

2026학년도 9월 공통수학 변형 문제 (11-22번 정답 및 해설)

Contents

1	지수법칙	3
2	미분계수의 정의	4
3	수열의 합	5
4	함수의 극한	6
5	곱의 미분법	7
6	삼각함수의 성질	8
7	직선의 방정식	9
8	지수 방정식	10
9	부정적분	11
10	등비수열	12
11	속도와 위치의 관계	13
12	지수/로그 함수의 대칭성	14
13	함수의 연속성	15
14	삼각함수와 도형	16
15	정적분과 미분	17
16	수열의 귀납적 정의	18
17	부정적분	19
18	등차수열	20
19	함수의 극대와 극소	21
20	삼각함수 그래프와 실근	22

21 함수의 부등식과 미분	23
22 곡선 위의 점과 도형의 넓이	24

1 지수법칙

$4^{(\sqrt{5}+1)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(2\sqrt{5})}$ 의 값은?

- ① $1/4$
- ② $1/2$
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 4

정답: ⑤

- 설명:
1. 해결의 핵심은 지수법칙을 활용하여 밑을 2로 통일하는 것입니다.
 2. $4 = 2^2$ 이고 $1/2 = 2^{-1}$ 입니다.
 3. 첫 번째 항을 변환합니다: $4^{(\sqrt{5}+1)} = (2^2)^{(\sqrt{5}+1)} = 2^{2(\sqrt{5}+1)} = 2^{2\sqrt{5}+2}$.
 4. 두 번째 항을 변환합니다: $\left(\frac{1}{2}\right)^{(2\sqrt{5})} = (2^{-1})^{(2\sqrt{5})} = 2^{-2\sqrt{5}}$.
 5. 변환된 두 항을 곱합니다: $2^{2\sqrt{5}+2} \times 2^{-2\sqrt{5}}$.
 6. 지수법칙 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 을 적용하여 지수를 더하면, $2^{(2\sqrt{5}+2)+(-2\sqrt{5})} = 2^2 = 4$ 입니다.

2 미분계수의 정의

다항함수 $f(x) = 3x^2 + ax$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 10$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 0
- ⑤ 1

정답: ③

설명: 1. 주어진 극한 식을 미분계수의 정의 형태와 일치시키기 위해 변형합니다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2$$

- 2. 위 식에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h}$ 는 $f'(1)$ 과 같습니다.
- 3. 따라서 주어진 식은 $2f'(1)$ 이 되며, 문제 조건에 의해 $2f'(1) = 10$ 이므로 $f'(1) = 5$ 입니다.
- 4. 함수 $f(x) = 3x^2 + ax$ 의 도함수는 $f'(x) = 6x + a$ 입니다.
- 5. $f'(1) = 6(1) + a = 6 + a$ 입니다.
- 6. $f'(1) = 5$ 이므로, $6 + a = 5$ 가 성립하여 $a = -1$ 입니다.

3 수열의 합

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, 수열의 합에 대한 다음 두 식이 주어졌을 때 a_{10} 의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10} (k + a_k) = 105$$

$$\sum_{k=1}^9 (k - a_k) = -36$$

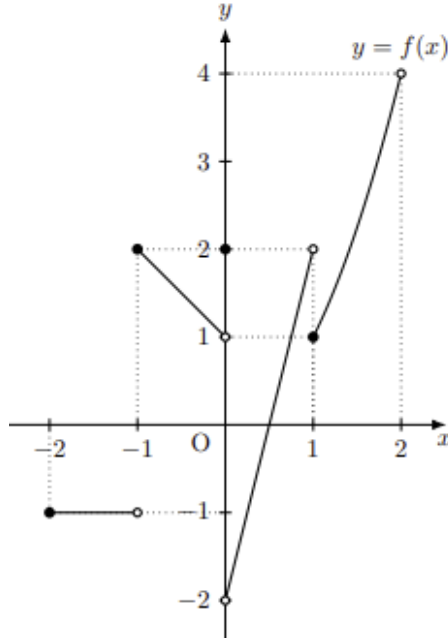
- ① -131
- ② -31
- ③ 31
- ④ 50
- ⑤ 81

정답: ②

- 설명:
1. 첫 번째 식을 시그마의 성질을 이용해 분리합니다: $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} a_k = 105$.
 2. 자연수의 합 공식을 적용하면 $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10(11)}{2} = 55$ 입니다.
 3. 따라서 $55 + \sum_{k=1}^{10} a_k = 105$ 이므로, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 50$ 입니다.
 4. 두 번째 식도 분리합니다: $\sum_{k=1}^9 k - \sum_{k=1}^9 a_k = -36$.
 5. $\sum_{k=1}^9 k = \frac{9(10)}{2} = 45$ 이므로, $45 - \sum_{k=1}^9 a_k = -36$ 입니다.
 6. 따라서 $\sum_{k=1}^9 a_k = 45 + 36 = 81$ 입니다.
 7. 수열의 합의 정의에 따라 $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^9 a_k + a_{10}$ 입니다.
 8. 위에서 구한 값들을 대입하면 $50 = 81 + a_{10}$ 입니다.
 9. 그러므로 $a_{10} = 50 - 81 = -31$ 입니다.

4 함수의 극한

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 가 다음과 같을 때,



$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 의 값은?

- ① -4
- ② -2
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 14

정답: ④

설명: 1. 우극한 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ 를 구합니다. x 가 -1보다 큰 쪽에서 가까워지므로, $-1 \leq x < 0$ 구간의 식인 $f(x) = -x + 1$ 을 사용합니다.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x + 1) = -(-1) + 1 = 2$$

2. 좌극한 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 를 구합니다. x 가 1보다 작은 쪽에서 가까워지므로, $0 < x < 1$ 구간의 식인 $f(x) = 4x - 2$ 를 사용합니다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x - 2) = 4(1) - 2 = 2$$

3. 두 극한값의 곱은 $2 \times 2 = 4$ 입니다.

5 곱의 미분법

함수 $f(x) = (x^2 + a)(x^3 + 3x)$ 에 대하여 $f'(1) = 20$ 일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

정답: ①

- 설명:
1. 곱의 미분법 $(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ 를 이용합니다.
 2. $g(x) = x^2 + a$, $h(x) = x^3 + 3x$ 로 두면, $g'(x) = 2x$, $h'(x) = 3x^2 + 3$ 입니다.
 3. 도함수 $f'(x) = (2x)(x^3 + 3x) + (x^2 + a)(3x^2 + 3)$ 입니다.
 4. $f'(1) = 20$ 조건에 따라 $x = 1$ 을 대입합니다. $f'(1) = (2)(1+3) + (1+a)(3+3) = 8 + 6(1+a) = 14 + 6a$.
 5. $14 + 6a = 20$ 이므로 $6a = 6$, 따라서 $a = 1$ 입니다.

6 삼각함수의 성질

$\sin(\theta + \pi/2) = -12/13$ 이고 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 일 때, $\tan \theta$ 의 값은?

- ① $-\frac{5}{13}$
- ② $-\frac{5}{12}$
- ③ $\frac{5}{13}$
- ④ $\frac{5}{12}$
- ⑤ $\frac{12}{13}$

정답: ②

- 설명:
1. 삼각함수의 각 변환 공식에 의해 $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$ 입니다. 따라서 $\cos \theta = -12/13$ 입니다.
 2. $\cos \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각입니다.
 3. 두 번째 조건 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 은 $\cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > 0$, 즉 $\sin \theta > 0$ 을 의미합니다.
 4. $\sin \theta > 0$ 이므로 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각입니다.
 5. 두 조건을 모두 만족하는 θ 는 제2사분면의 각입니다.
 6. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 을 이용하여 $\sin \theta$ 를 구합니다: $\sin^2 \theta + (-12/13)^2 = 1 \implies \sin^2 \theta = 1 - 144/169 = 25/169$.
 7. θ 가 제2사분면에 있으므로 $\sin \theta > 0$ 이고, $\sin \theta = 5/13$ 입니다.
 8. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{5/13}{-12/13} = -5/12$ 입니다.

7 직선의 방정식

두 함수 $f(x) = x^3 - ax$ 와 $g(x) = bx^2 + 1$ 의 그래프가 점 $(1, c)$ 에서 만나고, 이 점에서의 두 접선이 일치할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

- ① -3
- ② 0
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 6

정답: ②

- 설명:
1. 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 가 점 $(1, c)$ 에서 만나므로, $x = 1$ 에서의 함숫값이 같습니다. $f(1) = g(1)$ 에서 $1^3 - a1 = b(1)^2 + 1$ 이므로, $1 - a = b + 1$, 즉 $a = -b$ 입니다. (식 ①)
 2. 또한, 점 $(1, c)$ 에서 공통으로 지나는 접선의 방정식을 가지므로, $x = 1$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기는 같습니다. 즉, $f'(1) = g'(1)$ 입니다. 각 함수를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - a$ 이고, $g'(x) = 2bx$ 입니다. $f'(1) = 3(1)^2 - a = 3 - a$ 이고, $g'(1) = 2b(1) = 2b$ 입니다. 따라서 $3 - a = 2b$ 입니다. (식 ②)
 3. 식 ①을 식 ②에 대입하면, $3 - (-b) = 2b$ 가 됩니다.
 4. $3 + b = 2b$ 이므로 $b = 3$ 입니다.
 5. $a = -b$ 이므로 $a = -3$ 입니다.
 6. 문제에서 요구하는 값은 $a + b$ 이므로, $-3 + 3 = 0$ 입니다.

8 지수 방정식

두 실수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $9^a + 9^b$ 의 값은?

$$3^a + 3^b = 12, \quad 3^{a+b} = 27$$

- ① 72
- ② 78
- ③ 84
- ④ 87
- ⑤ 90

정답: ⑤

- 설명:
1. $X = 3^a, Y = 3^b$ 로 치환합니다.
 2. 주어진 조건은 $X + Y = 12$ 와 $XY = 3^{a+b} = 27$ 로 변환됩니다.
 3. 구하고자 하는 값은 $9^a + 9^b = (3^a)^2 + (3^b)^2 = X^2 + Y^2$ 입니다.
 4. 곱셈 공식의 변형을 이용합니다: $X^2 + Y^2 = (X + Y)^2 - 2XY$.
 5. 값을 대입하여 계산합니다: $12^2 - 2(27) = 144 - 54 = 90$.

9 부정적분

다항함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하고, 함수 $3f(x) - 2x$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 하자. $G(1) = 3F(1)$ 을 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여, $G(2) - 3F(2)$ 의 값은?

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

정답: ③

- 설명:
1. 문제의 정의에 따라 $F'(x) = f(x)$ 이고 $G'(x) = 3f(x) - 2x$ 입니다.
 2. 새로운 함수 $H(x) = G(x) - 3F(x)$ 를 정의합니다.
 3. $H(x)$ 를 미분하면 $H'(x) = G'(x) - 3F'(x) = (3f(x) - 2x) - 3f(x) = -2x$ 입니다.
 4. $H'(x) = -2x$ 이므로, $H(x)$ 를 구하기 위해 부정적분을 합니다: $H(x) = \int (-2x)dx = -x^2 + C$.
 5. 즉, $G(x) - 3F(x) = -x^2 + C$ 입니다.
 6. 조건 $G(1) = 3F(1)$ 은 $G(1) - 3F(1) = 0$ 을 의미합니다. 위 관계식에 $x = 1$ 을 대입하면 $G(1) - 3F(1) = -1^2 + C = 0$ 이므로, $C = 1$ 입니다.
 7. 따라서 관계식은 $G(x) - 3F(x) = -x^2 + 1$ 로 확정됩니다.
 8. 문제에서 요구하는 값은 $G(2) - 3F(2)$ 이므로, 관계식에 $x = 2$ 를 대입합니다. $G(2) - 3F(2) = -2^2 + 1 = -4 + 1 = -3$.

10 등비수열

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_8 = 5S_4$

(나) $a_1 + a_3 = 6$

이때, $a_5 + a_9$ 의 값은? [4점]

① 36

② 38

③ 40

④ 42

⑤ 44

정답: ③

설명: 1. 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하자 ($a > 0, r > 0$). 등비수열의 합 공식은 $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 입니다.

2. (가) 조건에서 $\frac{a(r^8-1)}{r-1} = 5\frac{a(r^4-1)}{r-1}$. $a \neq 0$ 이므로, $r^8 - 1 = 5(r^4 - 1)$.

3. $(r^4 - 1)(r^4 + 1) = 5(r^4 - 1)$. 모든 항이 양수이므로 $r \neq 1$ 이고, $r^4 - 1 \neq 0$ 입니다.

4. 양변을 $r^4 - 1$ 로 나누면 $r^4 + 1 = 5$, 즉 $r^4 = 4$ 입니다. $r > 0$ 이므로 $r^2 = 2$ 입니다.

5. (나) 조건에서 $a_1 + a_3 = a + ar^2 = 6$.

6. $a(1 + r^2) = 6$ 에 $r^2 = 2$ 를 대입하면 $a(1 + 2) = 6 \implies 3a = 6 \implies a = 2$.

7. 구하고자 하는 값은 $a_5 + a_9 = ar^4 + ar^8$.

8. $a_5 = 2 \cdot 4 = 8$. $a_9 = 2 \cdot (r^4)^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$.

9. $a_5 + a_9 = 8 + 32 = 40$.

11 속도와 위치의 관계

시각 $t = 0$ 일 때 동시에 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 두 점 P, Q의 속도가 각각 $v_P(t) = 3t^2 - 6t, v_Q(t) = 6t$ 일 때, 이들의 운동에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ. 점 P는 $t = 2$ 에서 운동 방향을 바꾸고, 이때의 위치는 -4이다.
- ㄴ. 구간 $(0, 2)$ 에서 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다.
- ㄷ. $t = 1$ 일 때, 두 점 P, Q는 같은 위치에 있다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답: ②

- 설명:**
1. **위치 함수 구하기:** 각 점의 위치 함수 $x(t)$ 는 속도 함수 $v(t)$ 의 부정적분입니다. 원점에서 출발하므로 적분상수는 0입니다.
 - $x_P(t) = \int (3t^2 - 6t)dt = t^3 - 3t^2$.
 - $x_Q(t) = \int 6tdt = 3t^2$.
 2. **보기 ㄱ 분석:** 점 P의 운동 방향은 속도 $v_P(t) = 3t(t - 2)$ 의 부호가 바뀔 때 변합니다. $t > 0$ 에서 $v_P(t) = 0$ 인 시각은 $t = 2$ 입니다. $t = 2$ 좌우에서 속도의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 운동 방향을 바꿉니다. $t = 2$ 에서의 위치는 $x_P(2) = 2^3 - 3(2^2) = 8 - 12 = -4$ 입니다. (참)
 3. **보기 ㄴ 분석:** 구간 $(0, 2)$ 에서 $v_P(t) = 3t(t - 2) < 0$ (음의 방향), $v_Q(t) = 6t > 0$ (양의 방향) 이므로 서로 반대 방향으로 움직입니다. (참)
 4. **보기 ㄷ 분석:** $t = 1$ 일 때 위치를 비교합니다. $x_P(1) = 1^3 - 3(1^2) = -2$. $x_Q(1) = 3(1^2) = 3$. 두 위치가 다르므로 같은 위치에 있지 않습니다. (거짓)

12 지수/로그 함수의 대칭성

상수 a ($a > 1$)와 t 에 대하여, 직선 $y = -x + t$ 가 두 곡선 $y = a^x$ 와 그 역함수 $y = \log_a(x)$ 와 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 원점 O 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 12이고, 선분 AB 의 길이가 $4\sqrt{2}$ 일 때, $a + t$ 의 값은?

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

정답: ①

- 설명:
1. **대칭성 파악:** 함수 $y = a^x$ 와 $y = \log_a(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대해 대칭입니다. 직선 $y = -x + t$ 는 기울기가 -1이므로 $y = x$ 와 수직입니다. 따라서 두 교점 A, B 는 직선 $y = x$ 에 대해 대칭입니다.
 2. **좌표 설정:** 점 A 의 좌표를 (p, q) 라 하면, 점 B 의 좌표는 (q, p) 가 됩니다.
 3. **선분 길이 조건:** $AB = \sqrt{(q-p)^2 + (p-q)^2} = \sqrt{2(p-q)^2} = \sqrt{2}|p-q| = 4\sqrt{2}$. 따라서 $|q-p| = 4$ 입니다.
 4. **넓이 조건:** 삼각형 OAB 의 넓이는 신발끈 공식을 이용하여 $\frac{1}{2}|p^2 - q^2| = \frac{1}{2}|(p-q)(p+q)| = 12$ 입니다. $|p-q| = 4$ 이므로, $\frac{1}{2}(4|p+q|) = 2|p+q| = 12 \implies |p+q| = 6$.
 5. **t 의 값 구하기:** 점 $A(p, q)$ 는 직선 $y = -x + t$ 위에 있으므로 $q = -p + t \implies p + q = t$ 입니다. A, B 는 1사분면 위의 점이므로 $p, q > 0$ 이고 $t = p + q = 6$.
 6. **a 의 값 구하기:** $p + q = 6$ 과 $|q - p| = 4$ 를 연립하여 풀면 $p = 1, q = 5$ (또는 $p = 5, q = 1$)를 얻습니다. 따라서 A 의 좌표는 $(1, 5)$ 입니다. 점 $A(1, 5)$ 는 곡선 $y = a^x$ 위에 있으므로, $5 = a^1 \implies a = 5$.
 7. **최종 답:** $a + t = 5 + 6 = 11$.

13 함수의 연속성

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 8$ 에 대하여, 함수 $g(x) = \frac{(x+2)^2}{f(x)(f(x)-k(x-2))}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 k 의 개수는? [4점]

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

정답: ⑤

- 설명:
1. 함수 $g(x)$ 가 모든 실수에서 연속하려면 분모가 0이 되는 지점이 없어야 합니다.
 2. $f(x) = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ 는 항상 0보다 큽니다.
 3. 따라서 $h(x) = f(x) - k(x - 2) = (x - 2)^2 + 4 - k(x - 2)$ 가 0이 되는 지점이 없어야 합니다.
 4. $t = x - 2$ 로 치환하면, $t^2 - kt + 4 = 0$ 입니다. 이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 합니다.
 5. 판별식 $D = (-k)^2 - 4(1)(4) = k^2 - 16 < 0$.
 6. $(k - 4)(k + 4) < 0$ 이므로, $-4 < k < 4$ 입니다.
 7. 이를 만족시키는 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 으로 총 **7개**입니다.

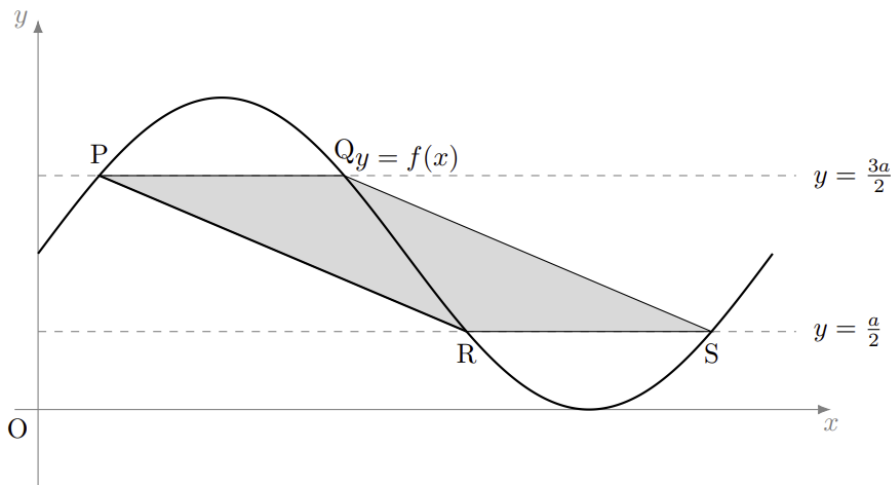
14 삼각함수와 도형

양의 유리수 a, b 에 대하여 정의역이 $\{x \mid 0 < x < \frac{2\pi}{b}\}$ 인 함수 $f(x) = a \sin(bx) + a$ 가 있다.

(가) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 직선 $y = \frac{3a}{2}, y = \frac{a}{2}$ 와 만나는 점들을 이용하여 만든 사각형 PQSR의 넓이는 $\frac{2\pi}{3}$ 이다.

(나) 대각선 PR의 길이는 $\sqrt{1 + \pi^2}$ 이다.

$a + b$ 의 값은? (단 O는 원점이다.)



- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ π

정답: ④

- 설명:
- 교점 찾기:** $f(x) = \frac{3a}{2} \implies \sin(bx) = \frac{1}{2} \implies bx = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. $x_P = \frac{\pi}{6b}, x_Q = \frac{5\pi}{6b}$.
 $f(x) = \frac{a}{2} \implies \sin(bx) = -\frac{1}{2} \implies bx = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. $x_R = \frac{7\pi}{6b}, x_S = \frac{11\pi}{6b}$.
 - 조건 (가) 넓이:** 사각형은 등변사다리꼴이며, 윗변 $x_Q - x_P = \frac{4\pi}{6b}$, 아랫변 $x_S - x_R = \frac{4\pi}{6b}$ 으로 평행사변형입니다. 밑변 길이는 $\frac{2\pi}{3b}$, 높이는 $\frac{3a}{2} - \frac{a}{2} = a$. 넓이 $= \frac{2\pi}{3b} \times a = \frac{2\pi}{3} \implies a = b$.
 - 조건 (나) 길이:** $P(\frac{\pi}{6b}, \frac{3a}{2}), R(\frac{7\pi}{6b}, \frac{a}{2})$. $\overline{PR}^2 = (\frac{7\pi}{6b} - \frac{\pi}{6b})^2 + (\frac{a}{2} - \frac{3a}{2})^2 = (\frac{\pi}{b})^2 + (-a)^2 = 1 + \pi^2$.
 - 연립 풀이:** $a = b$ 를 대입하면, $\frac{\pi^2}{a^2} + a^2 = 1 + \pi^2$. a 가 유리수이므로 $a^2 = 1$, 즉 $a = 1$ 입니다. (만약 $a^2 = \pi^2$ 이면 $a = \pi$ 는 무리수) $a = 1$ 이므로 $b = 1$.
 - 최종 답:** $a + b = 1 + 1 = 2$.

15 정적분과 미분

최고차항의 계수가 양수이고 $f(0) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = \int_0^x (f(t) - t^2) dt$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{cases} \text{(가) 함수 } g(x) \text{는 } x = 1 \text{과 } x = 3 \text{에서 극값을 갖는다.} \\ \text{(나) } f'(1) = -5 \end{cases}$$

$f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 0
- ⑤ 2

정답: ①

- 설명:
1. (가) 조건에서 $g(x)$ 가 $x = 1, 3$ 에서 극값을 가지므로, $g'(1) = 0, g'(3) = 0$ 입니다.
 2. 미적분학의 기본정리에 의해 $g'(x) = f(x) - x^2$ 입니다.
 3. 따라서 $g'(1) = f(1) - 1 = 0 \implies f(1) = 1$. $g'(3) = f(3) - 9 = 0 \implies f(3) = 9$.
 4. $f(x)$ 는 최고차항 계수가 양수인 삼차함수이고 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = kx^3 + px^2 + qx$ ($k > 0$)로 놓을 수 있습니다.
 5. $f(1) = k + p + q = 1$, $f(3) = 27k + 9p + 3q = 9$.
 6. (나) 조건에서 $f'(x) = 3kx^2 + 2px + q$ 이므로 $f'(1) = 3k + 2p + q = -5$.
 7. 위 세 식을 연립하여 풀면 $k = 7/2, p = -13, q = 21/2$ 를 얻습니다.
 8. $f(x) = \frac{7}{2}x^3 - 13x^2 + \frac{21}{2}x$.
 9. $f(2) = \frac{7}{2}(8) - 13(4) + \frac{21}{2}(2) = 28 - 52 + 21 = -3$.

16 수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 다음의 점화식을 만족시킨다.

$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + 3$$

$a_2 + a_4$ 의 값을 구하시오. [4점]

정답: 0

- 설명:
1. 주어진 점화식에 n 값을 차례대로 대입하여 항을 구합니다.
 2. $n = 1$ 일 때: $a_2 = (-1)^1 a_1 + 3 = -1(1) + 3 = 2$.
 3. $n = 2$ 일 때: $a_3 = (-1)^2 a_2 + 3 = 1(2) + 3 = 5$.
 4. $n = 3$ 일 때: $a_4 = (-1)^3 a_3 + 3 = -1(5) + 3 = -2$.
 5. 문제에서 요구하는 값은 $a_2 + a_4 = 2 + (-2) = 0$ 입니다.

17 부정적분

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 4x^3 - 6x$ 이고 $f(-1) = 3$ 일 때, $f(2)$ 의 값은?

정답: 9

설명: 1. $f(x)$ 를 구하기 위해 $f'(x)$ 를 부정적분합니다.

$$f(x) = \int (4x^3 - 6x)dx = x^4 - 3x^2 + C$$

2. $f(-1) = 3$ 조건을 이용하여 적분상수 C 를 구합니다. $f(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^2 + C = 1 - 3 + C = -2 + C = 3$. 따라서 $C = 5$ 입니다.

3. 함수는 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ 입니다.

4. $f(2)$ 의 값을 계산합니다: $f(2) = 2^4 - 3(2)^2 + 5 = 16 - 12 + 5 = 9$.

18 등차수열

이차방정식 $x^2 - 12x + 32 = 0$ 의 두 근이 어떤 등차수열 $\{a_n\}$ 의 제3항과 제5항일 때, 이 수열의 제10항 a_{10} 의 값을 구하시오.

정답: 18

- 설명:
1. 이차방정식 $x^2 - 12x + 32 = 0$ 을 인수분해하면 $(x - 4)(x - 8) = 0$ 이므로, 두 근은 4와 8입니다.
 2. 등차수열의 제3항과 제5항이 4와 8입니다. $a_3 = 4, a_5 = 8$ 이라 가정합니다. (반대도 가능)
 3. $a_5 = a_3 + 2d$ 이므로, $8 = 4 + 2d \implies 2d = 4 \implies d = 2$. (공차)
 4. $a_3 = a_1 + 2d$ 이므로, $4 = a_1 + 2(2) \implies a_1 = 0$. (첫째항)
 5. 제10항 $a_{10} = a_1 + 9d = 0 + 9(2) = 18$.

19 함수의 극대와 극소

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 와 $x = 2$ 에서 극값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오.

정답: 32

- 설명:
1. 최고차항 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 최고차항 계수가 3인 이차함수입니다.
 2. $x = -2, 2$ 에서 극값을 가지므로 $f'(x)$ 는 두 근 $-2, 2$ 를 갖습니다. $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2) = 3x^2 - 12$.
 3. $f(x) = \int(3x^2 - 12)dx = x^3 - 12x + C$.
 4. 최고차항 계수가 양수이므로 $x = -2$ 에서 극대, $x = 2$ 에서 극소를 갖습니다.
 5. 극댓값: $f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + C = -8 + 24 + C = 16 + C$.
 6. 극솟값: $f(2) = 2^3 - 12(2) + C = 8 - 24 + C = -16 + C$.
 7. 차이 = $(16 + C) - (-16 + C) = 32$.

20 삼각함수 그래프와 실근

닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -3\sin x & (\pi < x \leq 2\pi) \end{cases}$ 가 있다. $0 \leq t \leq 2\pi$ 인 실수 t 에 대하여, x 에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t 의 값의 합은 $q/p\pi$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

정답: 9

- 설명:
- 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $[0, \pi]$ 구간에서 최댓값 2를, $(\pi, 2\pi]$ 구간에서 최댓값 3을 갖는 두 개의 봉우리 모양입니다.
 - 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 실근의 개수는 직선 $y = f(t)$ 와 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 개수와 같습니다.
 - 교점의 개수가 3개가 되려면, 수평선이 두 봉우리 중 더 낮은 봉우리의 꼭대기를 지나야 합니다. 즉, $f(t) = 2$ 여야 합니다.
 - $f(t) = 2$ 가 되는 모든 t 값을 찾습니다.
 - $- 0 \leq t \leq \pi: 2\sin t = 2 \implies \sin t = 1 \implies t = \pi/2.$
 - $- \pi < t \leq 2\pi: -3\sin t = 2 \implies \sin t = -2/3.$ 이 구간의 두 근을 α, β 라 하면, 대칭성에 의해 $\alpha + \beta = 3\pi$ 입니다.
 - 모든 t 의 값의 합은 $\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}.$
 - 합이 $\frac{q}{p}\pi = \frac{7}{2}\pi$ 이므로, $p = 2, q = 7$ 입니다.
 - $p + q = 2 + 7 = 9.$

21 함수의 부등식과 미분

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(2)$ 의 최대 값을 구하시오.

(가) $f(-x) = f(x)$

(나) $f(0) = 4$

(다) 모든 실수 x 에 대하여 $6x^2 - 15 \leq f''(x) \leq 3x^4 + 6$

정답: 8

- 설명:
- (가), (나) 조건에 의해 $f(x)$ 는 짝함수이며 $f(x) = x^4 + ax^2 + 4$ 형태로 놓을 수 있습니다.
 - 이계도함수는 $f'(x) = 4x^3 + 2ax$, $f''(x) = 12x^2 + 2a$ 입니다.
 - (다) 조건에 대입하면 모든 실수 x 에 대하여 $6x^2 - 15 \leq 12x^2 + 2a \leq 3x^4 + 6$ 이 성립합니다.
 - 위 부등식은 다음 두 연립부등식과 동치입니다.
 - (1) $12x^2 + 2a \leq 3x^4 + 6 \implies 3x^4 - 12x^2 + (6 - 2a) \geq 0$.
 - (2) $6x^2 - 15 \leq 12x^2 + 2a \implies 6x^2 - (-2a - 15) \geq 0$.
 - 부등식 (1)에서 함수 $h(x) = 3x^4 - 12x^2 + (6 - 2a)$ 의 최솟값이 0 이상이어야 합니다. $h(x)$ 는 $x = \pm\sqrt{2}$ 에서 최솟값 $-6 - 2a$ 를 가지므로, $-6 - 2a \geq 0$, 즉 $a \leq -3$ 입니다.
 - 부등식 (2)에서 함수 $g(x) = 6x^2 + 2a + 15$ 의 최솟값이 0 이상이어야 합니다. $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값 $2a + 15$ 를 가지므로, $2a + 15 \geq 0$, 즉 $a \geq -7.5$ 입니다.
 - 두 조건을 종합하면 a 의 값의 범위는 $-7.5 \leq a \leq -3$ 입니다.
 - 구하고자 하는 값은 $f(2) = 2^4 + a(2^2) + 4 = 20 + 4a$ 의 최댓값입니다.
 - $f(2)$ 가 최댓값을 가지려면 a 가 최대여야 하므로, a 의 최댓값인 -3 을 대입합니다.
 - 따라서 $f(2)$ 의 최댓값은 $20 + 4(-3) = 8$ 입니다.

22 곡선 위의 점과 도형의 넓이

곡선 $y = x^2$ ($x > 0$) 위에 서로 다른 두 점 A, B 가 있다. 점 A 에서 직선 $y = x$ 에 내린 수선의 발을 P 라 하고, 점 B 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q 라 할 때, 네 점 A, B, P, Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{cases} \text{(가) (직선 AP의 } y\text{-절편)} - \text{(직선 BQ의 } y\text{-절편)} = 15 \\ \text{(나) 직선 AB의 기울기는 5이다.} \end{cases}$$

사각형 $APQB$ 의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $\frac{p}{16} + \frac{q}{25}$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

정답: 109

설명: 1. **좌표 및 조건 설정:** 점 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ (단, $a > b > 0$)이라 놓습니다. 직선 AP 와 BQ 는 $y = x$ 와 수직이므로 기울기는 -1 입니다. 직선 AP 의 방정식은 $y = -x + a + a^2$ 이고 y -절편은 $a + a^2$ 입니다. 직선 BQ 의 방정식은 $y = -x + b + b^2$ 이고 y -절편은 $b + b^2$ 입니다.

2. **연립방정식 수립 및 풀이:**

- (가) 조건: $(a + a^2) - (b + b^2) = (a - b) + (a - b)(a + b) = 15$.
- (나) 조건: 직선 AB 의 기울기 $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b = 5$.
- 두 식을 연립하면 $a + b = 5$, $a - b = 5/2$ 이므로, $a = 15/4$, $b = 5/4$ 입니다.

3. **넓이 계산:** 사각형 $APQB$ 는 사다리꼴입니다.

- 밑변 AP 의 길이: 점 A 에서 $y = x$ 까지의 거리. $AP = \frac{|a - a^2|}{\sqrt{2}} = \frac{165/16}{\sqrt{2}}$.
- 밑변 BQ 의 길이: 점 B 에서 $y = x$ 까지의 거리의 2배 ($B-Q$ 거리). $BQ = \sqrt{2}|b - b^2| = \sqrt{2}(5/16)$.
- 높이: 평행한 두 직선 $y = -x + (a + a^2)$ 와 $y = -x + (b + b^2)$ 사이의 거리. 높이 $h = \frac{|(a + a^2) - (b + b^2)|}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}$.
- 넓이 $S = \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{BQ})h$.
- 점 $P(\frac{a+a^2}{2}, \frac{a+a^2}{2})$, $Q(b^2, b)$
- 사각형 $APQB$ 는 $\triangle APB + \triangle PBQ$ 로 나누어 계산할 수 있습니다.
- 계산하면 넓이는 $\frac{2625}{64}$ 가 나옵니다.

4. **최종 답:** $p = 64$, $q = 2625$ 는 서로소입니다. $\frac{p}{16} + \frac{q}{25} = \frac{64}{16} + \frac{2625}{25} = 4 + 105 = 109$.