2026학년도
Up-Road 모의논술
정답과 해설

(빠른 정답)

1-1.	6	**1-2.**	$\frac{7}{130}$
2-1.	0	**2-2.**	$(1,\ 2)$
3-1.	해설 참조	**3-2.**	2

(출제의도)

(문제 1번) (확률과 통계 - II. 확률)

(1-1)

약수와 배수, 서로소의 개념을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.

	평가 요소	배점
1	a, b, c가 서로소일 때와 아닐 때로 적절히 분류하였는가?	10점
2	순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 정확히 구하였는가?	5점

(1-2)

직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형의 개념을 이용하여 확률을 구하고,
이에 따른 조건부확률을 구할 수 있다.

	평가 요소	배점
1	삼각형 PQR이 둔각삼각형이 되기 위한 R의 좌표를 적절히 구하였는가?	8점
2	선분 PR의 길이가 자연수가 되기 위한 R의 좌표를 적절히 구하였는가?	8점
3	주어진 조건부확률을 정확히 구하였는가?	4점

(문제 2번) (미적분 - II. 미분법)

(2-1)

함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있다.

	평가 요소	배점
1	함수의 극한의 대소 관계를 이용하기 위해 식을 적절히 활용하였는가?	10점
2	주어진 극한의 수렴 및 발산을 정확히 조사하였는가?	5점

(2-2)

곱의 미분법을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그리고,
이를 이용하여 방정식을 만족시키는 정수의 순서쌍을 구할 수 있다.

	평가 요소	배점
1	함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 적절히 판정하였는가?	6점
2	$a,\ b$의 존재성 및 범위를 정확히 구하였는가?	6점
3	순서쌍 $(a,\ b)$를 정확히 구하였는가?	3점

(문제 3번) (수학 - II. 방정식과 부등식, 미적분 - I. 수열의 극한)

(3-1)

이차 이상의 다항식에서의 근과 계수의 관계를 이해한다.

	평가 요소	배점
1	식을 적절히 변형하여 근과 계수의 관계를 이용하였는가?	5점

(3-2)

이차 이상의 다항식에서의 근과 계수의 관계를 이용하여 수열에 대한 관계식을 구하고,
이를 통해 수열의 극한을 조사할 수 있다.

	평가 요소	배점
1	근과 계수의 관계를 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 항에 대한 관계식을 적절히 구하였는가?	15점
2	수열 $\{a_n\}$의 수렴 및 발산을 정확히 조사하였는가?	15점

(해설)

1-1.

$a,\ b,\ c$가 서로소일 때와 서로소가 아닐 때로 경우를 나누자.

(1) $a,\ b,\ c$가 서로소일 때

(제시문 2)에 의하여 $c=\dfrac{m^2+n^2}{2}$ ($m,\ n$은 서로소, $m>n$)으로 나타내면,

$m,\ n$이 부등식 $\dfrac{m^2+n^2}{2}\le 20,\ m^2+n^2\le 40$을

만족하여야 하므로 가능한 $m,\ n$의 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(3,\ 1),\ (5,\ 1),\ (5,\ 3)$

이고, 이 때의 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 각각

$(3,\ 4,\ 5),\ (5,\ 12,\ 13),\ (8,\ 15,\ 17)$

이다.

(2) $a,\ b,\ c$가 서로소가 아닐 때

(제시문 1)의 식을 변형하면

$a^2=c^2-b^2,\ \ b^2=c^2-a^2$이다. 곧, $a,\ b,\ c$ 중

두 수가 공약수를 가지면 나머지 하나도 같은 공약수를 갖는다.

$a=kp,\ b=kq,\ c=kr$ ($k,\ p,\ q,\ r$은 자연수)라 하면

$k^2p^2+k^2q^2=k^2r^2,\ \ p^2+q^2=r^2$

이므로, $p,\ q,\ r$이 공약수를 가지면 다시 등식을 세워

공약수를 나눌 수 있고, $p,\ q,\ r$이 서로소이면 (제시문 2)에 의해

$\dfrac{m^2-n^2}{2},\ mn,\ \dfrac{m^2+n^2}{2}$

으로 나타낼 수 있다.

곧, 피타고라스의 정리를 만족시키는 임의의 세 자연수 $a,\ b,\ c$는

$\frac{m^2-n^2}{2}$, mn, $\frac{m^2+n^2}{2}$

또는

$\frac{k(m^2-n^2)}{2}$, kmn, $\frac{k(m^2+n^2)}{2}$ (k는 2 이상의 자연수)

로 나타낼 수 있다.

(1)에서 구한 순서쌍을 이용하여 가능한 순서쌍을 구하자.

$(a,\ b,\ c)=(3k,\ 4k,\ 5k)$라 하면 $5k \le 20,\ k \le 4$이므로

$k=2,\ 3,\ 4$

$a \ge 5k$이면 $c \ge 13k > 20$이므로 빗변의 길이가 20보다 크다.

따라서 이 때의 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 (a, b, c)는 각각

$(6,\ 8,\ 10),\ (9,\ 12,\ 15),\ (12,\ 16,\ 20)$

이다.

(1), (2)에서, 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 6이다.

1-2.

삼각형 PQR이 둔각삼각형이면

$\angle \mathrm{P} > \frac{\pi}{2}$ 또는 $\angle \mathrm{Q} > \frac{\pi}{2}$ 또는 $\angle \mathrm{R} > \frac{\pi}{2}$이고,

점 R의 y좌표는 0이 아니다.

$\angle \mathrm{P} > \frac{\pi}{2}$이면 점 R의 x좌표가 -5보다 작아야 하므로

점 R은 네 점 $(-10,\ 10),\ (-10,\ -10),\ (-6,\ -10),\ (-6,\ 10)$을

꼭짓점으로 하는 직사각형의 내부 또는 경계에 있고,

이를 만족하는 R의 개수는 $5\times(21-1)=100$이다.

$\angle \mathrm{Q} > \frac{\pi}{2}$이면 점 R의 x좌표가 5보다 커야 하므로

점 R은 네 점 $(6,\ 10),\ (6,\ -10),\ (10,\ -10),\ (10,\ 10)$을

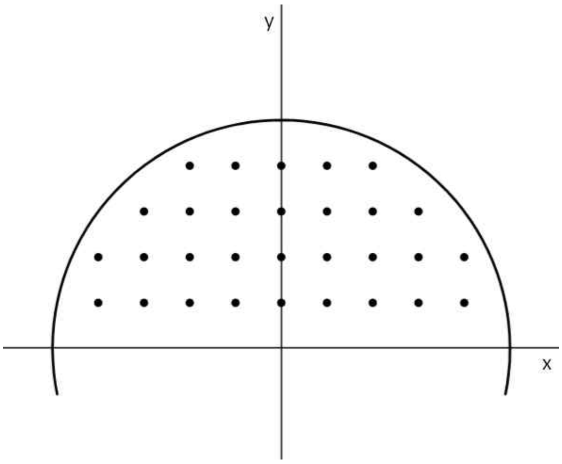
꼭짓점으로 하는 직사각형의 내부 또는 경계에 있고,

이를 만족하는 R의 개수는 $5\times(21-1)=100$이다.

$\angle\mathrm{R}>\dfrac{\pi}{2}$이면 점 R이 원 $x^2+y^2=25$의 내부에 있고,

이를 만족하는 y좌표가 0이 아닌 점의 개수는

아래 그림에 의해 $2\times(5+7+9+9)=60$이다.



네 점 $(10,\ 10)$, $(-10,\ 10)$, $(-10,\ -10)$, $(10,\ -10)$

을 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부 또는 경계에 있고

x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $21\times21=441$이다.

선분 PR의 길이의 최댓값은 점 R의 좌표가 $(-10,\ \pm10)$일 때

$\sqrt{325}$이다. $18<\sqrt{325}<19$이므로,

(1-1)에 의하여 선분 PR의 길이로 가능한 자연수의 값은

$5,\ 10,\ 13,\ 15,\ 17$이다.

$\overline{\mathrm{PR}}=5$이면 $\mathrm{R}=(1,\ \pm3),\ (2,\ \pm4),\ (8,\ \pm4),\ (9,\ \pm3)$

$\overline{\mathrm{PR}}=10$이면 $\mathrm{R}=\varnothing$

$\overline{\mathrm{PR}}=13$이면 $\mathrm{R}=(-7,\ \pm5)$

$\overline{\mathrm{PR}}=15$이면 $\mathrm{R}=(-7,\ \pm9)$

$\overline{\mathrm{PR}}=17$이면 $\mathrm{R}=(-10,\ \pm8)$

이므로, 문제의 조건을 만족시키는 점 R의 개수는 14이다.

따라서 두 사건 A, B를

A : 삼각형 PQR은 둔각삼각형이다.

B : 선분 PR의 길이는 자연수이다.

로 정의할 때,

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{260}{441}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{14}{441}$이므로 $\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \dfrac{14}{260} = \dfrac{7}{130}$이다.

2-1.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $(nx^{n-1} - x^n)e^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$이다.

곧 $x = n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x = n$에서 극댓값 $n^n e^{-n}$을 갖는다.

또한 모든 양수 x에 대하여 $f(x) > 0$이므로

모든 양수 x에 대하여 $0 < f(x) \le n^n e^{-n}$이다.

양변에 $2^n e^{-x}$를 곱하면

$0 < (2x)^n e^{-2x} \le (2n)^n e^{-n-x}$

이므로, 함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim\limits_{x \to \infty} (2x)^n e^{-2x} = 0$이고,

$2x = t$로 치환하면 $x \to \infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$\lim\limits_{t \to \infty} t^n e^{-t} = 0$이다. 따라서 극한 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$는 수렴하고,

그 극한값은 0이다.

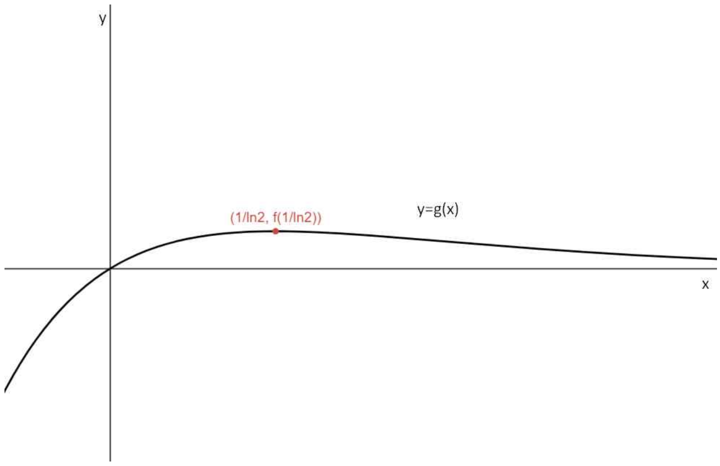
2-2.

$a \times 2^b = b \times 2^a$에서 $a \times 2^{-a} = b \times 2^{-b}$이다.

함수 $g(x) = x \times 2^{-x}$에 대하여 $g(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \times (\ln 2) x^1 \times e^{-x \ln 2}$이므로

(2-1)에 의하여 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$이고, $g'(x) = (1 - x\ln 2) 2^{-x}$이므로,

함수 $y = g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $g(0)=0$이고 $x=\dfrac{1}{\ln 2}$에서 양수인 극댓값을 가지며,

$x>\dfrac{1}{\ln 2}$에서 0으로 감소한다.

따라서 $g(\alpha)=g(\beta)$를 만족시키는 두 실수 α, $\beta(\alpha<\beta)$가 존재하고,

그 범위는 $0<\alpha<\dfrac{1}{\ln 2}<\beta$이다.

$1<\dfrac{1}{\ln 2}<2$이므로, 만약 주어진 등식을 만족시키는

a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$가 존재하면, $a=1$, $b\geq 2$이다.

$b=2$일 때 $1\times\dfrac{1}{2}=2\times\dfrac{1}{4}$이므로 성립하고,

$b\geq 3$이면 $b\times 2^{-b}<\dfrac{1}{2}$이므로 성립하지 않는다.

따라서 주어진 등식을 만족시키는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2)$뿐이다.

3-1.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+n$이 서로 다른 세 점에서 만나므로
세 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면, 제시문에 의하여
$f(x)-(mx+n)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
라 할 수 있다.
$f(x)-(mx+n)=ax^3+bx^2+(c-m)x+(d-n)$
이므로, $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$이고,
이는 실수 $m,\ n$의 값에 관계없이 일정하다.

3-2.

(3-1)에 의하여 세 점 $\mathrm{A}_{n-1},\ \mathrm{B}_n,\ \mathrm{A}_n$은 곡선 C와 직선이 만나는
서로 다른 세 점이므로 x좌표의 합이 일정하고,
주어진 조건에 의하여 점 B_n은 두 점 $\mathrm{A}_{n-1},\ \mathrm{A}_n$을 $2:1$로 내분하는
점이므로, $a_0=0$이라 하면 점 B_n의 x좌표는 $\dfrac{a_{n-1}+2a_n}{3}$이다.
방정식 $x(x-3)^2=0$의 세 실근이 $0,\ 3,\ 3$이므로 그 합은 6이고,
방정식 $x(x-3)^2=mx+n\,(m,\ n$은 실수)의 세 실근의 합 역시 6이므로
$a_{n-1}+a_n+\dfrac{a_{n-1}+2a_n}{3}=6,\ 4a_{n-1}+5a_n=18$
이다. 곧, $n=1$일 때 $a_1=\dfrac{18}{5}$이다.

수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n-2$라 하면, 모든 자연수 n에 대하여
$4b_n+5b_{n+1}=0,\ b_{n+1}=-\dfrac{4}{5}b_n$
이므로 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $-\dfrac{4}{5}$인 등비수열이다.

$a_1 = \frac{18}{5}$이므로, 모든 자연수 n에 대하여

$a_n - 2 = \frac{8}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, $a_n = 2 + \frac{8}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴하고, 그 극한값은 2이다.