2026학년도 정원 모의고사 1회
정답과 해설

빠른 정답

1	2	3	4	5
④	①	⑤	②	①
6	7	8	9	10
④	③	③	①	②
11	12	13	14	15
④	⑤	②	③	④
16	17	18	19	20
9	56	205	11	2
21	22	23	24	25
9	80	①	③	④
26	27	28	29	30
③	②	⑤	71	400

등급 컷 예상 : 80 (미적분), 84 (확률과 통계)
총평 : 최근 기조를 반영하여 단원을 배치한 시험지입니다. 근 2년간 평가원이 22번, 28번에 한하여 6/9월 모의평가의 유형을 수능에도 이어내고자 하는 움직임을 보이고 있기에, 이에 대비할 수 있도록 하였습니다.
또한 평가원은 작년의 킬러 및 사교육 문항 배제의 기조에서 조금은 벗어난 듯한 문항들을 올해 들어 출제하고 있습니다. 이 점을 고려하여 적당한 신선함과 함께 사설 문항에서 자주 사용되는 논리들을 소량 첨가했습니다.
이 시험지가 수능 2교시의 100분 중 1분이나마 여러분께 도움이 되길 바랍니다.

1. 지수법칙에 의하여 $\left(4^{(2\sqrt{2}-2)}\right)^{\sqrt{2}+1}$
$$=2^{4(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=16$$

2. 미분계수의 정의에 의하여 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(h-2)-f(-2)}{h}=f'(-2)$

$f(x)$를 미분하여 $f'(x)=3x^2-2$

곧, $f'(-2)=10$

3. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 할 때,

$\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_1}=2$으로부터 $r^2-r=2$, $r=-1$ 또는 $r=2$

$a_2+a_3\neq0$이므로 $r=2$, $a_1=1$

곧, $a_5=16$

4. 함수 $f(x)$는 $x<a$과 $x\geq a$에서 각각 다항함수의 일부이므로 각각의 구간에서 연속이다. $x=a$에서 함수 $f(x)$는 연속이고

곧 $\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$, $3a=a^2-a$

$\therefore a=4\ (a>0)$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{x^4}{x^2+1}dx$이며 곧

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^4}{x^2+1}dx-\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{x^4-1}{x^2+1}dx$$

$$=\int_{0}^{1}(x^2-1)dx=-\frac{2}{3}$$

6. $1+\tan^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=(2\sin\theta)^2$

곧, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=0$로부터 $\sin\theta=\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=2$로부터 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

$f'(1)=3x^2-12x+a\big|_{x=1}=0$, $a=9$

$b=f(1)=4$이고 곧, $a-b=5$

8. n이 짝수일 때 $f(n)$의 값으로 가능한 것들은 0, 1, 2이다.

$g(n)=n^2-an$이라 할 때, $f(4)\neq f(6)$, $f(6)\neq f(8)$을 만족시키기 위해선 $g(4)\times g(6)\leq 0$, $g(6)\times g(8)\leq 0$이어야 한다.

$g(6)\neq 0$인 경우, $g(4)\times g(6)>0$이거나 $g(6)\times g(8)>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

곧, $g(6)=0$이고 $a=6$

9. 극한 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^2}$이 수렴하므로 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선임을 얻는다. … ㉠

이때 $a=0$인 경우, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{2(x-2)^3}=0$을 만족시키기 위해선 $f(x)=k(x-2)^3$, $g(x)=m(x-2)$ $(k>0,\ m\neq 0)$이어야 한다.

이는 ㉠에 모순이므로 $a\neq 0$

이때 $g(2)\neq 0$인 경우와 $g(2)=0$인 경우로 나누어 생각해보자.

(i) $g(2)\neq 0$인 경우

양수 k에 대하여 $f(x)=k(x-2)^3$라 할 때, ㉠과 삼차함수의 불변량으로부터 $f(x)-g(x)=k(x-1)^2(x-4)$

한편 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{2(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{kg(x)}{2}=k^2$이고

곧, $a=-3k=k^2$이고 이를 만족시키는 양수 k는 존재하지 않으므로 모순이다.

(ii) $g(2)=0$인 경우

$f(2)=f'(2)=0$이고 $g(2)=0$이므로, 직선 $y=g(x)$는 점 $(1, f(1))$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(2, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$와 다시 만난다. ($\because$ ㉠)

삼차함수의 불변량에 의해 $f(x)=kx(x-2)^2$ $(k>0)$이라 하면, $g(x)=-k(x-2)$이고 주어진 극한에 의하여

$-k=-k^2=a$, $k=1$

곧, $f(x)=x(x-2)^2$, $g(x)=-(x-2)$

$f(a)\times g(a)=f(-1)\times g(-1)$

$=(-9)\times 3=-27$

출제자 Comment : 수식을 다루는 관점에 따라 계산량의 차이가 많이 날 수 있습니다. 어떤 접선과 인수를 기준으로 식을 작성할 것인지 고민하는 습관을 들입시다.

10. 주어진 사각형 ABCD는 원에 내접하고 세 변의 길이가 같으므로 등변사다리꼴이다.

이때 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=x+2$로 두고 점 A에서 변 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면, 직각삼각형 ACH로부터 $\overline{CH}=1$, $\overline{AH}=\sqrt{(x+2)^2-1}$이다.

이때 삼각형 BCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AH}$

$\sqrt{(x+1)(x+3)}\times(x+2)=10\sqrt{6}$

$\therefore x=3$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $3\sqrt{6}$

출제자 Comment : 최근 평가원은 주어진 도형 상황을 직접 작도해야 하는 문항들을 출제하고 있습니다. 이러한 흐름을 반영해 제작한 문항입니다. 등변사다리꼴이라는 도형 상황에 대한 인식 없이 수식적으로 해당 문항을 풀고자 한 학생들은 어려움을 겪었을 것입니다. 문제에서 주어진 도형을 작도하는 연습을 해봅시다.

11. 주어진 함수 $f(x)$를 정리하면 $f(x)=\begin{cases}3ax & (x<0)\\ -ax & (x\geq 0)\end{cases}$ 이고,

$x<0$과 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는 각각 일차함수의 일부이다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 접하므로, 원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 두 접선이 각각 $y=3ax$, $y=-ax$

한편, 곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $y=3ax$, $y=-ax$와의 접점을 각각 A, B라 하자. 이차함수 $g(x)$의 대칭축이 $x=1$이므로,

$|x_A-1|=3\times|x_B-1|$, $1-x_A=3x_B-3$ … ㉠

이때 원점 O에 대하여 곡선 $y=g(x)$와 y축 및 직선 OA로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 y축 및 직선 OB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면 $S_1=S_2=16$이다. … ㉡

이때 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 m이라 하면

$$S_1=\int_{x_A}^{0}\{g(x)-3ax\}dx=\int_{x_A}^{0}m(x-x_A)^2dx$$

$$S_2=\int_{0}^{x_B}\{g(x)+ax\}dx=\int_{0}^{x_B}m(x-x_B)^2dx$$

이므로 ㉠과 ㉡에 의하여 $x_A=-2$, $x_B=2$이고 $m=6$

곧, $f'(2)=12=-a$이고 $f(x)=6(x-2)^2+12x=6(x-1)^2+18$

$\therefore a+k=-12+18=6$

출제자 Comment : 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 최근 들어 평가원 시험지에서 빠지지 않는 단골 소재입니다. 이차함수에서 그은 두 접선의 교점은 두 접점의 중점임을 이용한다면 비교적 간단하게 해결할 수 있는 문항이었습니다.

12. $\sum_{n=1}^{m}(-1)^nS_n$에서 $m=2p-1$일 때와 $m=2p$일 때로 나누어 관찰하자. (p는 자연수)

$\sum_{n=1}^{2p-1}(-1)^nS_n=-pa_p$, $\sum_{n=1}^{2p}(-1)^nS_n=pa_{p+1}$

$\{a_n\}$의 공차를 d라 하고 $\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}a_n$을 동일하게 관찰하면

$\sum_{n=1}^{2p-1}(-1)^{n+1}a_n=a_p$, $\sum_{n=1}^{2p}(-1)^{n+1}a_n=-pd$

즉, $(p+1)a_p=0$이거나 $pa_{p+2}=0$인 자연수 p는 주어진 등식을 만족시킨다.

이때, 주어진 등식을 만족시키는 자연수 m의 값이 하나뿐이므로 이를 만족시키기 위해선 $a_1=0$이거나 $a_2=0$이어야만 한다.

따라서 $a_2=0$ ($\because a_1\neq 0$)이고 $d=6$

$\therefore S_4=12$

출제자 Comment : 수열의 합과 관련하여 홀수와 짝수로 나누어 관찰하는 관점을 적용하는 문항입니다. 낯선 상황을 파악할 때는 경험적으로 알고 있는 익숙한 부분에 집중하며 기본적인 태도를 유지합시다. 또한 등차수열은 미지수가 2개이므로, 초항이 주어진 상태에서 등식을 주었으므로 풀 수 있다는 생각을 했어야 합니다.

13. 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 4개의 사분면을 지나는 경우, 직선은 최대 3개의 서로 다른 사분면을 지날 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않는다.

곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 3개의 사분면을 지나는 경우, 동일한 3개의 사분면을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 무수히 많이 존재하므로 모순이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 두 사분면만을 지나고, 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로 제1사분면과 제3사분면만을 지난다.

곧, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이고 $f(0)=0$, $f'(0)\geq 0$ … ㉠

한편, $f'(0)=0$인 경우 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 0보다 작은 극값을 갖는데 이는 ㉠에 모순이다. $\therefore f'(0)>0$ … ㉡

따라서 직선 $y=g(x)$가 제1사분면과 제3사분면만을 지날 조건은 $g(0)=0$이고 $g'(x)>0$인 것이다. … ㉢

㉠과 ㉡으로부터, $t=0$은 ㉢을 만족시킨다.

따라서, 주어진 조건을 만족시키는 실수 t의 개수가 1이기 위해선 원점이 아닌 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 원점을 지나는 기울기가 양수인 직선이 존재하지 않아야 한다. … ㉣

$\alpha\neq 0$이고 $f(\alpha)=0$인 실수 α가 존재하지 않을 경우, 원점이 아닌 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점과 원점을 지나는 직선의 기울기는 항상 양수이므로 ㉣을 만족시킬 수 없다.

곧, $\alpha\neq 0$, $f(\alpha)=0$이고 $f'(\alpha)=0$인 실수 α가 존재하며

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값 -2를 가지므로 ㉠과 ㉡에 의하여

삼차함수 $f(x)$는 극댓값 0을 갖는다.

이때 양수 k와 음수 α에 대하여 $f(x)=k(x-\alpha)^2x$라 하면

$f'(-1)=0$, $f(-1)=-2$이고 연립하여 $k=\frac{1}{2}$, $\alpha=-3$

$\therefore f(2)=25$

출제자 Comment : 조건을 만족시키는 실수 t의 개수와 관련된 조건을 독해할 땐, 개수 그 자체보다도 개수의 유한함에 먼저 집중하는 것이 유리할 때가 많습니다. 특히 개형 추론 문항에선 풀이 초반부터 정답 상황을 찾기보단, 극단적이거나 특수한 개형을 먼저 잡아보며 주어진 조건을 왜 만족시키지 않는지 고민해봅시다. 이러한 태도를 견지했다면 어렵지 않게 풀리는 문항이었습니다.

14. 수열 $\{a_n\}$은 초항이 자연수인 수열이므로, $\{a_n\}$의 귀납적 정의에 따라 $a_n<0$을 만족시키는 n의 최솟값을 $n=p$라 하면

a_p의 값으로 가능한 것들은 -3, -2, -1이고

이때 a_{p+1}의 값은 각각 $3k+3$, $2k+3$, $k+3$이다.

이때 $a_{p+1}=3k+3$인 경우 수열의 귀납적 정의로부터 $n\ge p$인 n에 대하여 a_n의 값으로 가능한 것들을 크기순으로 나열하면 $-3, 0, \cdots, 3k+3$이다. 이때 집합 $\{a_n\,|\,n$은 자연수$\}$의 원소의 개수는 $k+3$ 이상이고 이는 (가)에 모순이다. ⋯ ㉠

이때 자연수 m에 대하여 $k=3m-2$인 경우, $k=3m-1$인 경우, $k=3m$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $k=3m-2$인 경우

$a_p=-2$라 하면, $a_{p+1}=6m-1$이며 수열의 귀납적 정의로부터 $a_{p+1+2m}=-1$이다. 곧, $a_{p+2m+2}=3m+1$이고 $a_{p+3m+3}=-2$

이때 $p\le n<p+3m+2$인 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 서로 다른 값을 가지므로 집합 $\{a_n\,|\,n$은 자연수$\}$의 원소의 개수는 $k+4$ 이상이고 이는 (가)에 모순이다. ⋯ ㉡

$a_p=-1$인 경우에도 ㉡과 같은 방법으로 (가) 조건에 모순임을 알 수 있다.

(ii) $k=3m-1$인 경우

$a_p=-2$라 하면, $a_{p+1}=6m+1$이며 수열의 귀납적 정의로부터 $a_{p+2+2m}=-2$이고 이때 $n\ge p$인 자연수 n에 대하여 a_n의 값으로 가능한 것들의 개수는 $2m+1$이다.

이때 집합 $\{a_n\,|\,n$은 자연수$\}$의 원소의 개수가 k가 되기 위해선

$a_1=(6m+1)+3\times(m-2)$ $(m>2)$이어야 함을 얻는다. ⋯ ㉢

$a_p=-1$인 경우에도 ㉢과 같은 방법으로

$a_1=(3m+2)+3\times(2m-3)$ $(m\ge 2)$이어야 함을 얻는다.

(iii) $k=3m$인 경우

수열의 귀납적 정의로부터 $a_q=-3$을 만족시키는 자연수 q가 존재하고 이는 ㉠에 의하여 모순이다.

따라서 $k=3m-1$이고 $a_1=9m-5$ 또는 $a_1=9m-7$이어야 한다.

이때 a_1은 110 이하의 자연수이므로 $2\le m\le 13$

따라서 k의 값으로 가능한 것들의 합은 258이다.

출제자 Comment : 수열의 항들이 가지는 값으로 가능한 것들의 개수가 유한하므로, 주기성을 떠올리는 것이 필연적인 사고입니다. 이때 수열의 주기와 관련하여 3에 대한 나머지가 영향을 미침을 파악하는 것이 포인트였습니다. 나열을 통한 발견적 추론이 수열을 다루는 기본적인 태도이지만, 귀납적으로 정의된 수열 파트에 대한 수험생들의 이해도가 올라간만큼 해당 단원에서 변별력을 주고자 할 경우 단순 나열만으로는 해결하기 어려운 문항이 출제될 수 있음에 유의합시다.

15. $g(x)=(x-a)h(x)$를 만족시키는 삼차함수 $h(x)$를 생각하자.

이때 $g(x)=(x-a)f(x)$로부터 $f(x)=\begin{cases} h(x) & (x\ne a) \\ f(a) & (x=a) \end{cases}$ 이다.

⋯ ㉠

한편 $g(\alpha)=g(\beta)=0$를 만족시키는 서로 다른 두 실수 α, β가 존재한다 하자. 이때 x에 대한 방정식 $g(f(x))=0$의 실근이 존재하지 않기 위해선 x에 대한 두 방정식 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$의 실근이 모두 존재하지 않아야 한다.

그런데 ㉠으로부터 함수 $f(x)$의 치역에 포함되지 않을 수 있는 실수의 개수는 최대 1이므로 이는 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 실근은 오직 $x=a$뿐이다.

… ㉡

이때 ㉠에서 $f(x)$는 오직 $x=a$에서만 불연속일 수 있으며 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$의 치역에 포함되지 않을 수 있는 실수의 값은 0뿐이다. 곧, $a=0$이며 ㉡으로부터 $h(0)=0$

이때 (나)에서 $f(0)=16\neq h(0)$이며, 따라서 x에 대한 방정식 $h(x)=16$의 서로 다른 실근은 $x=k$와 $x=4k$뿐이다.

곧, $h(x)=(x-k)^2(x-4k)+16$ 또는 $h(x)=(x-k)(x-4k)^2+16$

(i) $h(x)=(x-k)^2(x-4k)+16$인 경우

$h(0)=0$이고 삼차함수의 비율관계로부터 $h(3k)=0$

x에 대한 방정식 $h(x)=0$을 만족시키는 0이 아닌 실수 x가 존재하므로 ㉡에 모순이다.

(ii) $h(x)=(x-k)(x-4k)^2+16$인 경우

$h(0)=0$을 대입하여 $k=1$, $h(x)=(x-1)(x-4)^2+16$

곧, $x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=(x-1)(x-4)^2+16$이고

$f(a+5)=20$

출제자 Comment : 다항함수에 대한 등식이 주어졌을 때, 무심코 주어진 인수로 약분하는 수험생들이 많습니다. 연속이라는 조건을 의식적으로 확인하는 습관을 들입시다. 손승연 선생님의 표현을 빌리자면, 연속은 약분 가능성입니다. (승연쌤 팬입니다)

16. 주어진 방정식의 양변에 2를 곱하여 $2\log_3 x=\log_3(2x+9)+1$

곧, $x^2=6x+27$이고 $x=9$ ($\because x>0$)

17. $f'(2)=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=(x+2)(3x^2+2)\Big|_{x=2}=56$$

18. $\sum_{k=1}^{10}(k^2+4)-4\sum_{k=1}^{10}k=\sum_{k=1}^{10}(k-2)^2=205$

$\sum_{k=1}^{4}(a_k+a_{9-k})=\sum_{n=1}^{8}a_n=205$

19. $g(x)=\int_2^x f(t)dt-2x=\int_2^x\{f(t)-2\}dt-4$이고

곧, 함수 $\int_2^x\{f(t)-2\}dt$는 $x=0$에서 극댓값 4를 갖는다.

$\int_2^x\{f(t)-2\}dt=(x+1)(x-2)^2$, $f(x)=3x(x-2)+2$

따라서 $f(3)=11$

20. x에 대한 방정식 $\cos x=b$는 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때 $\cos\alpha=\cos\beta=b$ $\left(\alpha<\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}<\beta\right)$ 라 하면 주어진 부등식을 만족시키기 위해

$\{x|\,2\sin ax+\sqrt{3}\le 0\}\cap\{x|\,0\le x\le 2\pi\}=\{x|\,\alpha\le x\le\beta\}$

이어야 함을 알 수 있다. … ㉠

한편 $\alpha+\beta=2\pi$이므로 곡선 $y=2\sin ax$는 $x=\pi$에 대하여 대칭이어야 하며, $0\le x\le 2\pi$에서 $2\sin ax+\sqrt{3}$의 값의 부호는 오직 $x=\alpha$, $x=\beta$에서만 변화하여야 한다. … ㉡

곧, ㉠과 ㉡에 의하여 $a=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, $\beta=\frac{4\pi}{3}$이므로 $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a-5b=2$

출제자 Comment : 부등식이 주어질 때, 등호가 성립하는 조건만 확인하고 정확한 부호변화를 체크하지 않는 습관이 있는 수험생이 많습니다. 무심코 $a=\frac{1}{2}$이라 한 학생들은 앞으로 주의하는 기회가 되길 바랍니다.

21. 점 P는 $t=0$일 때 원점을 출발하므로 시각 $t\,(t\geq 0)$에서 점

P의 위치를 x라 하면 $x(t)=a\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right)$

이때 출발한 이후 점 P의 위치가 k가 되도록 하는 서로 다른

시각의 개수가 2이기 위해선 t에 대한 방정식

$a\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right)=k$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2 … ㉠

a의 부호에 따라 경우를 나눠 관찰하자.

(i) $a=0$인 경우

$x=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못해 모순이다.

(ii) $a<0$인 경우

$v(1)=v(5)=0$으로부터 함수 $x(t)$는 $t=1$에서 극솟값 $-\frac{7a}{3}$,

$t=5$에서 극댓값 $\frac{25a}{3}$를 갖는다. … ㉡

이때 $t>0$에서 방정식 $x(t)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가

되도록 하는 음수 k의 값은 $-\frac{7a}{3}$뿐이며, 주어진 조건을

만족시키기 위해 $\frac{7a}{3}$는 정수이다.

이때 방정식 $x(t)=\frac{7a}{3}$, $x(t)=\frac{14a}{3}$, $x(t)=7a$는 모두 서로 다른

두 실근을 가지므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 k의 값의

합은 양수이므로 모순이다.

(iii) $a<0$인 경우

㉡으로부터 $t>0$에서 $\frac{25a}{3}<k<0$인 모든 실수 k에 대하여

방정식 $x(t)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이때 방정식 $x(t)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록

하는 양수 k의 값은 $-\frac{7a}{3}$뿐이다.

$-\frac{7a}{3}$의 값이 정수가 아닐 경우, $\frac{25a}{3}<k<0$인 모든 음의 정수

k의 값의 합이 -5여야 하므로 모순이다.

따라서 $-\frac{7a}{3}$의 값은 정수이며, $\frac{7a}{3}$, $\frac{14a}{3}$, $7a$의 값도 정수이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합을 M

이라 하면, $M\leq\frac{35a}{3}$이다.

한편 $\frac{7a}{3}\leq-1$이므로 $M\leq-5$이며 등호는 $a=-\frac{3}{7}$일 때 성립

한다. 곧, $a=-\frac{3}{7}$이며 $|v(8)|=9$

출제자 Comment : 점의 직선운동에 대하여 가속도와 속도, 위치 함수는 항상 $t\geq 0$에서 정의된다는 점을 이용하는 문항입니다. 또한 연속된 정수의 합으로 가능한 값에 대한 조건을 추가하여 약간의 낯섦을 느낄 수 있도록 하였습니다.

22. 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\log_2(-x+k)$를 y축 방향으로

2만큼 평행이동한 곡선이며, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-k$를

x축 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이다.

두 곡선 $y=\log_2(x+k)$, $y=2^x-k$는 직선 $y=x$에 대하여

대칭이므로 두 곡선 $y=\log_2(-x+k)$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-k$는 직선

$y=-x$에 대하여 대칭이다.

이때 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 C, $3:2$로 외분하는 점을

D라 하면, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$이고 네 점 A, B, C, D는 기울기가

-1인 한 직선 위에 있다.

한편 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의

관계는 두 곡선 $y=\log_2(-x+k)$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-k-2$의 관계와

같으며 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-k-2$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-k$를 x축

방향으로 2만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 점 A, B를 y축 방향으로 -2만큼

평행이동한 점 A$'$, B$'$과 점 C, D를 x축 방향으로 -2만큼

평행이동한 점 C$'$, D$'$에 대하여 점 A$'$과 점 C$'$, 점 B$'$과 점 D$'$은

각각 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

한편 C$'$, D$'$를 x축 방향으로 2, y축 방향으로 -2만큼

평행이동한 점을 각각 점 E, F라 하면 네 점 A$'$, B$'$, E, F는

기울기가 -1인 한 직선 위에 있으며 $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{B'E}}=\overline{\mathrm{EF}}$임을

얻는다.

곧, $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{B'E}}=\overline{\mathrm{EF}}$에 의하여 점 A$'$과 점 B$'$은 곡선

$y=\log_2(-x+k)$과 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-k$의 교점이며 두 점의 x좌표

차이는 1임을 얻는다. 따라서 점 A$'$의 x좌표를 α라 할 때,

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}-k=-\alpha \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}-k=-\alpha-1 \end{cases}$$

이며 두 식을 연립하여 $\alpha=-1$, $k=1$을 얻는다.

출제자 Comment : 올해 들어 평가원은 22번 자리에 지수/로그 함수의 그래프 단원을 고정하고 있습니다. 작년 귀납적으로 정의된 수열의 경우를 생각해보면, 올해 수능에서도 6월과 9월의 배치를 따라갈 가능성이 높아보입니다. 이미 유형을 보여주었다는 판단 하에, 난도가 올라갈 가능성을 고려하여 비교적 생소한 $y=-x$에 대한 대칭을 묻는 문항을 출제하였습니다.

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\sec 2x-1}{x\ln(1+2x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2\cos 2x}\times\frac{x}{\ln(1+2x)}$

$=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}=1$

24. $f(x)=e^x(x^2+kx)$라 하면, $f(x)$의 한 변곡점의 x좌표가 -1

이므로 $f''(-1)=0$이다.

곧, $e^x(x^2+(k+4)x+2k+2)\big|_{x=-1}=0$이고 $k=1$

25. $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n}{2a_n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{\frac{2a_n-4n^2}{n}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{3n+4}$

$=2$

26. 주어진 식으로부터

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$

27. 모든 실수 t에 대하여 $\frac{dy}{dt}=3t^2+1>0$

이때 모든 실수 x에 대하여 함수 $y=f(x)$가 정의되므로

모든 실수 t에 대하여 $\frac{dx}{dt}\geq 0$

곧, $e^t\geq -2a(t+1)$이며 $-\frac{1}{2}\leq a<0$

a의 값이 최소일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+1}{e^t-t-1}$이고 $t=1$을 대입하여

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=\frac{4}{e-2}$

28. 주어진 식을 변형하여 $\frac{3x^n}{x^4+x^2+1}=(1-\cos f(x))e^{\frac{\pi}{2}-|f(x)|}$를

얻는다. 이때 $g(x)=\frac{3x^n}{x^4+x^2+1}$, $h(x)=(1-\cos x)e^{\frac{\pi}{2}-|x|}$라 하면

모든 실수 x에 대하여 $g(x)=h(f(x))$이다.

함수 $h(x)$를 미분하여 개형을 관찰하면, $h(x)$는 $x=0$에 대하여 대칭인 우함수이고 $x\ge 0$에서 $h'(x)=(\sin x+\cos x-1)e^{\frac{\pi}{2}-x}$이다.

이때 함수 $h(x)$는 $x=\pm 2n\pi$ (n은 자연수)에서 최솟값 0을 가지며 $x=\pm\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 1을 갖는다. … ㉠

n이 홀수인 경우, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 부호변화를 가지며 이는 ㉠에 모순이다.

$n\ge 4$인 경우, $\lim_{x\to\infty} g(x)>1$이고 이는 ㉠에 모순이다.

따라서 $n=2$이며, $g(x)=\frac{3x^2}{x^4+x^2+1}$이고 $g(x)$를 미분하여

함수 $g(x)$가 $x=\pm 1$에서 동일한 극댓값 1과 $x=0$에서 극솟값 0을 가진다는 것을 알 수 있다. … ㉡

곧, ㉠과 ㉡을 고려할 때 $|f(x)|=\frac{\pi}{2}$를 만족시키는 실수 x가 존재하고, $|f(x)|>2\pi$인 실수 x가 존재할 경우 $h(f(x))=0$을 만족시키는 실수 x의 개수가 2 이상이므로 ㉠에 모순이다.

따라서 $-2\pi\le f(x)\le 2\pi$이며 $f(0)=\pm 2\pi$ 또는 $f(0)=0$이다.

(i) $f(0)=-2\pi$인 경우

$f(x)\ge -2\pi$이고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(0)=0$이다.

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{(x^4+x^2+1)}=3$으로 수렴하지만,

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(f(x))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos f(x))e^{\frac{\pi}{2}+f(x)}}{x}\times\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)(\sin f(x)-\cos f(x)+1)e^{\frac{\pi}{2}+f(x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\{f''(x)(\sin f(x)-\cos f(x)+1)+(f'(x))^2(2\sin f(x)+1)\}$$

$$=0$$

이므로 모순이다. … ㉢

(ii) $f(0)=2\pi$인 경우

$f(x)\le 2\pi$이고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(0)=0$이고 ㉢과 같은 방법으로 모순이다.

(iii) $f(0)=0$인 경우

㉠과 ㉡에 의하여 $|f(-1)|=|f(1)|=\frac{\pi}{2}$이다. 이때 $f(-1)=f(1)$인 경우, $f'(0)=0$이며 ㉢과 같은 방법으로 모순이다.

또한 $f'(2)>0$이므로, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2\pi$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=2\pi$이며

$f(x)$는 증가함수이다. $\therefore f(1)=\frac{\pi}{2}$

출제자 Comment : 24학년도 6월 28번부터 시작된 속함수 추론형 합성함수 문항은, 26학년도 들어 미적분 28번에 계속해서 등장하고 있습니다. 올해 평가원이 출제한 문항들은 극값 자체를 중요한 조건으로 이용하지 않아도 충분히 풀리지만, 22번과 같은 맥락에서 수능에선 더 깊은 이해를 요구하는 문항이 나올 수 있습니다.
이에 대비하는 연습이 되었으면 하는 문항입니다.

29. $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=-\frac{1}{3}$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

이때 $f(0)\ne 0$인 경우, $\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)$의 값은 발산하지만 $\lim_{n\to\infty}f(S_n)$의 값은 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)-\lim_{n\to\infty}f(S_n)=1$를 만족시키지 못한다.

곧, $f(0)=0$이고 $f(a_1)=a_1$이므로 $f(x)=x(x-a_1)+x$라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n)^2-(a_1-1)a_n\right)$이고 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{(a_1)^2}{1-r^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_1-1)a_n=\frac{(a_1-1)a_1}{1-r}$$

이고 $\lim_{n\to\infty}f(S_n)=\left(\frac{a_1}{1-r}\right)^2-\frac{(a_1-1)a_1}{1-r}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)-\lim_{n\to\infty}f(S_n)=\frac{(a_1)^2}{1-r^2}-\left(\frac{a_1}{1-r}\right)^2=1\quad\cdots ㉠$$

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \frac{ar}{1-r} = -\frac{1}{3}$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 $a_1 = \frac{4}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$ 또는 $a_1 = \frac{5}{6}$, $r = -\frac{2}{3}$

따라서 가능한 모든 $f(6)$의 값의 합은 71

출제자 Comment : 주어진 등식으로부터 이차함수의 상수항에 대한 정보와, 소거되는 항들을 파악하였다면 어렵지 않게 풀었을 무난한 등비급수 문항입니다.

30. 곡선 $y = f(x)$ $(x > 0)$과 곡선 $y = te^{-x}$의 교점의 x좌표는

x에 대한 방정식 $e^x f(x) = t$ $(x > 0)$의 실근과 같으며,

주어진 $g(t)$의 정의에 따라 $e^{g(t)} f(g(t)) = t$이다. ⋯ ㉠

이때 $\frac{d}{dx} e^x f(x) = e^x (f(x) + f'(x))$이고 $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$이므로

$e^x f(x) = h(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 $x > 0$에서 증가하고 역함수를 갖는다.

곧, ㉠에 의하여 함수 $g(x)$는 $x > 0$에서 함수 $h(x)$의 역함수이다. ⋯ ㉡

이때 $g(e) = 1$, $g(4e^2) = 2$를 대입하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 4$

$$\int_e^{4e^2} g(t)dt = [tg(t)]_e^{4e^2} - \int_e^{4e^2} tg'(t)dt = (8e^2 - e) - \int_e^{4e^2} tg'(t)dt$$

이고, 곧

$\int_e^{4e^2} tg'(t)dt = 4e^2 - e - 4$이며 ㉡으로부터 역함수의 치환적분을 생각할 수 있다. $g(t) = s$라 하면 $t = h(s)$이고 $g'(t)dt = ds$

$$\int_e^{4e^2} tg'(t)dt = \int_1^2 h(s)ds = \int_1^2 e^s f(s)ds$$

$$\int_1^2 e^s f(s)ds = [e^s f(s)]_1^2 - \int_1^2 e^s f'(s)ds = 4e^2 - e - 4$$

$$\therefore 100 \times \int_1^2 e^x f(x)dx = 400$$

출제자 Comment : 일명 '적분 퍼즐' 문항은 쉽게 출제되어도 현역 수험생들의 경우 경험 부족으로 인해 맞히기 어려워하는 경향이 있습니다. 경험치가 압도적으로 중요하게 작용하는 유형인데다, 9월 모의평가 30번에도 등장한 만큼 충분한 연습을 하는 것이 좋겠습니다.

<마치며>

수능이라는 결전을 위하여 승부사의 길을 걷는 여러분에게,
조금이나마 이 모의고사가 도움이 되었길 바랍니다.
멀리서나마 응원하겠습니다. 감사합니다.

과외 / 팀수업 문의

윤정원

카카오톡 오픈프로필 :

Email : bongil2@snu.ac.kr
Instagram : @gardenmath_

3월 학평 77점에서 수능 백분위 100,
대형 업체/학원 출제진에 이르기까지.
제가 겪었던 모든 시행착오와 통찰을 전달하겠습니다.
출제자의 시선이 여러분의 시선이 되도록.
수능 수학의 정상으로 이끄는 수업을 약속합니다.