<28일 작전 수리논술>논술/심층 모의고사 1회 해설

본교재 안내

<28일 작전 수리논술>은 https://atom.ac/books/13567에서 구매 가능합니다.

[1] 함수 $f(x)$

문제 요약. $F'(x) = f(x)$인 연속함수 F가 존재하고

$$f(x) = \frac{(1 - F(x)\sin x)\, F(x)}{x}, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}.$$

$f(2026\pi)$를 구하라.

풀이

식 $f(x) = \dfrac{(1 - F\sin x)F}{x}$에서

$$\frac{1}{F} - \frac{xf}{F^2} = \sin x \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{F}\right) = \sin x.$$

적분하면

$$\frac{x}{F} = -\cos x + C \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \frac{x}{C - \cos x}.$$

따라서

$$f(x) = \frac{C - \cos x - x\sin x}{(C - \cos x)^2}.$$

조건 $f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{2\pi}$ 대입:

$$\frac{C - \frac{\pi}{2}}{C^2} = \frac{1}{2\pi} \implies C^2 - 2\pi C + \pi^2 = 0 \implies C = \pi.$$

즉

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi - \cos x - x\sin x}{(\pi - \cos x)^2}}.$$

이제 $x = 2026\pi$에서 $\cos(2026\pi) = 1,\ \sin(2026\pi) = 0$이므로

$$\boxed{f(2026\pi) = \frac{1}{\pi - 1}}.$$

---

[2] 연속확률변수 X, Y

밀도 $f(x) = -k \ln x$ $(0 < x \le 1)$, $Y = \langle nX \rangle$ (내림), $a_n = E[Y]$.

[2-1] 상수 k

정규화:

$$\int_0^1 -k \ln x \, dx = k \cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 1}.$$

[2-2] a_2

구간 $[0, 1/2)$에서는 기여가 0, $[1/2, 1]$에서는 1이므로

$$a_2 = 0 \times \int_0^{1/2} (-\ln x) \, dx + 1 \times \int_{1/2}^1 (-\ln x) \, dx = \boxed{\frac{1 - \ln 2}{2}}.$$

[2-3] $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$

구간 $[k/n, (k+1)/n)$에서 값이 k이므로

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{k/n}^{(k+1)/n} (-\ln x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{n} - \frac{k+1}{n} \ln \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(1 + \ln \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} + \ln n \right)$$

$$= \frac{n-1}{2}(1 + \ln n) + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{0^0}{1^0} \cdot \frac{1^1}{2^1} \cdot \frac{2^2}{3^2} \cdots \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \right)$$

$$= \frac{n-1}{2}(1 + \ln n) + \frac{1}{n} \ln \left\{ \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{2}{n} \right)^2 \cdots \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{n-1}{2}(1 + \ln n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n} - \frac{n-1}{2} \ln n = \frac{n-1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n}.$$

따라서

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \ln \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \int_0^1 x \ln x \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

---

[3] 구의 그림자 넓이 $S(\theta)$

그림자 면적(또는 부채꼴/활 합) $A(\theta)$로 두고 $S(\theta) = \dfrac{A(\theta)}{\sin\theta}$.

[3-1] 구간별 $S(\theta)$ 표현

(i) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$$A(\theta) = 2 \times \left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\Big(\frac{3}{2}\pi - 2\theta\Big) + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\Big(\frac{\pi}{2} + 2\theta\Big)\right] = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + \cos 2\theta,$$

$$\boxed{S(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\Big(\frac{3}{2}\pi - 2\theta + \cos 2\theta\Big)}.$$

(ii) $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$

$$A(\theta) = 2 \times \left[\frac{1}{2}\Big(2\theta + \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\Big(\frac{3}{2}\pi - 2\theta\Big)\right] = 2\theta + \frac{\pi}{2} - \cos 2\theta,$$

$$\boxed{S(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\Big(2\theta + \frac{\pi}{2} - \cos 2\theta\Big)}.$$

(iii) $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$

$$A(\theta) = 2 \times \left[\frac{1}{2}\cdot 1^2\Big(\frac{7}{2}\pi - 2\theta\Big) + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\Big(2\theta - \frac{3}{2}\pi\Big)\right] = \frac{7}{2}\pi - 2\theta + \cos 2\theta,$$

$$\boxed{S(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\Big(\frac{7}{2}\pi - 2\theta + \cos 2\theta\Big)}.$$

[3-2] $S(\theta)$의 최소

각 구간에서 $S(\theta) = \dfrac{N(\theta)}{\sin\theta}$로 두면

$$S'(\theta) = \frac{N'(\theta)\sin\theta - N(\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

(i) 구간에서 $N_1(\theta) = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + \cos 2\theta$, $N_1'(\theta) = -2 - 2\sin 2\theta < 0$이고 $\sin\theta > 0$, $N_1(\theta) > 0$ 이므로

$$S_1'(\theta) = \frac{(-2 - 2\sin 2\theta)\sin\theta - N_1(\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} < 0.$$

즉 S_1은 $(0, \frac{\pi}{4}]$에서 감소하여 $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 최솟값을 갖는다.

(ii) 구간에서 $N_2(\theta) = 2\theta + \frac{\pi}{2} - \cos 2\theta$, $N_2'(\theta) = 2 + 2\sin 2\theta \ge 0$이고 계산하면

$$S_2'(\theta) = \frac{(2 + 2\sin 2\theta)\sin\theta - N_2(\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} > 0 \quad \big(\tfrac{\pi}{4} < \theta < \tfrac{3\pi}{4}\big),$$

따라서 S_2는 증가한다.

(iii) 구간에서도 같은 방식으로 $S_3'(\theta) > 0$이 되어 증가한다. 결론적으로 전역 최소는 구간 경계 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$에서 발생하며

$$S\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\sqrt{2}\,\pi}.$$

---

[4] 타원 $x^2 + \dfrac{y^2}{k^2} = 1$과 외부점 P의 두 접선 끼인각 θ

점 $P(X, Y)$를 지나 기울기 m인 직선 $y = mx + c$가 *접선*이 되려면, 타원과의 교점 방정식의 **판별식이 0**이어야 한다. $c = Y - mX$를 대입하고 x에 관한 이차식의 판별식 $\Delta_x = 0$을 정리하면

$$\boxed{(X^2-1)m^2 + 2XY\,m + (Y^2 - k^2) = 0} \qquad (\star)$$

이 된다(이 식의 해 m_1, m_2는 P에서 그은 두 접선의 기울기).

또한

$$m_1 + m_2 = -\frac{2XY}{X^2-1}, \qquad m_1 m_2 = \frac{Y^2-k^2}{X^2-1}.$$

[4-1] $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 P의 자취

두 접선이 서로 수직이면 $m_1 m_2 = -1$이므로 $(\star)$의 근곱을 이용해

$$\frac{Y^2-k^2}{X^2-1} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{X^2 + Y^2 = 1 + k^2}.$$

[4-2] $\theta \neq \frac{\pi}{2}$일 때 P의 자취가 원이 되도록 하는 k

두 직선의 끼인각 공식

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| \quad \Rightarrow \quad \tan^2\theta\,(1 + m_1 m_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2.$$

$(\star)$의 근합/근곱을 대입하면

$$\tan^2\theta\left(\frac{Y^2 - k^2 + X^2 - 1}{X^2-1}\right)^2 = \left(\frac{2XY}{X^2-1}\right)^2 - 4\cdot\frac{Y^2-k^2}{X^2-1}. \qquad (\diamond)$$

만약 P의 자취가 반지름 r인 원 $X^2 + Y^2 = r^2$라 하면 $Y^2 = r^2 - X^2$를 $(\diamond)$에 대입하여 정리하면

$$\tan^2\theta = \frac{4\big(k^2X^2 + r^2X^2 - X^2 - k^2\big)}{(r^2-1-k^2)^2}.$$

θ가 일정하려면 우변이 X에 무관해야 하므로 X^2의 계수가 0, 즉

$$\boxed{k = 1}.$$