

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha^\circ+\sin^2(90^\circ-\alpha^\circ)&=\sin^2\alpha^\circ+\cos^2\alpha^\circ\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ\\&=(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)\\&\quad+(\sin^2 3^\circ+\sin^2 87^\circ)+\cdots\\&\quad+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ\\&=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{44\text{개}}+\frac{1}{2}=44+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{89}{2}}\end{aligned}$$

따라서 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 1, $\frac{89}{2}$이다.

답 (가) 1 (나) $\frac{89}{2}$

7.

$$(\text{주어진 식})=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta\cos^2\theta}-\frac{-\sin\theta\tan^2\theta}{\sin\theta}=-\sec^2\theta+\tan^2\theta=-1$$

8.

⑤ $y=3\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

9.

12

10.

15 문제 이해 함수 $f(x)$의 주기가 4π이므로

$$\frac{2\pi}{b}=4\pi, \qquad b=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=a\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)+c \qquad ▶ 30\%$$

해결 과정 $f(0)=0$이므로 $\qquad -a+c=0 \qquad$ ······ ㉠

$f(2\pi)=4$이므로 $\qquad a+c=4 \qquad$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=2,\ c=2 \qquad$ ▶ 40%

답 구하기 따라서 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)+2$이므로

$$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+2$$

$$=2\sin\frac{\pi}{3}+2=2+\sqrt{3} \qquad ▶ 30\%$$

11.

⑤

12.

I. $\frac{D}{4}=\cos^2\theta-1+\sin\theta=1-\sin^2\theta-1+\sin\theta>0$

에서 $\qquad \sin\theta(\sin\theta-1)<0$

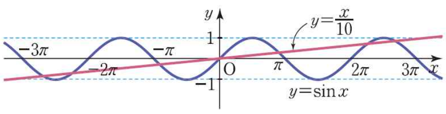
따라서 $0<\sin\theta<1$이므로 구하는 θ의 값의 범위는

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$$

13.

. $\frac{x}{10}=\sin x$에서 $-1\le\sin x\le1$이므로 $\quad -1\le\frac{x}{10}\le1$

즉, $-10\le x\le10$에서만 실근의 개수를 구하면 된다. 직선 $y=\frac{x}{10}$는 점 $(10,\ 1)$을 지나고 $3\pi<10$이므로 $y=\sin x$와 $y=\frac{x}{10}$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



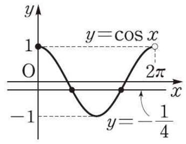
위의 그림에서 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 7이다.

14.

12 $4\cos\frac{x}{n}+1=0$에서 $\qquad \cos\frac{x}{n}=-\frac{1}{4}$

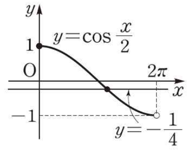
(i) $n=1$이면 $\cos x=-\frac{1}{4}$이므로

$a_1=2$



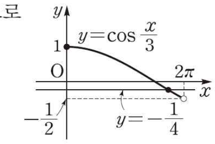
(ii) $n=2$이면 $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{4}$이므로

$a_2=1$



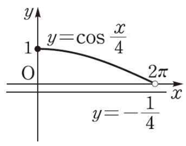
(iii) $n=3$이면 $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{4}$이므로

$a_3=1$



(iv) $n\ge4$이면 $y=\cos\frac{x}{n}$의 주기는 8π 이상이므로 오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 $y=\cos\frac{x}{n}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{4}$은 만나지 않는다.

$a_n=0$



이상에서 $\qquad \sum_{k=1}^{10}a_k=2+1+1=\mathbf{4}$

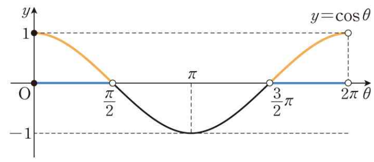
15.

이차방정식 $\quad x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta=0$의 판별식을 D라고 하면 주어진 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립할 조건은 $D<0$이므로

$$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-2\cos\theta<0$$

$\cos\theta(\cos\theta-2)<0$, 즉 $\ 0<\cos\theta<2$

한편, $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\ 0<\cos\theta\le1$



따라서 구하는 θ의 값의 범위는

$$0\le\theta<\frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$