

제 2 교시

수학 영역

초월함수의 미분

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{ax+b} - 8}{2^{bx} - 1} = 16$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

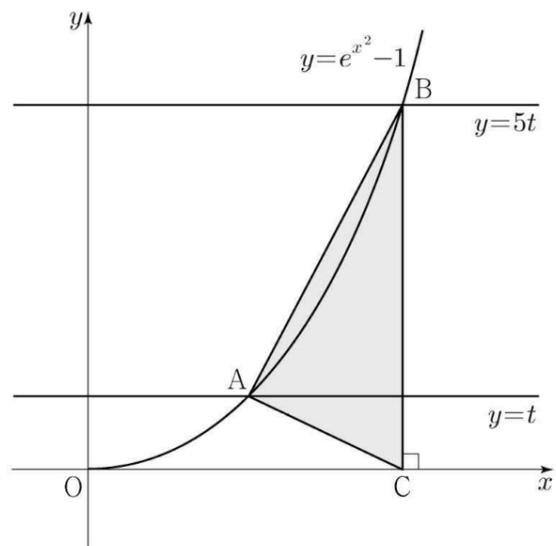
(단, a 와 b 는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2. 양수 t 에 대하여 곡선 $y = e^{x^2} - 1$ ($x \geq 0$)이 두 직선 $y = t$, $y = 5t$ 와 만나는 점을 A, B라 하고, 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$
 ④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



3. $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = -\frac{1}{2}f(x)$ 이다.

$x > 0$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

라 할 때,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \{g(n+t) - g(n-t)\} + 2g(n) = \frac{\ln 2}{2^{24}}$$

를 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [4점]

4. 함수 $y = \frac{\sqrt{x}}{10}$ 의 그래프와 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가

만나는 모든 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때,
 n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

5. 실수 t ($0 < t < \pi$)에 대하여 곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $P(t, \sin t)$ 에서의 접선과 점 P 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\tan \theta}{(\pi - t)^2}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

6. 두 상수 a ($a > 0$), b 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 를

$$f(x) = a \sin x - \cos x, \quad g(x) = e^{2x-b} - 1$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$ 의 값은? [4점]

(가) $f(k) = g(k) = 0$ 을 만족시키는 실수 k 가 열린구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에 존재한다.

(나) 열린구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에서 방정식

$$\{f(x)g(x)\}' = 2f(x)$$

의 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

미분법 (1)

7. 실수 t 에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y = \frac{1}{e^x} + e^t$ 에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$ 라 하자. $f(a) = -e\sqrt{e}$ 를 만족시키는 상수 a 에 대하여 $f'(a)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$
 ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

8. 상수 $a (a > 1)$ 과 실수 $t (t > 0)$ 에 대하여 곡선 $y = a^x$ 위의 점 $A(t, a^t)$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 점 A 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 B , y 축과 만나는 점을 C 라 하자. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 의 값이 $t=1$ 에서 최대일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{2}$ ② \sqrt{e} ③ 2 ④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e

9. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + f\left(\frac{1}{2}\sin x\right) = \sin x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(e^x) + e^x$$

이라 하자. 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선이 x 축이고 함수 $g(x)$ 가 역함수 $h(x)$ 를 가질 때, $h'(8)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가
 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다.
 함수 $f(x^3+x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
 $f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$ 이다. $g(1)+g'(1)$ 의 값은? [3점]
- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

미분법 (2)

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$g'(x) \leq \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$$

$f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

13. $x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a 는 상수이다.)

- (가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$ 이다.
- (나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 와 $x=\beta$ 에서 동일한 극댓값 M 을 갖는다. (단, $M > 0$)
- (다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오. [4점]

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \ln |f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여

$$G(x) = \ln |g(x) \sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F'(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

15. 양수 t 에 대하여 구간 $[1, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \leq x < e) \\ -t + \ln x & (x \geq e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y = g(x)$ 의 기울기의 최솟값을 $h(t)$ 라 하자.

1 이상의 모든 실수 x 에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \geq 0$ 이다.

미분가능한 함수 $h(t)$ 에 대하여 양수 a 가 $h(a) = \frac{1}{e+2}$ 을

만족시킨다. $h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{(e+1)^2}$ ② $\frac{1}{e(e+1)}$ ③ $\frac{1}{e^2}$
 ④ $\frac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\frac{1}{e(e-1)}$

16. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$ 에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인

사차함수 $h(x)$ 가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a$, $g(0) = b$, $g(-1) = c$ 라 할 때, $h(a+5) - h(b+3) + c$ 의 값은? [4점]

- ① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

17. 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 가 곡선 $y = 2e^{x-a}$ 과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값을 $f(t)$ 라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

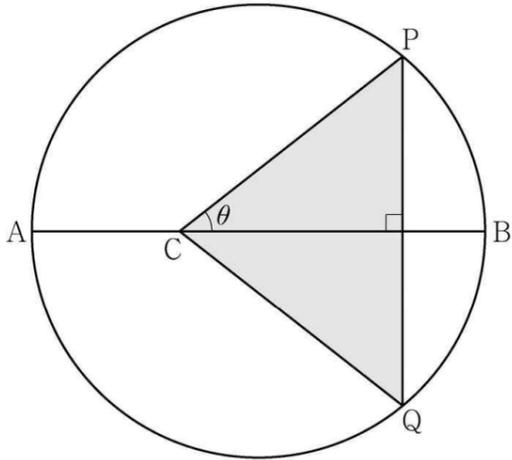
18. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b 에 대하여 ab 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$-e^{x+1} \leq ax+b \leq e^{x-2}$$
 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

19. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$ 인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$ 가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $-7 \times S'(\frac{\pi}{4})$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



20. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a 는 상수)와 두 양수 b, c 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
 $a+b+c=p+q\ln 2$ 일 때, $30(p+q)$ 의 값을 구하시오.
 (단, p, q 는 유리수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.) [4점]

21. 두 상수 a ($1 \leq a \leq 2$), b 에 대하여 함수 $f(x) = \sin(ax + b + \sin x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0) = 0, f(2\pi) = 2\pi a + b$
 (나) $f'(0) = f'(t)$ 인 양수 t 의 최솟값을 4π 이다.

함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극대인 α 의 값 중 열린구간 $(0, 4\pi)$ 에 속하는 모든 값의 집합을 A 라 하자. 집합 A 의 원소의 개수를 n , 집합 A 의 원소 중 가장 작은 값을 α_1 이라 하면,

$n\alpha_1 - ab = \frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \left| f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고, $g(0) > 0$ 이다.
 (나) $g'(\ln 3) < 0, |g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$ 의 최솟값을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[정답]

1	①	2	②	3	107	4	25	5	③
6	②	7	①	8	②	9	②	10	①
11	①	12	①	13	216	14	④	15	④
16	④	17	64	18	43	19	32	20	55
21	17	22	25						