제 2 교시

2026학년도 대학수학능력시험 대비 녹색지대 모의고사 Vol.2

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

너는 내가 읽은 가장 아름다운 구절이다

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

그린란드

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x)=x^4+x^2+1$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_3-a_2=2$ 일 때, a_6-a_3 의 값은? [3점]

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

4. 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\frac{\sin\theta}{\cos(\pi-\theta)}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$\int_{1}^{x}\{t-f(t)\}dt=x^3-x^2$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

6. 시각 $t=0$일 때 수직선 위의 원점에서 출발하여 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+1$$

이다. 점 P의 가속도가 0이 될 때, 점 P의 위치는? [3점]

① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{12}$

7. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

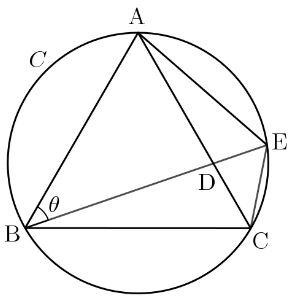
$$g(x)=\begin{cases} -x^2+f(x) & (x<1) \\ (x-3)^2-f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

8. 반지름의 길이가 2인 원 C에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 2:1로 내분하는 점 D에 대하여 직선 BD가 원 C와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 할 때, $\angle \mathrm{ABE} = \theta$라 하자. $\dfrac{\sin\theta}{\overline{\mathrm{DE}}}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1



9. 최솟값이 $-\frac{3}{2}$인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$를 만족시킨다.

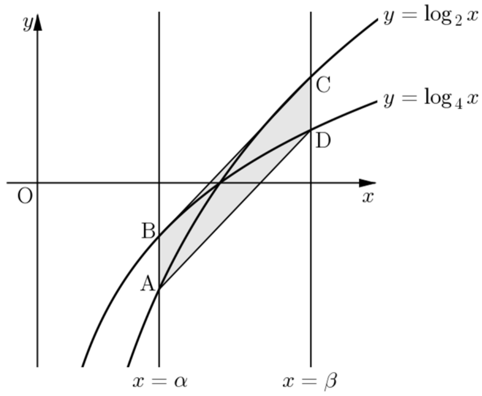
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = -3$$

일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

10. 그림과 같이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$의 그래프가 직선 $x = \alpha$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x = \beta$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

직선 AD와 직선 BC가 서로 평행하고, $\beta - \alpha = \frac{5}{6}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{1}{4}(\log_2 3 - 1)$ ② $\frac{1}{3}(2 - \log_2 3)$ ③ $\frac{5}{12}(\log_2 3 - 1)$
④ $\frac{1}{2}(2 - \log_2 3)$ ⑤ $\frac{7}{12}(\log_2 3 - 1)$

11. 0이 아닌 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$x^2-tx-2t^2=0$$

의 두 실근 중 큰 것을 $f(t)$, 작은 것을 $g(t)$라 하자.

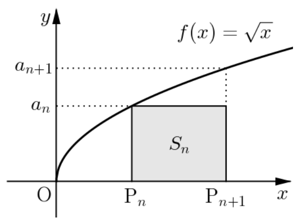
함수 $h(t)=f(t)+2g(t)$에 대하여 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}+\lim\limits_{t\to 0-}\frac{h(t)}{t}$ 의 값은? [4점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

12. 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 그래프와 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\,0)$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $f(x_n)=a_n$이고,
> $x_{n+1}-x_n=a_n+k$인 상수 k가 존재한다. (단, $k>0$)

다음은 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 $2k$인 등차수열일 때, 가로의 길이가 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이고, 세로의 길이가 a_n인 직사각형의 넓이 S_n을 구하는 과정이다. [4점]



수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

모든 자연수 n에 대하여 $x_n={a_n}^2$이므로

$${a_{n+1}}^2-{a_n}^2=a_n+k \quad \cdots \text{①}$$

$${a_{n+2}}^2-{a_{n+1}}^2=a_{n+1}+k \quad \cdots \text{②}$$

①, ②의 양변을 변끼리 빼서 정리하면

$d(a_{n+2}+a_{n+1})=d(a_{n+1}+a_n+\boxed{(가)})$

$d>0$이므로 $a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+1}+a_n+\boxed{(가)}$

$\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이므로 $d=\boxed{(나)}$

①에서 $\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)=a_n+k$이므로 $k=\frac{1}{2}\times\boxed{(나)}$

따라서 $S_n=a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(다)}$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p\times q+f(4)$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

13. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n < 4) \\ \frac{1}{2}a_n - 1 & (a_n \geq 4) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_1 < a_2$이고 $a_2 > a_3$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

14. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \times \{f(x) + 3x^2 - 3\} = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여

$$F(0) = 2, \quad F(2) - F(-2) = 4$$

일 때, $\int_{-1}^{3} F(x)\,dx$의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

15. 상수 a에 대하여 방정식

$$\cos^2 x = a\sin x - 1$$

의 양의 실근을 작은 것부터 크기순으로 모두 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ 라 하자.

$$\tan(2a_1 - a_2) = -\sqrt{3}\ ,\quad \sin(2a_2 - a_1) > 0$$

일 때, $\dfrac{a_3 - a_2}{a_5}$ 의 값은? [4점]

① $\dfrac{9}{43}$ ② $\dfrac{11}{45}$ ③ $\dfrac{13}{47}$ ④ $\dfrac{15}{49}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}$

단답형

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} n\left(2+\frac{1}{n}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$가 $x \neq 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$\left|\frac{f(x)-6x}{x-2}\right| < \frac{1}{3}$$

를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 함수

$$y=\log_3(x+6)+\log_3(12-x)$$

가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a\times M$의 값을 구하시오. [3점]

19. 곡선 $y=4x^3-x$과 $y=4x^2+7x$으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하자. $|A-B|$의 값을 구하시오. [3점]

20. 상수 $a\ (a<2)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f'(x)=f(a+1)-f(a)$의 실근은 $x=a$, $x=2$이다.
>
> (나) 함수 $y=f'(x)$의 최솟값은 0이다.

$f(1)=1$일 때, $27\times f(2a)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x) = |4^{x+1} - n|$이 $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{n}{2} < f\left(\frac{1}{2-x}\right) < 2f(x)$$

를 만족시키도록 하는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

22. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) < 0) \\ x - t & (f(x) \geq 0) \end{cases}$$

라 하자. 모든 실수 t에서 정의된 함수

$$h(t) = \lim_{x \to t-} \frac{|f(x) + f(t)| - 2f(t)}{g(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $h(t)$는 오직 $t = \alpha$, $t = \beta$ $(\alpha < \beta)$에서만 미분가능하지 않다.

(나) $h(c) = -2$인 실수 c가 존재한다.

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. ${}_{3}\mathrm{H}_{4}+{}_{4}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [2점]

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

24. 두 사건 A, B가 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A^{C}\cap B)=\frac{2}{9}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

25. 표는 어떤 고등학교에서 진행하는 논술 수업과 각 수업의 수강을 신청한 학생의 수를 나타낸 것이다.

구분	국어	영어	수학	합계
과정 1	21	15	24	60
과정 2	15	13	12	40
합계	36	28	36	100

논술 수업 수강을 신청한 학생 중 임의로 선택한 한 명이 영어 또는 수학을 선택한 학생일 때, 그 학생이 과정 2를 선택한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{19}{64}$ ② $\frac{11}{32}$ ③ $\frac{25}{64}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{31}{64}$

26. 이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 1부터 4까지의 자연수이고, 상수 a에 대하여

$$\mathrm{P}(X=k+1)=a+\mathrm{P}(X=k) \quad (k=1,\ 2,\ 3)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\frac{8}{3}$일 때, $\mathrm{P}(X=2)$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{30}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{17}{60}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 X로의 함수 중 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [3점]

(가) 모든 $x \in X$에 대하여 $f(x)$는 x의 약수이다.
(나) $f(3) \geq f(6)$

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

28. 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 좌표평면 위의 두 직선

$$l:\ 2x-y=0,\quad m:\ ax+by-24=0$$

에 대하여 두 직선의 교점의 x좌표가 2 이상이거나 직선 m의 x절편과 y절편이 각각 8 이하일 확률은? [4점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{31}{36}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

단답형

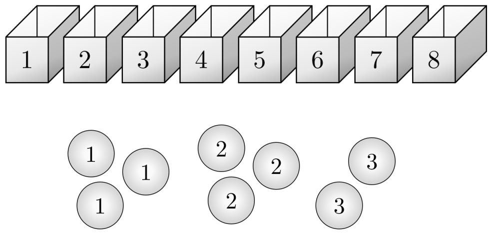
29. 숫자 1, 1, 2가 하나씩 적혀 있는 3개의 카드가 들어 있는 주머니와 주사위 1개로 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수에 따라 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 주사위를 한 번 던져
> 6의 약수인 눈이 나오면
> 주머니에서 임의로 1개의 카드를 꺼내어 꺼낸 카드에 적힌 수를 점수로 얻고,
>
> 6의 약수가 아닌 눈이 나오면
> 주머니에서 임의로 2개의 카드를 동시에 꺼내어 나온 두 카드에 적힌 수의 평균을 점수로 얻는다.

이와 같은 시행을 384번 반복하여 얻은 384개의 점수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\frac{21}{16} \le \overline{X} \le \frac{11}{8}\right)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것을 p라 하자. $1000 \times p$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

30. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 상자 8개와 숫자 1이 적힌 공 3개, 숫자 2가 적힌 공 3개, 숫자 3이 적힌 공 2개가 있다. 각 상자에 8개의 공을 임의로 하나씩 모두 넣을 때, 상자에 적힌 수와 그 상자에 들어 있는 공에 적힌 수가 같은 상자의 개수가 1인 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 수가 적힌 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]



> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

제 2 교시

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sqrt{1+\sin x}}{3x}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

24. $\int_{0}^{\ln 2} e^{2x} dx + \int_{-\ln 2}^{0} ke^{-x} dx = 3$ 일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

25. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

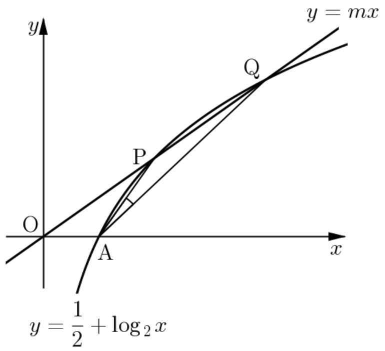
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n-2n}{n+1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)b_n-n^2}{2na_n+n^2}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{7}$

26. 곡선 $y=\frac{1}{2}+\log_2 x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A라 하고, 직선 $y=mx$ $(m>0)$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$일 때, $\tan(\angle\mathrm{PAQ})$의 값은?
(단, m은 상수이고, O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{5}$

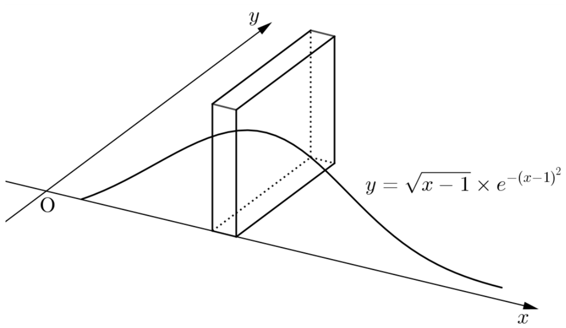


27. 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}\times e^{-(x-1)^2}$와 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $f(x)$인 정사각형을 밑면으로 하고, 높이가 $\frac{1}{n}$인 직육면체의 부피를 $V_n(x)$라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} V_{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{e}\right)$　② $\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$　③ $\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

④ $\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$　⑤ $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$



28. 상수 a에 대하여 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan x + a\ln(\cos x)$$

가 있다. 모든 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$가 오직 하나의 실근 $g(t)$를 갖는다. 미분가능한 함수 $g(t)$와 실수 α가 다음 조건을 만족시킬 때, e^{α}의 값은? [4점]

(가) $g(-1)+g(1)>0$

(나) 방정식 $g'(t)=\frac{4}{3}$을 만족시키는 t의 값은 α뿐이다.

① $\frac{2\sqrt{3e}}{5}$　② $\frac{\sqrt{14e}}{5}$　③ $\frac{4\sqrt{e}}{5}$

④ $\frac{3\sqrt{2e}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5e}}{5}$

단답형

29. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$\sqrt{\frac{1+\{f'(x)\}^2}{1+2x}} = 2f'(x)f''(x)$$

를 만족시킨다. $\dfrac{f''(1)}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$ 일 때, $x=1$에서 $x=13$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는 l이다. $l \times \sqrt{3}$의 값을 구하시오. [4점]

30. $x \geq 0$인 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x \leq 1$일 때 $f(x) = 4^x - 1$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여
$2^n - 2 \leq x \leq 2^{n+1} - 2$일 때
$f(x+1) = 2f\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3$
이다.

방정식 $f'(x) = 3$을 만족시키는 양수 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1} \times \frac{1+f(a_n)}{f(a_n)f(a_{n+1})}\right\}$$

의 값을 S라 할 때, $\dfrac{\ln 4}{S} = p - \ln q$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

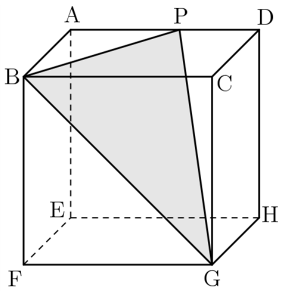
23. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\,-3)$, $\vec{b}=(a,\,6)$이 서로 평행할 때, 상수 a의 값은? [2점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

24. 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(3,\,k)$에서의 접선의 기울기가 -2일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

25. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH가 있다. 선분 AD 위의 한 점 P에 대하여 평면 BGP와 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$이다. 선분 AP의 길이는? [3점]



① $\frac{\sqrt{47}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{51}}{6}$

26. 좌표평면에 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 두 실수 s, t가 $s+t=1$을 만족시킬 때,

$$\left|s\overrightarrow{AB} + 2t\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right|$$

의 최솟값은? [3점]

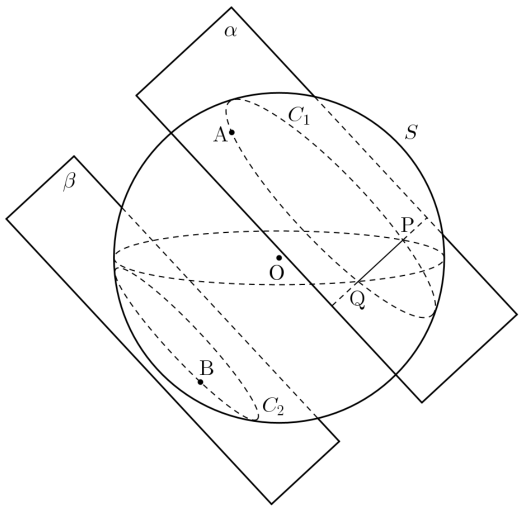
① $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

27. 좌표평면에 곡선 $|x^2-4y^2-1|=5y^2$이 있다. 이 곡선과 직선 $y=\frac{1}{3}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점]

① $\frac{2\sqrt{10}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{15}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

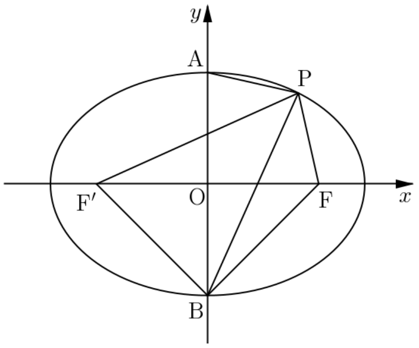
28. 좌표공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나 생기는 원 C 위의 두 점 P, Q가 $\overline{\mathrm{PQ}}=6$를 만족시킬 때, 점 $(0,0,a)\,(a>0)$를 지나고 직선 PQ를 포함하는 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원을 C_1이라 하자. 평면 α와 평행하고 점 $(0,0,b)\,(b<0)$를 지나는 평면 β가 구 S와 만나서 생기는 원을 C_2라 할 때, 두 원 C_1, C_2의 xy평면 위로의 정사영이 한 점에서 만난다.
점 O와 평면 α 사이의 거리가 2일 때, 원 C_1 위를 움직이는 점 A와 원 C_2 위를 움직이는 점 B에 대하여 선분 AB의 길이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{10\sqrt{21}}{7}$ ② $\frac{12\sqrt{21}}{7}$ ③ $2\sqrt{21}$ ④ $\frac{16\sqrt{21}}{7}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{21}}{7}$



단답형

29. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$이 y축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 이 타원 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PF}'}$이고, 삼각형 PAB의 둘레의 길이가 $12+6\sqrt{2}$일 때, 사각형 PFBF′의 넓이는 $p+q\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, 점 A의 y좌표는 양수이고, p와 q는 자연수이다.) [4점]



30. 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(0,8)$, $\mathrm{B}(6,0)$, $\mathrm{C}(3,4)$가 있다. 선분 OA 위의 한 점 $\mathrm{P}(0,p)$ $(0<p\leq 8)$에 대하여 점 Q가 선분 AC와 선분 AP 위를 움직일 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 S라 하자. 도형 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최소인 점의 개수가 2일 때, 그 두 점의 x좌표의 합은 $a+b\sqrt{21}$이다. $25(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2026년도 대학수학능력시험 대비
녹색지대 모의고사 Vol.2 해설지
수학 영역

출제자 소개

이재종(그린란드)

- 성균관대 수학교육과 졸업
- 국가장학재단 이공계장학금 전액 장학생
- 네이버 수학 분야 파워지식IN(2013~)
- 녹색지대 모의고사(2020~) 출제 및 제작
- 기대N제(2024) 공저
- (前) 이투스247
- (現) 배곧라라중학교

수능 표본 예상 등급 구분 점수

구분	확률과 통계	미적분	기하
1등급	87 - 89	82 - 84	83 - 85
2등급	78 - 80	73 - 75	74 - 76
3등급	68 - 70	62 - 64	64 - 66

※ 2022학년도 수능부터 이용되는 점수 산출 방식으로 계산하였을 때 예상되는 등급 구분 점수로, 2022~2025 수능 시험 문항을 이용하여 AI로 추정하였습니다.
※ 틀린 문항이 모두 선택 문항인 경우 가장 등급 구분 점수가 낮고, 틀린 문항이 모두 공통 문항인 경우 가장 등급 구분 점수가 높습니다.

주의 사항 및 이용 안내

4. 본 시험지에 관한 문의 사항(오타/오류 제보 포함)이 있는 경우 다음으로 연락주시면 안내해 드리도록 하겠습니다.
(E-mail) wowhd93@naver.com
(KaKao) wowhd93
5. 제작자 블로그 주소
https://blog.naver.com/wowhd93
https://greenland.tistory.com/

공 통 과 목(1 ~ 22)

1. [출제 의도] 지수법칙을 이해하고 있는가?

$\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{2}{3}-1}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. [출제 의도] 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$f'(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로 $f'(-1) = -6$

3. [출제 의도] 등차수열의 뜻을 이해하고 있는가?

주어진 점화식을 만족하는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_3 - a_2 = d = 2$ 이므로
$\therefore\ a_6 - a_3 = 3d = 6$

4. [출제 의도] 삼각함수의 뜻을 알고 있는가?

문제의 조건으로부터 $\tan\theta$의 값은 직선의 기울기인 $-\frac{1}{3}$ 이므로
$\frac{\sin\theta}{\cos(\pi-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta = \frac{1}{3}$

5. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

주어진 등식의 양변을 미분하면
$x - f(x) = 3x^2 - 2x$
양변에 $x=1$을 대입하면
$1 - f(1) = 1 \quad \therefore\ f(1) = 0$

6. [출제 의도] 수직선 위의 점의 운동을 이해하고 있는가?

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면
$a(t) = v'(t) = t - 2$
따라서 $t=2$일 때 점 P의 가속도가 0이다.
시각 $t=0$일 때 점 P의 좌표는 0이므로

$$x(t) = \int_0^t v(u)du = \left[\frac{1}{6}u^3 - u^2 + u\right]_0^t = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + t$$

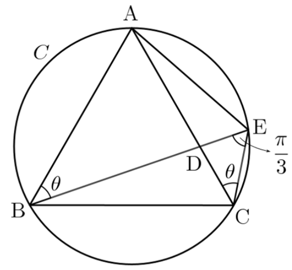
따라서 점 P의 가속도가 0이 될 때 점 P의 위치는
$x(2) = \frac{8}{6} - 4 + 2 = -\frac{2}{3}$

7. [출제 의도] 함수의 미분가능성과 연속의 관계를 이해하고 있는가?

$g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다.
$\lim_{x\to 1-} g(x) = f(1) - 1$,
$\lim_{x\to 1+} g(x) = g(1) = 4 - f(1)$
에서 $f(1) - 1 = 4 - f(1)$, $f(1) = \frac{5}{2}$ ⋯ ①
$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -2 + f'(1)$
$\lim_{x\to 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -4 - f'(1)$
에서 $-2 + f'(1) = -4 - f'(1)$, $f'(1) = -1$ ⋯ ②
함수 $f(x)$는 일차함수이므로 ①, ②에서
$f(x) = -x + \frac{7}{2} \quad \therefore\ f(2) = \frac{3}{2}$

8. [출제 의도] 사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\angle\mathrm{CED} = \angle\mathrm{BAC} = \frac{\pi}{3}$ 이고, 원 C의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{CED})} = 4$,
$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면
$2R = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CED})} = \frac{4}{3}$



사인법칙과 원주각의 성질에 의하여
$\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin(\angle\mathrm{DCE})} = \frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta} = 2R = \frac{4}{3}$
$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\overline{\mathrm{DE}}} = \frac{3}{4}$

9. [출제 의도] 함수의 극한과 미분을 활용하여 다항함수의 식을 구할 수 있는가?

사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$를 만족시키므로, 다항식 $f(x)$에는 짝수 차수의 항만 존재한다.
또한, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = -3$ 이므로
함수 $f(x)$의 가장 낮은 차수의 항은 x^2이고, 그 계수는 -3이다. (그렇지 않으면 위의 극한이 발산한다.)
$\therefore\ f(x) = ax^4 - 3x^2$
이때 함수 $f(x)$가 최솟값을 가지므로 $a > 0$이다.
$f'(x) = 4ax^3 - 6x = 2x(2ax^2 - 3)$ 이므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고,
$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2a}}$ 에서 극솟값을 갖는다.
$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2a}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{3}{2a}}\right)$ 이므로
함수 $f(x)$는 $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2a}}$ 에서 최솟값을 갖는다.
$f\left(\sqrt{\frac{3}{2a}}\right) = a\times\frac{9}{4a^2} - 3\times\frac{3}{2a} = -\frac{9}{4a}$
즉, $-\frac{9}{4a} = -\frac{3}{2}$ 이므로 $a = \frac{3}{2}$
$\therefore\ f(2) = \frac{3}{2}\times 2^4 - 3\times 2^2 = 12$

10. [출제 의도] 로그함수의 그래프와 로그를 포함한 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 직선 AB, CD가 서로 평행하고, 문제의 조건에서 두 직선 AD, BC 또한 서로 평행하므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$ 이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = \log_4\alpha - \log_2\alpha = -\log_4\alpha$
$\overline{\mathrm{CD}} = \log_2\beta - \log_4\beta = \log_4\beta$
이므로
$-\log_4\alpha = \log_4\beta$, $\log_4\alpha\beta = 0$
$\therefore\ \alpha\beta = 1$
$\alpha = \frac{1}{\beta}$ 에서 $\beta - \frac{1}{\beta} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow\ 6\beta^2-5\beta-6=0$, $(3\beta+2)(2\beta-3)=0$

$\beta>1$ 이므로 $\beta=\dfrac{3}{2}$

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

$\overline{\mathrm{CD}}\times(\beta-\alpha)=\dfrac{5}{6}\log_4\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{12}(\log_2 3-1)$

11. [출제 의도] 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$x^2-tx-2t=0$ 에서

$(x+t)(x-2t)=0$ 이므로 $x=-t$ 또는 $x=2t$ 이다.

(i) $t>0$ 인 경우

$-t<2t$ 이므로 $f(t)=2t$, $g(t)=-t$

$h(t)=f(t)+2g(t)=0$ 이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{h(t)}{t}=0$

(ii) $t<0$ 인 경우

$-t>2t$ 이므로 $f(t)=-t$, $g(t)=2t$

$h(t)=f(t)+2g(t)=3t$ 이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{h(t)}{t}=3$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}+\lim_{t\to 0-}\frac{h(t)}{t}=3$

12. [출제 의도] 등차수열의 뜻을 이해하고, 문제를 해결할 수 있는가?

(가): ①, ②의 양변을 변끼리 빼면

$a_{n+2}^{\ 2}-a_{n+1}^{\ 2}-\left(a_{n+1}^{\ 2}-a_n^{\ 2}\right)=a_{n+1}-a_n$

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=d$ 이므로

$d(a_{n+2}+a_{n+1})-d(a_{n+1}+a_n)=d$

$\Rightarrow\ d(a_{n+2}+a_{n+1})=d(a_{n+1}+a_n+1)$

$\therefore\ p=1$

(나): 수열 $\{a_n\}$ 이 공차가 d 인 등차수열이므로

수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 은 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.

(가)로부터 $2d=1$ 이므로 $d=\dfrac{1}{2}$ 이다.

$\therefore\ q=\dfrac{1}{2}$

(다): $\dfrac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)=a_n+k$ 에서

$a_{n+1}-a_n=2k=\dfrac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $2k=\dfrac{1}{2}$ 이고, 공차가

$\dfrac{1}{2}$ 인 등차수열이다. $\therefore\ a_n=\dfrac{1}{2}n$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=a_{n+1}^{\ 2}-a_n^{\ 2}=a_n+k=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{4}$

이므로

$S_n=a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}n\left(\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}n^2+\dfrac{1}{8}n$

$\therefore\ f(n)=\dfrac{1}{4}n^2+\dfrac{1}{8}n$

$\therefore\ p\times q+f(4)=1\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times 4^2+\dfrac{1}{8}\times 4=5$

13. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

(i) $a_n<4$ 인 경우,

$a_{n+1}-a_n=1$ 이므로 $a_n<a_{n+1}$

(ii) $a_n\ge 4$ 인 경우

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}a_n-1-a_n=-\dfrac{1}{2}a_n-1<0$

이므로 $a_n>a_{n+1}$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 정의로부터 $a_n\ne a_{n+1}$ 이므로

$a_n>a_{n+1}$ 이면 $a_n\ge 4$ 이고

$a_n<a_{n+1}$ 이면 $a_n<4$ 이다.

$a_1<a_2$ 이므로 $a_1<4\ \Rightarrow\ a_2=a_1+1<5$

$a_2>a_3$ 이므로 $a_2\ge 4$

즉, $4\le a_2<5$ 이고 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수이므로 $a_2=4$ 이다.

이로부터 $a_1=3$, $a_2=4$, $a_3=1$, $a_4=2$

이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+4}=a_n$ 이다.

$\displaystyle\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n=2\times(3+4+1+2)+3+4=27$

14. [출제 의도] 연속함수의 뜻을 이용하여 함수의 정적분을 구할 수 있는가?

주어진 조건으로부터 모든 실수 x 에 대하여

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=-3x^2+3$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로

$-3x^2+3=0$ 인 $x=\pm 1$ 에서만 함수의 모양이 바뀔 수 있다.

또한 $-3x^2+3>0\ \Leftrightarrow\ -1<x<1$ 에서

구간 $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$에서 $f(x)\le 0$ 이다.

$\displaystyle\int_{-1}^{1}(-3x^2+3)dx$

$\displaystyle=2\int_0^1(-3x^2+3)dx=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1=4$

이므로

$\displaystyle F(2)-F(-2)=\int_{-2}^{2}f(x)dx=4$

에서 구간 $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$에서 $f(x)=0$ 이다.

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-3x^2+3 & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{이외의 경우})\end{cases}$

$F(0)=2$ 이므로

$\displaystyle F(x)=2+\int_0^x f(t)dt$

$=\begin{cases}0 & (x<-1)\\ -x^3+3x+2 & (-1<x<1)\\ 4 & (x\ge 1)\end{cases}$

함수 $G(x)=F(x)-2$ 에 대하여 $G(-x)=-G(x)$

이므로

$\displaystyle\int_{-1}^{1}G(x)dx=\int_{-1}^{1}(F(x)-2)dx=0$

$\displaystyle\Rightarrow\ \int_{-1}^{1}F(x)dx=4$

$\displaystyle\therefore\ \int_{-1}^{3}F(x)dx=4+\int_1^3 4dx=12$

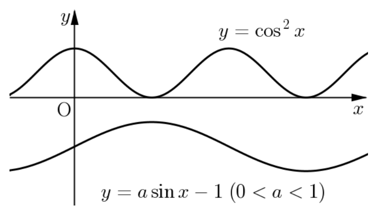
15. [출제 의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

주어진 방정식으로부터 명백히 $a\ne 0$ 이다.

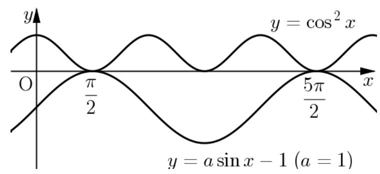
a 의 값의 부호에 따라 다음과 같이 나누어 생각한다.

<u>(1) $a>0$ 인 경우</u>

$0<a<1$ 인 경우 그림과 같이 두 곡선 $y=\cos^2 x$, $y=a\sin x-1$ 의 그래프는 서로 만나지 않는다.

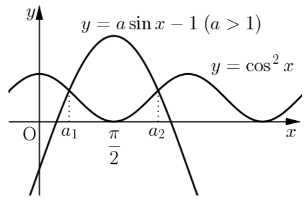


$a=1$ 인 경우 주어진 방정식의 해는 $x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ 의 꼴이므로 $\tan(2a_1-a_2)$ 의 값은 정의되지 않는다.



따라서 $a>1$ 인 경우만 생각해도 무방하다.

이 경우 두 곡선 $y=\cos^2 x$, $y=a\sin x-1$ 의 그래프는 그림과 같다.



대칭성에 의해 $a_1+a_2=\pi$ 이므로

$2a_1-a_2=3a_1-\pi$

이때 $0<a_1<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $-\pi<2a_1-a_2<\dfrac{\pi}{2}$

$\tan(2a_1-a_2)=-\sqrt{3}$ 이므로 $2a_1-a_2=-\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ a_1=\dfrac{2\pi}{9}$, $a_2=\dfrac{7\pi}{9}$

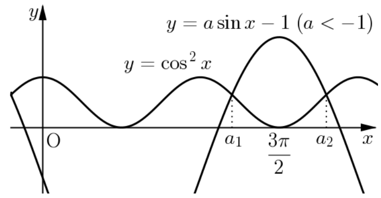
이때 $2a_2-a_1=\dfrac{14\pi}{9}-\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{4\pi}{3}$ 이므로

$\sin(2a_2-a_1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$

이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

<u>(2) $a<0$ 인 경우</u>

(1)과 같은 방법으로 $a<-1$ 인 경우만 고려해도 무방하다.



대칭성에 의해 $a_1+a_2=3\pi$ 이므로

$2a_1-a_2=3a_1-3\pi$

$\pi<a_1<\dfrac{3\pi}{2}$ 이므로 $0<2a_1-a_2<\dfrac{3\pi}{2}$

$\tan(2a_1-a_2)=-\sqrt{3}$ 이므로 $2a_1-a_2=\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore\ a_1=\dfrac{11\pi}{9}$, $a_2=\dfrac{16\pi}{9}$

이때 $2a_2-a_1=\dfrac{32\pi}{9}-\dfrac{11\pi}{9}=\dfrac{7\pi}{3}$ 이므로

$\sin(2a_2-a_1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$

따라서 $a_1=\dfrac{11\pi}{9}$, $a_2=\dfrac{16\pi}{9}$ 는 문제의 조건을 만족시킨다.

(1), (2)에서 $a_1=\dfrac{11\pi}{9}$, $a_2=\dfrac{16\pi}{9}$

$\Rightarrow\ a_3=a_1+2\pi=\dfrac{29\pi}{9}$, $a_5=a_1+4\pi=\dfrac{47\pi}{9}$

$\therefore\ \dfrac{a_3-a_2}{a_5}=\dfrac{13}{47}$

16. [출제 의도] $\sum$를 포함한 식을 계산할 수 있는가?

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10} n\left(2+\frac{1}{n}\right)$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{10}(2n+1) = 2\times\frac{10\times 11}{2}+1\times 10 = 120$

17. [출제 의도] 함수의 극한의 대소 관계를 이해하고 있는가?

양변에 $|x-2|$를 곱하면

$|f(x)-6x| < \frac{1}{3}|x-2|$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}|x-2| < f(x)-6x < \frac{1}{3}|x-2|$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{3}|x-2| = 0$ 이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\{f(x)-6x\} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}6x = 12$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x) = 12$

18. [출제 의도] 로그를 포함한 함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?

$\log_3(x+6)+\log_3(12-x)$

$= \log_3(x+6)(12-x)$

$= \log_3(-x^2+6x+72)$

$= \log_3(-(x-3)^2+81)\quad(-6 < x < 12)$

이므로 주어진 함수는 $x=3$일 때 최댓값

$\log_3 81 = 4$를 갖는다.

$\therefore\ a\times M = 3\times 4 = 12$

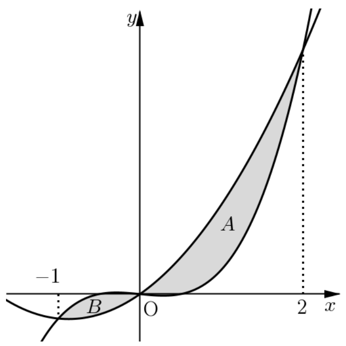
19. [출제 의도] 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이와 정적분의 관계를 이해하고 있는가?

$4x^3 - x = 4x^2+7x$

$\Leftrightarrow\ 4x^3-4x^2-8x = 0$

$\Leftrightarrow\ x(x+1)(x-2) = 0$

에서 두 곡선의 교점의 x좌표는 $-1,\ 0,\ 2$이다.



그림과 같이 두 곡선으로 둘러싸인 부분 중

$0 < x < 2$인 부분의 넓이를 A

$-1 < x < 0$인 부분의 넓이를 B라 하면

(참고: A, B를 반대로 잡아도 상관없음.)

정적분의 성질에 의하여

$|A-B| = \left|\displaystyle\int_{-1}^{2}((4x^3-x)-(4x^2+7x))dx\right|$

$= \left|\displaystyle\int_{-1}^{2}(4x^3-4x^2-8x)dx\right|$

$= \left|\left[x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_{-1}^{2}\right|$

$= \left|15-\frac{4}{3}\times 9-4\times 3\right| = 9$

20. [출제 의도] 미분을 활용하여 다항함수의 식을 추론할 수 있는가?

조건 (가)에서 $f(a+1)-f(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(a+1,\ f(a+1))$을 지나는 직선의 기울기이므로

조건 (가)의 방정식의 한 근이 $x=a$라는 것은

두 점 $(a,\ f(a))$, $(a+1,\ f(a+1))$를 지나는 직선

$y = (f(a+1)-f(a))(x-a)+f(a)$

이 곡선 $y=f(x)$와 $x=a$, $x=a+1$에서 만나고, $x=a$에서는 접함을 의미한다.

따라서

$f(x)-\{(f(a+1)-f(a))(x-a)+f(a)\}$

$= (x-a)^2(x-a-1)$

위 등식의 양변을 미분하고 정리하면

$f'(x)-(f(a+1)-f(a))$

$= 2(x-a)(x-a-1)+(x-a)^2$

양변에 $x=2$를 대입하면 조건 (가)에 의하여

$2(2-a)(2-a-1)+(2-a)^2 = 0$

$\Rightarrow\ -3a+4 = 0,\ a = \frac{4}{3}$

조건 (가)에서 이차함수 $f'(x)$는

$x = \frac{a+2}{2} = \frac{5}{3}$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 조건 (나)에 의하여

$\therefore\ f'(x) = 3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$

$f(x) = \left(x-\frac{5}{3}\right)^3+C$에서

$f(1) = -\frac{8}{27}+C = 1$이므로 $C = \frac{35}{27}$

$\therefore\ 27\times f(2a) = 27\times f\left(\frac{8}{3}\right) = 62$

21. [출제 의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

주어진 부등식을 두 부분으로 나누어 생각한다.

(1) $\frac{n}{2} < f\left(\frac{1}{2-x}\right)$

$x > 2$일 때 $\frac{1}{2-x}$의 값은 구간 $(-\infty,0)$의 모든 값을 취할 수 있다.

$f(x)=0$인 x의 값이 음수라면

$f\left(\frac{1}{2-x}\right)=0$이고 $x>2$인 x가 존재하므로

주어진 부등식이 성립하지 않는다.

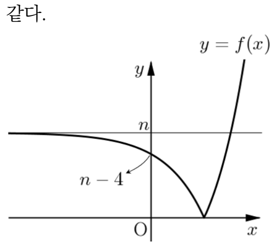
따라서 $f(x)=0$인 x의 값은 양수이고,

$x<0$일 때 $f(x) = -(4^{x+1}-n)$이므로

곡선 $y=f(x)$의 점근선은 $y=n$이고,

$f(0) = n-4$이다.

이를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



$x>2$인 모든 실수 x에 대하여

$f\left(\frac{1}{2-x}\right) > f(0) = n-4$

이므로 $\frac{n}{2} < f\left(\frac{1}{2-x}\right)$이 성립할 필요충분조건은

$\frac{n}{2} \le n-4\ \Leftrightarrow\ n \ge 8$

(2) $f\left(\frac{1}{2-x}\right) < 2f(x)$

(1)에서 $f(x)=0$인 x의 값은 양수이다.

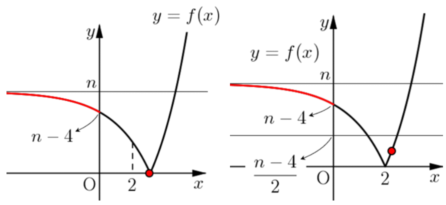
이때 그 x의 값이 2 이상이라고 하면

$f\left(\frac{1}{2-x}\right) > 0$이고, $f(x)=0$이거나

$f(x)$가 0에 매우 근접한 x가 존재하므로

(또는 $f(x) < \frac{n-4}{2}$인 x가 존재하므로)

주어진 부등식이 성립하지 않는다.



따라서 $x \ge 2$이면 $f(x) > 0$이다.

$f\left(\frac{1}{2-x}\right)$는 x의 값이 2에 가까워질수록 값이 커지고 그 값은 n에 가까워진다.

또한, $f(x)$는 x의 값이 2에 가까워질수록 값이 작아진다.

즉, 주어진 부등식이 성립할 필요충분조건은

$n \le 2f(2)\ \Leftrightarrow\ n \le 2(64-n),\ n \le \frac{128}{3} = 42.\dot{6}$

(1), (2)에서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 범위는 $8 \le n \le 42$이고,

그 개수는 35이다.

22. [출제 의도] 함수의 극한값을 계산하고, 미분가능한 함수의 성질을 이용하여 함수의 식을 구할 수 있는가?

함수 $h(t)$는 실수 t에 대하여 정의된 함수이므로 $f(t)$의 값의 부호에 따라 계산한다.

(i) $f(t) > 0$인 경우

함수 $f(x)$는 연속이므로 t를 포함하는 어떤 열린구간에서 $f(x) > 0$이다. 즉, $x\to t-$ 일 때

$g(x) = x-t,\ |f(x)+f(t)| = f(x)+f(t)$

이므로

$$h(t) = \lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f'(t)$$

(ii) $f(t) < 0$인 경우

(i)과 같은 방법으로 $x\to t-$ 일 때

$g(x) = f(x),\ |f(x)+f(t)| = -f(x)-f(t)$

이므로

$$h(t) = \lim_{x\to t-}\frac{-f(x)-3f(t)}{f(x)} = -4$$

(iii) $f(t)=0$이고, $x=t$에서 극소이거나 $x=t$ 좌우에서 감소하는 경우

$x<t$이고 t에 가까운 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$x\to t-$ 일 때

$g(x) = x-t,\ |f(x)+f(t)| = f(x)+f(t) = f(x)$

이다. 따라서

$$h(t) = \lim_{x\to t-}\frac{f(x)}{x-t} = f'(t)$$

(iv) $f(t)=0$ 이고, $x=t$ 에서 극대이거나 $x=t$ 좌우에서 증가하는 경우

$x<t$ 이고 t 에 가까운 x 에 대하여 $f(x)<0$ 이므로 $x \to t-$ 일 때

$g(x)=f(x)$, $|f(x)+f(t)|=-f(x)-f(t)=-f(x)$

이다. 따라서

$$h(t)=\lim_{x \to t-} \frac{-f(x)}{f(x)}=-1$$

(i) ~ (iv)에서 함수 $h(t)$ 가 미분가능하지 않은 점은 $f(t)=0$ 인 t 의 값 중에서만 나온다는 것을 알 수 있다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 적어도 두 개 이상의 서로 다른 실근을 갖는다.

(1) 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

조건 (가)에 의하여 그 두 실근은 α, β 이어야 한다. 둘 중 하나는 중근이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(1-a) $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ 인 경우
함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 극대이고, $x=\beta$ 의 좌우에서 증가하므로

$$h(t)=\begin{cases} -4 & (t<\alpha \text{ or } \alpha<t<\beta) \\ -1 & (t=\alpha \text{ or } t=\beta) \\ f'(t) & (t>\beta) \end{cases}$$

이다. $t>\beta$ 일 때 $h(t)=f'(t)>0$ 이므로 문제의 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

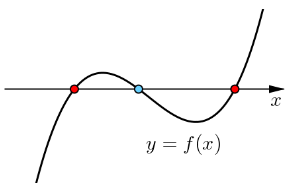
(1-b) $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 인 경우
함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 의 좌우에서 증가하고, $x=\beta$ 에서 극소이므로

$$h(t)=\begin{cases} -4 & (t<\alpha) \\ -1 & (t=\alpha) \\ f'(t) & (t>\alpha) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(t)$ 는 $t=\alpha$ 에서만 미분가능하지 않으므로 문제의 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(2) 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우

세 실근 중 α, β 가 아닌 것을 γ 라 하자.
함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 α, β, γ 중 2개의 값 좌우에서는 증가하고, 나머지 한 값에서는 감소한다.



이때 $f(x)=0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 증가하는 두 지점에서는 함수 $h(t)$ 가 불연속이므로 (좌극한: -4, 함숫값: -1)
이므로 그 두 점에서는 함수 $h(t)$ 가 미분가능하지 않다.

따라서 문제의 조건 (가)에서 $\alpha<\gamma<\beta$ 이어야 하고, $h(t)$ 는 $t=\gamma$ 에서 미분가능해야 한다.

$t=\gamma$ 의 근방에서
$t \le \gamma$ 이면 $h(t)=f'(t)=3t^2+6t+a$ 이고,
$t>\gamma$ 이면 $h(t)=-4$ 이므로

함수 $h(t)$ 가 $t=\gamma$ 에서 미분가능하려면
$f'(\gamma)=3\gamma^2+6\gamma+a=-4$,

$$\left.\frac{d}{dt}f'(t)\right|_{t=\gamma}=6\gamma+6=0$$

이어야 한다. $\therefore\ \gamma=-1$, $a=-1$
또한 $f(\gamma)=f(-1)=0$ 이므로 $b=-3$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2-x-3=(x+3)(x+1)(x-1)$

이로부터

$$h(t)=\begin{cases} -4 & (t<-3 \text{ or } -1<t<1) \\ f'(t) & (-3<t\le -1 \text{ or } t>1) \\ -1 & (t=-3 \text{ or } t=1) \end{cases}$$

이고, $-3<t\le 1$ 에서

$h(t)=f'(t)=3(t+1)^2-4 \ \Rightarrow\ -4 \le h(t) \le 8$

이므로 $h(c)=-2$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 1)$ 에 존재한다.

따라서 (2)에서 구한 $f(x)$ 는 문제의 조건을 모두 만족시킨다.

$\therefore\ f(3)=48$

확률과 통계(23 ~ 30)

23. [출제 의도] 중복조합의 수를 계산할 수 있는가?

${}_3\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_3=15+20=35$

24. [출제 의도] 독립인 사건의 확률의 계산을 할 수 있는가?

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로
두 사건 A^C, B 또한 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$ 이므로

$\mathrm{P}(A^C \cap B)=\mathrm{P}(A^C)\times\mathrm{P}(B)$

즉, $\frac{1}{3}\times\mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}$ 이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\end{aligned}$$

25. [출제 의도] 조건부확률을 구할 수 있는가?

논술 수업 수강을 신청한 학생 중 한 명을 임의로 선택하였을 때,
그 학생이 영어 또는 수학을 선택한 학생일 사건을 A 라 하고, 그 학생이 과정 2를 선택한 학생인 사건을 B 라 하자.

주어진 표에 의하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{28+36}{100}=\frac{16}{25}$

이고, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{13+12}{100}=\frac{1}{4}$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{4}\times\frac{25}{16}=\frac{25}{64}$$

26. [출제 의도] 이산확률변수의 성질을 이해하고 그 평균을 구할 수 있는가?

$\mathrm{P}(X=1)=p$ 라 하자. 그러면 주어진 등식으로부터 확률변수 X 의 확률분포표는 표와 같다.

x	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	p	$p+a$	$p+2a$	$p+3a$

이산확률변수의 성질에서
$p+(p+a)+(p+2a)+(p+3a)=4p+6a=1$ … ①

주어진 조건으로부터

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=p+2(p+a)+3(p+2a)+4(p+3a)\\&=10p+20a=\frac{8}{3} \ \cdots\ ②\end{aligned}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$p=\frac{1}{5}$, $a=\frac{1}{30}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)=p+a=\frac{7}{30}$

27. [출제 의도] 여러 가지 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

주어진 조건으로부터
$f(1)$ 의 값은 1,
$f(2)$ 의 값은 1, 2
$f(4)$ 의 값은 1, 2, 4
$f(5)$ 의 값은 1, 5
이 각각 가능하다. 이로부터 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 방법의 수는

$1\times2\times3\times2=12$ … ①

$f(3)$ 의 값은 1, 3

$f(6)$ 의 값은 1, 2, 3, 6
을 취할 수 있다. 이때 조건 (나)로부터
순서쌍 $(f(3), f(6))$ 으로 가능한 것은
$(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$ 이다.

따라서 $f(3)$, $f(6)$ 의 값을 정하는 방법의 수는 4
⋯ ②

①, ②에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는
$$12 \times 4 = 48$$

28. [출제 의도] 확률의 덧셈 정리를 이용하여 수학적 확률을 계산할 수 있는가?

두 직선 l, m 의 교점의 x 좌표가 2 이상인 사건을 A 라 하고,
직선 m 의 x 절편과 y 절편이 각각 8 이하인 사건을 B 라 하자.

연립방정식 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax + by - 24 = 0 \end{cases}$ 을 풀면

$ax + 2bx - 24 = 0$, $x = \dfrac{24}{a + 2b}$

이 값이 2 이상이려면 $a + 2b \le 12$ 이어야 한다.

$a = 1$, 2 인 경우, $b = 1$, 2, 3, 4, 5
$a = 3$, 4 인 경우, $b = 1$, 2, 3, 4
$a = 5$, 6 인 경우, $b = 1$, 2, 3

이므로 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{10 + 8 + 6}{36} = \dfrac{2}{3}$ ⋯ ①

직선 m 의 x 절편은 $\dfrac{24}{a}$, y 절편은 $\dfrac{24}{b}$ 이다.

각각이 8 이하인 경우는 $a \ge 3$ 이고 $b \ge 3$ 인 경우이므로
$$\mathrm{P}(B) = \frac{4 \times 4}{36} = \frac{4}{9} \quad \cdots ②$$

한편, $a + 2b \le 12$ 이면서 $a \ge 3$ 이고 $b \ge 3$ 인 경우는
$a = 3$, 4 일 때 $b = 3$, 4 이거나
$a = 5$, 6 일 때 $b = 3$ 인 경우이므로
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4 + 2}{36} = \frac{1}{6} \quad \cdots ③$$

①, ②, ③에 의하여 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} = \frac{17}{18}$$

29. [출제 의도] 표본평균의 성질을 이해하고, 표준화를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

한 번의 시행에서 얻은 점수를 확률변수 X 라 하자.
X 의 값으로는 1, 1.5, 2 가 가능하다.

$X = 1$ 인 경우는 주사위의 눈이 6 의 약수이고, 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수가 1 인 경우이거나
주사위의 눈이 6 의 약수가 아니고 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수가 모두 1 인 경우이므로 확률의 곱셈정리에 의하여
$$\mathrm{P}(X = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

이와 같은 방법으로
$$\mathrm{P}(X = 1.5) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$
$$\mathrm{P}(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

이다. 따라서

$\mathrm{E}(X) = 1 \times \dfrac{5}{9} + 1.5 \times \dfrac{2}{9} + 2 \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{3}$

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - m)^2\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{5}{9} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$$

문제에서의 시행을 384 번 반복한 것은, 평균이 $\dfrac{4}{3}$ 이고 분산이 $\dfrac{1}{6}$ 인 모집단에서 크기가 384 인 표본을 임의추출한 것과 같다.

표본의 크기가 충분히 크므로 그 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \dfrac{4}{3}$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{1}{6 \times 384} = \left(\dfrac{1}{48}\right)^2$

이고, $\overline{X}$ 는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{4}{3}, \left(\dfrac{1}{48}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore\ p &= \mathrm{P}\left(\frac{21}{16} \le \overline{X} \le \frac{11}{8}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{\frac{21}{16} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{48}} \le Z \le \frac{\frac{11}{8} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{48}}\right) \\ &= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2) \\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) \\ &= 0.341 + 0.477 = 0.818 \end{aligned}$$

$\therefore\ 1000 \times p = 818$

30. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

상자에 적힌 수와 그 상자에 들어 있는 공에 적힌 수가 같은 것을 그 숫자에 따라 나눠 생각한다.

(1) 해당하는 숫자가 1 인 경우
1 이 적힌 상자에는 1 이 적힌 공이 들어가야 한다.
2 가 적힌 상자에는 1 또는 3 이 적힌 공이 들어가야 하고, 3 이 적힌 상자에는 1 또는 2 가 적힌 공이 들어가야 한다.

2 가 적힌 상자에 들어가는 공에 적힌 수를 a,
3 이 적힌 상자에 들어가는 공에 적힌 수를 b 라 하자. 그러면

(1-a) $(a, b) = (1, 1)$ 인 경우
남은 상자에 공을 넣는 방법의 수는 2, 2, 2, 3, 3 을 일렬로 나열하는 방법의 수이므로
$$\frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

(1-b) $(a, b) = (1, 2)$ 인 경우
남은 상자에 공을 넣는 방법의 수는 1, 2, 2, 3, 3 을 일렬로 나열하는 방법의 수이므로
$$\frac{5!}{2!\,2!} = 30$$

(1-c) $(a, b) = (3, 1)$ 인 경우
남은 상자에 공을 넣는 방법의 수는 1, 2, 2, 2, 3 을 일렬로 나열하는 방법의 수이므로
$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(1-d) $(a, b) = (3, 2)$ 인 경우
남은 상자에 공을 넣는 방법의 수는 1, 1, 2, 2, 3 을 일렬로 나열하는 방법의 수이므로
$$\frac{5!}{2!\,2!} = 30$$

따라서 숫자 1 이 적힌 상자에 숫자 1 이 적힌 공이 들어가는 경우의 수는
$$10 + 30 + 20 + 30 = 90$$

(2) 해당하는 숫자가 2 인 경우

이 경우는 (1)의 경우에서 숫자 1 을 숫자 2 로 모두 바꾼 경우와 같다.
상자의 개수와 공의 개수가 서로 같으므로
숫자 2가 적힌 상자에 숫자 2 가 적힌 공이 들어가는 경우의 수는 (1)과 동일하게 90 이다.

(3) 해당하는 숫자가 3 인 경우
3 이 적힌 상자에는 3 이 적힌 공이 들어가야 한다.
1 이 적힌 상자에는 2 또는 3 이 적힌 공이 들어가야 하고, 2 가 적힌 상자에는 1 또는 3 가 적힌 공이 들어가야 한다.

3 이 적힌 공의 개수는 2 이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

1 이 적힌 상자에 들어가는 공에 적힌 수를 c,
2 가 적힌 상자에 들어가는 공에 적힌 수를 d 라 하자. 그러면

(3-a) $(a, b) = (2, 1)$ 인 경우
남은 상자에 공을 넣는 방법의 수는 1, 1, 2, 2, 3 을 일렬로 나열하는 방법의 수이므로
$$\frac{5!}{2!\,2!} = 30$$

(3-b) $(a, b) = (2, 3)$ 인 경우
남은 상자에 공을 넣는 방법의 수는 1, 1, 1, 2, 2 을 일렬로 나열하는 방법의 수이므로
$$\frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

(3-c) $(a, b) = (3, 1)$ 인 경우
남은 상자에 공을 넣는 방법의 수는 1, 1, 2, 2, 2 을 일렬로 나열하는 방법의 수이므로
$$\frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

따라서 숫자 3 이 적힌 상자에 숫자 3 이 적힌 공이 들어가는 경우의 수는
$$30 + 10 + 10 = 50$$

(1) ~ (3)에 의하여 구하는 경우의 수는
$$90 + 90 + 50 = 230$$

미 적 분 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 초월함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1+\sin x}}{3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{3x}$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

24. [출제 의도] 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$\int_0^{\ln 2}e^{2x}dx+\int_{-\ln 2}^{0}ke^{-x}dx$

$=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+ke^{x})dx$

$=\int_0^{\ln 2}e^{x}(e^{x}+k)dx$

$=\left[\frac{1}{2}(e^{x}+k)^2\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}\{(k+2)^2-(k+1)^2\}$

$=\frac{1}{2}(2k+3)=3$

이므로 $k=\frac{3}{2}$ 이다.

25. [출제 의도] 수렴하는 급수의 성질을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

주어진 등식이 성립하려면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n-2n}{n+1}$ 이 각각 수렴해야 한다.

$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2n}{n+1}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n+1}-\frac{2n}{n+1}\right)=0$

이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=2$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=2$ ⋯ ①

한편 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{b_n}{n}\right)=0$

$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\right)=-2$ ⋯ ②

주어진 극한의 분자와 분모를 n^2 으로 나누어 정리하면

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)b_n-n^2}{2na_n+n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n}\times\frac{b_n}{n}-1}{\frac{2a_n}{n}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1}{-4+1}=-\frac{1}{3}$

26. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

점 P 의 x 좌표를 a 라 하자. 그러면 점 Q 의 x 좌표는 $2a$ 이므로

$\mathrm{P}(a,\ ma)$, $\mathrm{Q}(2a,\ 2ma)$

이 두 점은 곡선 $y=\frac{1}{2}+\log_2 x$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}+\log_2 a=ma$ ⋯ ①

$\frac{1}{2}+\log_2 2a=\frac{3}{2}+\log_2 a=2ma$ ⋯ ②

①, ②에서

$2\left(\frac{1}{2}+\log_2 a\right)=\frac{3}{2}+\log_2 a$

$\Rightarrow\ \log_2 a=\frac{1}{2}$, $a=\sqrt{2}$

따라서 $\mathrm{P}(\sqrt{2},1)$, $\mathrm{Q}(2\sqrt{2},2)$ 이다.

또한, 점 A 의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 이다.

직선 AP, AQ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 라 하면

$\tan\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

$\tan\theta_2=\frac{2}{2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$\therefore\ \tan(\angle\mathrm{PAQ})=\tan(\theta_1-\theta_2)$

$=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$

$=\frac{\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1+\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{7}$

27. [출제 의도] 급수와 정적분의 관계를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

$V_n(x)=\frac{1}{n}\times(f(x))^2=\frac{1}{n}\times(x-1)e^{-2(x-1)^2}$

이므로 급수와 정적분의 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}V_{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\times\left(f\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^2$

$=\frac{1}{2}\int_1^2(f(x))^2dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^2(x-1)e^{-2(x-1)^2}dx$

$=-\frac{1}{8}\left[e^{-2(x-1)^2}\right]_1^2=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

28. [출제 의도] 역함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$g(-1)=k_1$, $g(1)=k_2$ 라 하자.

$f(k_1)=-1$, $f(k_2)=1$ 이므로

$\tan k_1+a\ln(\cos k_1)=-1$

$\tan k_2+a\ln(\cos k_2)=1$

$\Rightarrow\ \tan k_1+\tan k_2+a\ln(\cos k_1\cos k_2)=0$ ⋯ ①

$\ln(\cos k_1\cos k_2)<0$ 이고,

$k_1+k_2>0\ \Rightarrow\ k_1>-k_2$ 이므로

$\tan k_1+\tan k_2>\tan(-k_2)+\tan k_2=0$

따라서 ①에 의하여 $a>0$ 이다. ⋯ ②

$f'(x)=\sec^2 x-a\tan x=\tan^2 x-a\tan x+1$

이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(t)=\frac{1}{f'(g(t))}=\frac{1}{\tan^2 g(t)-a\tan g(t)+1}$

이므로 문제의 조건에 의하여

방정식 $\tan^2 g(t)-a\tan g(t)+1=\frac{3}{4}$ 의 실근이 오직 하나 존재하고, 그 근은 α 이다.

함수 $g(t)$ 는 일대일대응이고, 탄젠트함수 또한 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 에서 일대일대응이므로 이차방정식

$x^2-ax+\frac{1}{4}=0$

의 실근이 오직 하나 존재해야 한다. 위 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D=a^2-1=0$, $a=\pm 1$

②에 의하여 $a=1$ 이고,

$\tan^2 g(t)-\tan g(t)+\frac{1}{4}=0$

에서 $\tan g(t)=\frac{1}{2}$ 이다.

즉, $\tan g(\alpha)=\frac{1}{2}$ 이고,

$-\frac{\pi}{2}<g(\alpha)<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos g(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\alpha=f(g(\alpha))=\tan g(\alpha)+a\ln(\cos g(\alpha))$

$=\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{\sqrt{5}}$

이므로 $e^{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times e^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{5e}}{5}$

29. [출제 의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

$f''(1)=\frac{1}{4}f'(1)$ 이므로 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$\sqrt{\frac{1+\{f'(1)\}^2}{3}}=2f'(1)\times\frac{1}{4}f'(1)$

$\Rightarrow\ \sqrt{1+\{f'(1)\}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\{f'(1)\}^2$

$\{f'(1)\}^2=\alpha$ 라 하고 위 등식의 양변을 제곱하면

$1+\alpha=\frac{3}{4}\alpha^2$

$3\alpha^2-4\alpha-4=0$, $(3\alpha+2)(\alpha-2)=0$

$\alpha>0$ 이므로 $\alpha=2$ 이다.

한편 주어진 등식을 정리하면

$\frac{2f'(x)f''(x)}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

$\Rightarrow\ \frac{(1+\{f'(x)\}^2)'}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

양변을 적분하면

$2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+2x}+C$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$2\sqrt{3}=\sqrt{3}+C\quad\therefore\ C=\sqrt{3}$

$\therefore\ \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+2x}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

양변을 1 에서 13 까지 적분하면

$\int_1^{13}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^{13}\sqrt{1+2x}\,dx+6\sqrt{3}$

$=\frac{1}{6}\left[(1+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{13}+6\sqrt{3}$

$=\frac{1}{6}\times(81\sqrt{3}-3\sqrt{3})+6\sqrt{3}=19\sqrt{3}$

$\therefore\ l\times\sqrt{3}=57$

30. [출제 의도] 초월함수의 미분을 이용하여 급수의 값을 계산할 수 있는가?

$0\le x\le 1$ 일 때, $f(x)=4^x-1$ 이므로

열린구간 $(0,1)$ 에서 $f'(x)=4^x\ln 4$ 이다. 따라서

$f'(a_1)=3$

$\Rightarrow\ 4^{a_1}\ln 4=3\,,\ f(a_1)=4^{a_1}-1=\dfrac{3}{\ln 4}-1\ \cdots$ ①

$2^n-2\le x\le 2^{n+1}-2$ 일 때,

$f(x+1)=2f\left(\dfrac{x}{2}\right)+3$

$x=2^k-2$ 가 아닌 점에서 함수 f 는 미분가능하므로 ⋯ **(#)**

$\Rightarrow\ f'(x+1)=f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$

양변에 $x=2a_n$ 을 대입하면

$f'(2a_n+1)=f'(a_n)$

따라서 $f'(a_n)=3$ 이면 $f'(2a_n+1)=3$ 이다.

$a_n<2a_n+1$ 이고,

$2^n-2\le x=2a_n\le 2^{n+1}-2$

$\Rightarrow\ 2^{n-1}-1\le a_n\le 2^n-1$

$\Rightarrow\ 2^n-1\le 2a_n+1\le 2^{n+1}-1$

이다. 또한 열린구간 $(2^{n-1}-1\,,\,2^n-1)$에서 $f'(x)=3$ 인 x 의 값은 유일하므로 ⋯ **(##)**

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n+1$

조건 (나)의 양변에 $x=2a_n$ 을 대입하면

$f(2a_n+1)=2f(a_n)+3$

이므로 $f(a_{n+1})=2f(a_n)+3$ 이다.

양변에 $f(a_n)$ 을 더하면

$f(a_{n+1})+f(a_n)=3\{f(a_n)+1\}$

이므로

$$\frac{(-1)^{n-1}\{1+f(a_n)\}}{f(a_n)f(a_{n+1})}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{3}\times\frac{f(a_n)+f(a_{n+1})}{f(a_n)f(a_{n+1})}$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{3}\times\left(\frac{1}{f(a_n)}+\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\{1+f(a_k)\}}{f(a_k)f(a_{k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{3}\times\left(\frac{1}{f(a_k)}+\frac{1}{f(a_{k+1})}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{f(a_1)}+\frac{1}{f(a_2)}\right)-\left(\frac{1}{f(a_2)}+\frac{1}{f(a_3)}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{f(a_n)}-\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{f(a_1)}+\frac{(-1)^{n-1}}{3}\times\frac{1}{f(a_{n+1})}$$

한편 모든 자연수 n 에 대하여 $f(a_n)>0$ 이고 $f(a_{n+1})>2f(a_n)$ 이므로 $f(a_n)>2^{n-1}f(a_1)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(a_n)}=0$

따라서

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{f(a_1)}+\frac{(-1)^n}{3}\times\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3f(a_1)}$$

①에 의하여 $S=\dfrac{1}{\dfrac{9}{\ln 4}-3}=\dfrac{\ln 4}{9-3\ln 4}$

$\therefore\ \dfrac{\ln 4}{S}=9-3\ln 4=9-\ln 64\,,\ p+q=9+64=73$

⟨(#), (##)에 대한 보충 설명⟩

수학적 귀납법으로 모든 자연수 n 에 대하여 열린구간 $(2^{n-1}-1\,,\,2^n-1)$에서 $f(x)$ 는 미분가능하고, $f'(x)$ 는 일대일대응임을 보이면 충분하다.

(1) $n=1$ 일 때,
조건 (가)에 의하여 열린구간 $(0\,,1)$ 에서 $f(x)$ 는 미분가능하고, $f'(x)=4^x\ln 4$ 이므로 $f'(x)$ 는 일대일대응이다.

(2) $n=k\ (k\ge 1)$ 일 때 주어진 명제가 참이라고 하자. $n=k+1$ 일 때,

$$f(x+1)=2f\left(\frac{x}{2}\right)+3\ \cdots\ (*)$$

에서 $2^k-2\le x\le 2^{k+1}-2$ 이면

$2^{k-1}-1\le\dfrac{x}{2}\le 2^k-1$ 이다.

가정에 의하여 열린구간 $(2^{k-1}-1\,,\,2^k-1)$에서 함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로 $(*)$의 우변은 위의 열린구간에서 미분가능하다.

따라서 $2^k-2\le x\le 2^{k+1}-2$
$\Rightarrow\ 2^k-1<x+1<2^{k+1}-1$
에서 함수 $f(x+1)$ 은 미분가능하다.

즉, 열린구간 $(2^k-1\,,\,2^{k+1}-1)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 미분가능하다.

또한 $f'(x+1)=f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 에서 우변이 일대일대응이므로 좌변 또한 일대일대응이다.

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 주어진 명제는 참이다.

기 하 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 벡터가 평행할 조건을 이해하고 있는가?

$\vec{a}=k\vec{b}$ 인 상수 k 가 존재해야 한다.

$2=ka\,,\ -3=6k$ 에서

$k=-\dfrac{1}{2}$ 이고, $a=-4$

24. [출제 의도] 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

포물선 $y^2=4px$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$y=-2x+\dfrac{p}{-2}=-2x-\dfrac{p}{2}$

이 직선이 $(3\,,k)$를 지나므로

$k=-6-\dfrac{p}{2}$

이를 포물선 $y^2=4px$ 에 대입하면

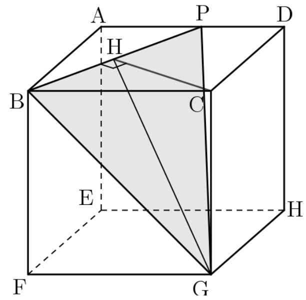
$12p=\left(-6-\dfrac{p}{2}\right)^2$

$\dfrac{p^2}{4}-6p+36=0\,,\ (p-12)^2=0$

$\therefore\ p=12\,,\ k=-12$

25. [출제 의도] 삼수선의 정리를 이용하여 이면각의 크기를 구할 수 있는가?

점 C 에서 선분 BP 로 내린 수선의 발을 H 라 하자. 그러면 선분 CG 는 평면 ABCD 와 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CH}}\perp\overline{\mathrm{BP}}$ 이다.



두 평면 ABCD 와 EFGH 는 서로 평행하므로 평면 BGP 와 EFGH 가 이루는 각의 크기는 평면 BGP 와 ABCD 가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, $\theta=\angle\mathrm{CHG}$ 이다.

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}\ \Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ 이고,

$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{CG}}}{\overline{\mathrm{GH}}}$ 에서 $\overline{\mathrm{GH}}=\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{CG}}=2$ 이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{GH}}^2-\overline{\mathrm{CG}}^2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=1$ 이고

$\triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{HCB}$ 이므로

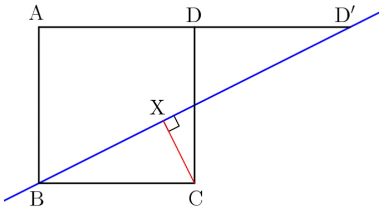
$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{CH}}$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{CH}}}=\dfrac{2\times 1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

26. [출제 의도] 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

$2\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD'}}$ 라 하고, $s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}$ 라 하면, $s+t=1$ 이므로 점 X 는 두 점 B, D$'$ 을 지나는 직선 위의 점이다.

따라서 $\left|s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$가 최소가 되려면 X 가 점 C 에서 직선 BD$'$ 위로 내린 수선의 발이어야 하고, 그 값은 $\overline{\mathrm{CX}}$ 와 같다.



직선 BD′와 선분 CD의 교점은 선분 CD의 중점이므로

$$\overline{CX} = \frac{1}{\sqrt{5}}\times\overline{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

(다른 풀이) 점 B를 원점으로 두면
$\overrightarrow{AB}=(0,\,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(2,\,0)$, $\overrightarrow{AC}=(2,\,-2)$

$s=1-t$이므로
$s\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$
$=s\,(0,\,-2)+2t\,(2,\,0)-(2,\,-2)$
$=(4t-2,\,-2s+2)$
$=(4t-2,\,2t)$

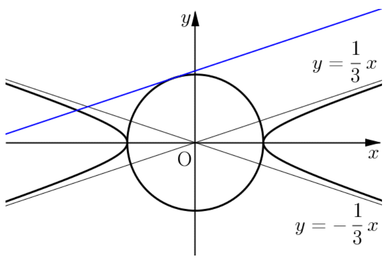
이므로
$|s\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}|$
$=\sqrt{(4t-2)^2+(2t)^2}$
$=2\sqrt{(2t-1)^2+t^2}$
$=2\sqrt{5t^2-4t+1}$
$=2\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\geq\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 주어진 식은 $t=\frac{2}{5}$일 때 최솟값 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$를 갖는다.

27. [출제 의도] 쌍곡선의 점근선을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$A\geq 0$인 실수 A와 실수 B에 대하여
$A=|B|$일 필요충분조건은 $B=\pm A$이다.

따라서 주어진 방정식의 절댓값 기호를 풀어 정리하면
$x^2-4y^2-1=\pm 5y^2$
$\Rightarrow\ x^2-9y^2=1$ 또는 $x^2+y^2=1$
이므로 주어진 곡선은 쌍곡선 $x^2-9y^2=1$과 원 $x^2+y^2=1$을 합한 곡선이다.



$k\neq 0$이면 직선 $y=\frac{1}{3}x+k$는 쌍곡선 $x^2-9y^2=1$의 한 점근선 $y=\frac{1}{3}x$와 평행하므로 직선 $y=\frac{1}{3}x+k$과 쌍곡선 $x^2-9y^2=1$은 항상 한 점에서 만난다.

따라서 주어진 곡선과 직선 $y=\frac{1}{3}x+k$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=\frac{1}{3}x+k$가 원 $x^2+y^2=1$에 접해야 한다.

$y=\frac{1}{3}x+k\ \Rightarrow\ x-3y+3k=0$에서 $k>0$이므로
$\frac{|3k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{3k}{\sqrt{10}}=1$이고 $k=\frac{\sqrt{10}}{3}$이다.

28. [출제 의도] 구의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

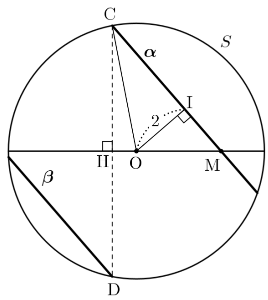
점 O와 직선 PQ 사이의 거리는 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로 $\mathrm{P}(\sqrt{7},3,0)$, $\mathrm{Q}(\sqrt{7},-3,0)$으로 두어도 일반성을 잃지 않는다.

선분 PQ의 중점을 M이라 하고, 평면 α가 구 S와 만나는 점 중 x좌표가 최소인 점을 C, 평면 β가 구 S와 만나는 점 중 x좌표가 최대인 점을 D라 하자.

문제의 조건에 의해 점 C와 D의 xy평면 위로의 정사영은 동일해야 한다. 그 점을 H라 하자.

점 O에서 평면 α 위로 내린 수선의 발을 I라 하면 문제의 조건에 의하여 $\overline{OI}=2$이다.

문제의 상황을 xz평면으로 자른 것은 그림과 같다.



$\overline{OM}=\sqrt{7}$, $\overline{IM}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{OI}^2}=\sqrt{3}$,
$\overline{CI}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{OI}^2}=2\sqrt{3}$
이므로 $\overline{CM}=3\sqrt{3}$이다.

$\triangle\mathrm{CHM}\backsim\triangle\mathrm{OIM}$이므로
$\overline{CM}:\overline{CH}=\overline{OM}:\overline{OI}$
$\Rightarrow\ \overline{CH}=\frac{3\sqrt{3}\times 2}{\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$

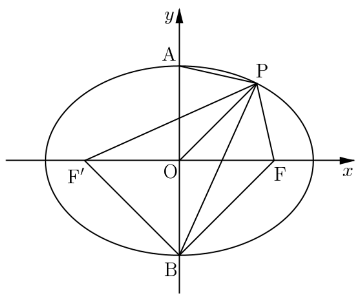
두 점 C, D의 x, y좌표가 서로 같으므로
두 점의 z좌표는 절댓값은 같고, 부호가 반대이다.

$\therefore\ \overline{CD}=2\overline{CH}=\frac{12\sqrt{21}}{7}$

이때 두 원 C_1, C_2의 반지름을 각각 r_1, r_2,
두 평면 α, β 사이의 거리를 d라 하고,
점 B의 평면 α 위로의 정사영을 B′이라 하면
$\overline{AB}=\sqrt{d^2+\overline{AB'}^2}\leq\sqrt{d^2+(r_1+r_2)^2}=\overline{CD}$
이므로 $\overline{AB}$의 최댓값은 $\frac{12\sqrt{21}}{7}$이다.

29. [출제 의도] 타원의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$a>0$이라 하면, $c^2=2a^2-a^2=a^2$이므로
$\overline{OA}=\overline{OF}=\overline{OB}=\overline{OF'}=a\ \cdots$ ①



$\overline{PB}=\overline{PF'}$, $\overline{OP}$는 공통, ①에서
$\triangle\mathrm{POF'}\equiv\triangle\mathrm{POB}$
따라서 $\angle\mathrm{POF'}=\angle\mathrm{POB}$
$\Rightarrow\ \angle\mathrm{POA}=\angle\mathrm{POF}\ \cdots$ ②

①, ②, $\overline{OP}$는 공통에서
$\triangle\mathrm{POA}\equiv\triangle\mathrm{POF}$
$\therefore\ \overline{PA}=\overline{PF}$

이 타원의 장축의 길이는 $2\sqrt{2}a$이므로 삼각형 PAB의 둘레의 길이는
$\overline{AB}+\overline{PA}+\overline{PB}$
$=\overline{AB}+\overline{PF}+\overline{PF'}=2a+2\sqrt{2}a$
즉, $(2+2\sqrt{2})a=12+6\sqrt{2}\ \Rightarrow\ a=3\sqrt{2}$

한편 ②에서 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점임을 알 수 있다.

타원의 방정식이 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$이므로

$$y=x\ \Rightarrow\ \frac{3x^2}{36}=1\ \Rightarrow\ x=y=\pm 2\sqrt{3}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(2\sqrt{3},\,2\sqrt{3})$이고,
사각형 PFBF′의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{FF'}\times(\overline{OB}+2\sqrt{3})$
$=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$
$=18+6\sqrt{6}$
$\therefore\ p+q=18+6=24$

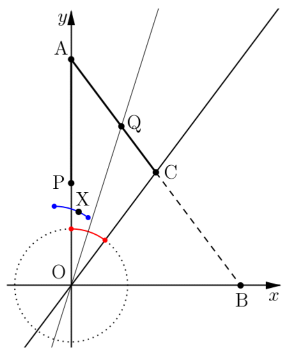
30. [출제 의도] 위치벡터와 평면벡터의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 벡터 $\frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$, $\frac{\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BQ}|}$는 각각 $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{BQ}$와 평행하고 크기가 1인 벡터이다.
$\frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}=\overrightarrow{u_{\mathrm{OQ}}}$, $\frac{\overrightarrow{BQ}}{|\overrightarrow{BQ}|}=\overrightarrow{u_{\mathrm{BQ}}}$라 하자.

점 Q가 선분 AC 위에 있을 때와 선분 AP 위에 있을 때로 나누어 생각한다.

(1) 점 Q가 선분 AC 위에 있는 경우
$\overrightarrow{u_{\mathrm{BQ}}}$는 $\overrightarrow{BA}$와 평행하므로
$\overrightarrow{u_{\mathrm{BQ}}}=\frac{1}{\sqrt{(-6)^2+8^2}}\times(-6,8)=\left(-\frac{3}{5},\,\frac{4}{5}\right)$

또한 $\frac{2\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}=2\overrightarrow{u_{\mathrm{OQ}}}$는 시점이 O이고 크기가 2인 벡터이므로 벡터 $2\overrightarrow{u_{\mathrm{OQ}}}$의 종점은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이다.
즉, 벡터 $2\overrightarrow{u_{\mathrm{OQ}}}$의 종점이 그리는 도형은 직선 OA, OC와 원 $x^2+y^2=4$이 만나는 두 점을 끝점으로 하는 호가 된다.



따라서 X가 그리는 도형은 이 호를 $\overrightarrow{u_{\mathrm{BQ}}}$에 의하여 평행이동한 것이 된다.

(2) 점 Q가 선분 AP 위에 있는 경우

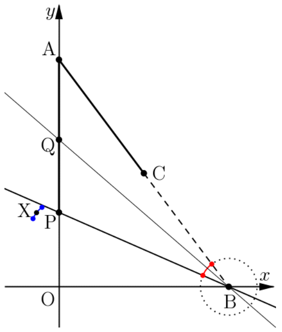
벡터 $2\overrightarrow{u_{\mathrm{OQ}}}$는 $(0, 2)$와 같고, 벡터 $\overrightarrow{u_{\mathrm{BQ}}}$의 종점은 원 $(x-6)^2+y^2=1$ 위의 점이다.

즉, 벡터 $\overrightarrow{u_{\mathrm{BQ}}}$의 종점이 그리는 도형은 직선 BA, BP가 원 $(x-6)^2+y^2=1$과 만나는 두 점을 끝점으로 하는 호가 된다.

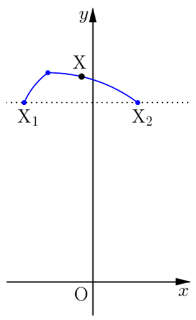
한편 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BX}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BX}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-6, 2)+\overrightarrow{u_{\mathrm{BQ}}}$

이고, 점 X가 그리는 도형은 위에서 구한 호를 벡터 $(-6, 2)$에 의해 평행이동한 호와 같다.



(1), (2)에서 점 X가 그리는 도형 S는 아래 그림과 같다.



도형 S에서 y좌표가 최소가 될 수 있는 두 점은 x좌표가 가장 큰 점 X_2와 가장 작은 점 X_1이다.

즉, 두 점 X_1, X_2의 y좌표가 서로 같아야 한다.

(1)에서 직선 OC와 원 $x^2+y^2=4$의 교점은 x좌표와 y좌표의 비가 $3:4$이므로

교점의 좌표는 $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$이다.

따라서 X_2의 좌표는

$$\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}, \frac{8}{5}+\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right) \quad \cdots ①$$

즉, X_1의 y좌표가 $\frac{12}{5}$이므로

(2)에서 직선 BP와 원 $(x-6)^2+y^2=1$의 교점의 y좌표는 $\frac{12}{5}-2=\frac{2}{5}$이다.

따라서 그 교점의 x좌표는

$$6-\sqrt{1^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=6-\frac{\sqrt{21}}{5}$$

이고, X_1의 x좌표는

$$6-\frac{\sqrt{21}}{5}-6=-\frac{\sqrt{21}}{5} \quad \cdots ②$$

①, ②에 의하여 X_1, X_2의 두 x좌표의 합은

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{21}$$

$$\therefore\ 25(a^2+b^2)=25\times\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2\right)=10$$