

## 제 2 교시

## 수학 영역

## 수열의 극한

1. 자연수  $k$ 에 대하여

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n + 1}$$

이러 할 때,  $\sum_{k=1}^{10} ka_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

2.  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = -4$ 인 수열  $\{a_n\}$ 과 등차수열  $\{b_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = \frac{6}{n+1}$$

일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ 의 값은? [3점]

- ①  $-54$     ②  $-\frac{75}{2}$     ③  $-24$     ④  $-\frac{27}{2}$     ⑤  $-6$

3. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = 3$ 일 때,  $a_2$ 의

값은? [3점]

- ① 16      ② 18      ③ 20      ④ 22      ⑤ 24

4. 두 실수  $a, b$  ( $a > 1, b > 1$ )이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1} + a^n} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]

5. 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 3$$

을 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + b_n}{1 + 2b_n}$  의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{3}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{2}{3}$       ④  $\frac{5}{6}$       ⑤ 1

6. 두 실수  $a, b$  에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n} - \sqrt{n^4+n}} = 6$  일 때,

$a+b$  의 값은? [3점]

- ① 6      ② 8      ③ 10      ④ 12      ⑤ 14

## 급수

7. 수열  $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 수열  $\{b_n\}$ 을 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \leq -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

(가) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$ 은 수렴하고 그 합은  $-3$ 이다.

(나) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ 은 수렴하고 그 합은  $8$ 이다.

$b_3 = -1$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 의 값을 구하시오. [4점]

8. 공차가 양수인 등차수열  $\{a_n\}$ 과 등비수열  $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_2 b_2 = 1 \text{ 이고}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n \right) = 2$$

일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{7}{6}$     ②  $\frac{6}{5}$     ③  $\frac{5}{4}$     ④  $\frac{4}{3}$     ⑤  $\frac{3}{2}$

9. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) = 0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열  $\{b_n\}$ 에 대하여 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$ 이 수렴할 때,  $b_1 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

10. 등비수열  $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) = \frac{40}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) = \frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \left( (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times a_{m+k} \right) > \frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수  $m$ 의 값의 합을 구하시오. [4점]

11. 양수  $a$ 에 대하여 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a-3n}{n} + \frac{an+6}{n+a} \right)$ 이  
실수  $S$ 에 수렴할 때,  $a+S$ 의 값은? [3점]

- ① 7      ②  $\frac{15}{2}$       ③ 8      ④  $\frac{17}{2}$       ⑤ 9

12. 두 정수  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )에 대하여 다음 조건을 만족시키는  
수열  $\{a_n\}$ 이 있다.

모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_n = \alpha \times \sin \frac{n}{2} \pi + \beta \times \cos \frac{n}{2} \pi$$

이고,  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 4$ 이다.

수열  $\{a_n\}$ 과  $b_1 > 0$ 인 등비수열  $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-3} b_{2n}) = 6$$

일 때,  $b_1 \times b_2 = \frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

13. 첫째항이 자연수이고 공비가  $-\frac{1}{2}$  인 등비수열  $\{a_n\}$  이

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n + 1| - a_n - 1) = 26$$

을 만족시킨다.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  의 값을 구하시오. [4점]

14. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열  $\{a_n\}$  에 대하여  
 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  이 수렴하고, 수열  $\{b_n\}$  이 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $a_1 + a_2 < 10$

(나) 수열  $\{a_n\}$  의 정수인 항의 개수는 3 이고,  
 이 세 항의 곱은 216 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{q}{p}$  일 때,  $p+q$  의 값을 구하시오.

(단,  $p$  와  $q$  는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[정답]

1	33	2	①	3	⑤	4	18	5	③
6	②	7	24	8	⑤	9	12	10	25
11	④	12	105	13	16	14	91		