<28일 작전 수리논술> 논술/심층 모의고사 2회

<28일 작전 수리논술>은 https://atom.ac/books/13567/에서 구매 가능합니다.

총 4문항	총 100점	제한 시간: 100분

[1] 함수 $f(x)$가 다음의 조건을 만족한다. **[총 12점]**

<조건 1> $f(x):(0,\infty)\to(0,\infty)$

<조건 2> $f(x)$는 미분 가능하며, $f'(x)\neq 0$이다.

<조건 3> $f(2x)=-\dfrac{\{f(x)\}^3}{2f'(x)}$

<조건 4> 모든 양의 정수 n에 대하여 $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^n f(x)}dx=\frac{1}{2^{n-2}}$가 성립한다.

<조건 5> $f(2)=4$

[1-1] $a_n=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}\{f(x)\}^2}dx$이라고 할 때 a_n의 값을 $f(1), f(2)$를 이용해 나타내시오. **[8점]**

[1-2] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n$의 값이 존재하기 위한 $f(1)$의 값을 구하고, 그때의 수렴값을 구하시오. **[4점]**

[2] 다음의 제시문을 읽고 소문항에 답하시오. **[총 23점]**

함수 $f(x)$는 다음의 조건을 만족한다.

<조건 1> $f(x)$가 $[0,1]$에서 두 번 미분 가능하다.

<조건 2> $f(0)=0,\ f(1)=1$이다.

<조건 3> 실수 $M>0$에 대해 $[0,1]$에서 $0\le f''(x)\le M$이다.

그리고 함수 $h(x)$가 두 번 미분가능하고, 아래로 볼록이면 다음의 식이 성립한다.

$$h((1-t)a+tb)\le th(a)+(1-t)h(b)\quad (0\le t\le 1)$$

이때 a, b는 임의의 실수이다.

[2-1] $I(f)=\displaystyle\int_0^1 f(x)(1-x)dx$의 값을 최대화 시키는 $f(x)$를 $f^{(1)}(x)$라고 하자. 이때 $f^{(1)}(x)$, $I(f^{(1)})$를 구하시오. **[9점]**

[2-2] $J(f)=\displaystyle\int_0^1 (f(x)-x)^2dx$의 값을 최대화 시키는 $f(x)$를 $f^{(2)}(x)$라고 하자. 이때 $f^{(2)}(x)$, $J(f^{(2)})$를 구하시오. **[14점]**

[3] 다음의 제시문을 읽고 소문항에 답하시오. **[총 30점]**

<조건 1> $\lvert x-a[a]\rvert < (a+1)[a+1]$의 해가 $L < x < H$이다. <조건 2> 1이상 k이하의 자연수 i에 대하여 $H = i^2$일 때, a가 존재하도록 하는 i의 개수를 a_k라고 정의한다. (단, $a > 0$이고, $[k]$는 k를 넘지 않는 최대 정수이다.)

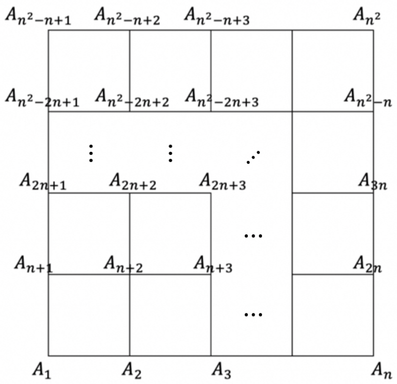
[3-1] 자연수 m에 대하여 $H = 2m^2$을 만족하는 a가 존재하지 않음을 증명하시오. **[10점]**

[3-2] a_{10}의 값을 구하시오. **[5점]**

[3-3] $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{k}$의 값을 구하시오. **[15점]**

[4] 다음의 제시문을 읽고 소문항에 답하시오. **[총 35점]**

한 변의 길이가 1인 단위정사각형을 $(n-1)\times(n-1)$개를 모아 만든 격자에서, $A_1, A_2, \cdots, A_{n^2}$를 각 꼭짓점의 좌표로 설정한다.(<그림 1> 참고)



<그림 1>

자연수 p에 대해 S_p와 a_p를 다음과 같이 정의하자. (단, $\lvert\vec{a}\rvert$는 $\vec{a}$의 크기이다.)

$$S_p = \sum_{k=1}^{n^2-k}\overrightarrow{A_kA_{k+p}},\ a_p = \lvert S_p\rvert$$

그리고 $p = nq + r\,(0 \le q \le n-1,\ 0 \le r \le n-1)$이라고 정의한다.

[4-1] S_p의 좌표를 n, q, r로 나타내시오. (단, <그림 1>은 x, y좌표계를 따른다.) **[17점]**

[4-2] a_p의 값이 최대가 되도록 하는 p의 값을 $p_{\max}$라 하자. 이때 $p_{\max}$를 n을 이용해 나타내고, 그때 $a_{p_{\max}}$를 n을 이용해 나타내시오. **[12점]**

[4-3] $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{p_{\max}}}{n^3}$의 값을 구하시오. **[6점]**