도형이 어려운 이유 - 원의 정의

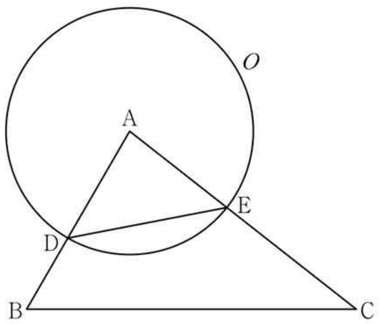
수능 전 마지막 유형 대비 칼럼
1호 - 도형 분석 (원의 정의)

敎心 교심
교육하는 마음

돌파

25학년도 11월

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자.
$\sin A:\sin C=8:5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{AB}<\overline{AC}$) [4점]



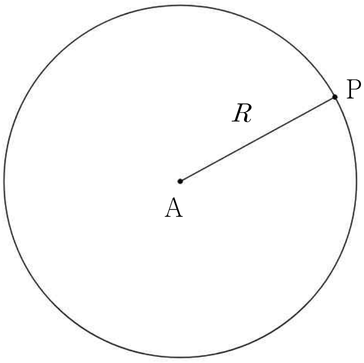
① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$ ③ $30+25\sqrt{3}$
④ $36+30\sqrt{3}$ ⑤ $42+35\sqrt{3}$

정답	④

주요 사고법

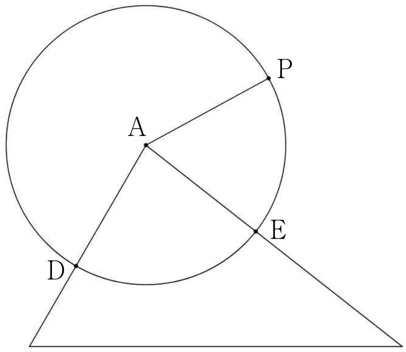
원은 중심에서 같은 거리만큼 떨어진 점의 모음

원의 정의 자체를 생각하면
점 P는 점 A에서 일정거리만큼 떨어짐을
원을 통해서 정의함을 이해할 수 있다



사고 과정

1. 원의 정의 확인



발문에서 원 O의 정의를 확인하면
중심은 A이고 D를 지나는 원임을 확인

또한 발문에서 원 O 위에 E, P가 지남을 확인

2. 원을 삭제

원 O에 대한 내용을 삭제하고
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AP}}$로 단순화 가능

3. 악의적으로 조건이 산발적임을 이해

삼각형 ABC에 대한 조건이 밑에서 다시 나타나고
원 O에 대한 내용도 산발적이며 정신없음
이에 대한 조건을 깔끔히 정리하면
다음 문제를 푸는 것과 같음

14. 외접원의 반지름의 길이가 7이고 $\sin A : \sin C = 8:5$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 AC 위의 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{DB}} = 3:2, \quad \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AE}}$$

삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 9 : 35일 때, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AP}}$인 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{AC}}$) [4점]

문항 풀이

D, E, P는 중심이 A인 원 위의 점

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AP}}$

$\overline{\mathrm{AD}}=3k\,(k>0)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{DB}}=2k$$

삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비는

$$\frac{1}{2}\times\sin(\angle\mathrm{DAE})\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}$$
$$:\frac{1}{2}\times\sin(\angle\mathrm{BAC})\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$$
$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$$
$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}:(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DB}})\times\overline{\mathrm{AC}}$$
$$\Rightarrow\ 9k^2:(3k+2k)\times\overline{\mathrm{AC}}$$
$$\Rightarrow\ 9:\frac{5}{k}\times\overline{\mathrm{AC}}$$

이고 이는 $9:35$와 같으므로

$$\frac{5}{k}\times\overline{\mathrm{AC}}=35\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{AC}}=7k$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

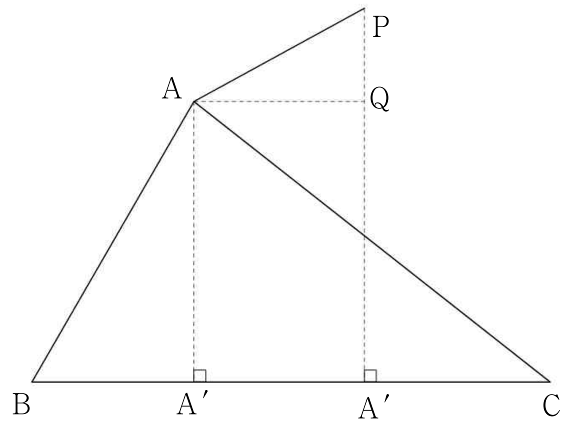
$$\sin A:\sin C=8:5$$
$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AB}}=8:5$$
$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{BC}}=8k$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$2\times(\text{외접원의 반지름 길이})\times\sin B=\overline{\mathrm{AC}}$$
$$\Rightarrow\ k=\sqrt{3}$$



따라서 삼각형 PBC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{PP'}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QP'}})$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{AA'}})$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{PQ}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AA'}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{PQ}}+(\text{삼각형 ABC 넓이})$$

이때

$$(\text{삼각형 ABC 넓이})=\frac{1}{2}\times\sin B\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}$$
$$=30\sqrt{3}$$

이고

$$\overline{\mathrm{PQ}}\le\overline{\mathrm{PA}}=3\sqrt{3}$$
(등호는 $\mathrm{Q}=\mathrm{A}$에서 성립)

이므로

$$(\text{삼각형 PBC 넓이})$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{PQ}}+(\text{삼각형 ABC 넓이})$$
$$=4\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{PQ}}+30\sqrt{3}$$
$$\le 4\sqrt{3}\times3\sqrt{3}+30\sqrt{3}$$
$$=36+30\sqrt{3}$$

에서 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

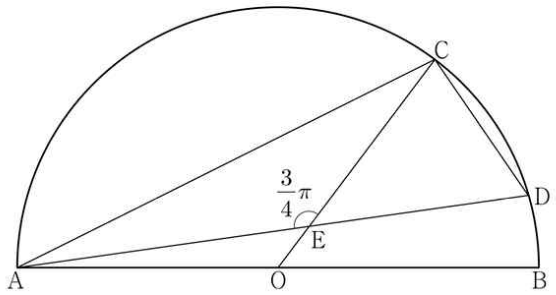
$$36+30\sqrt{3}$$

[연관] 23학년도 9월

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

정답	⑤

주요 사고법

원은 중심에서 같은 거리만큼 떨어진 점의 모음

원의 정의 자체를 생각하면
점 D와 점 O 사이의 연관성이 발생하기 위해서는
$\overline{OD}=\overline{OC}$ 이어야 함을 깨닫게 됨

사고 과정

1. 원의 정의를 이해

발문에서 반원의 정의를 확인하면
중심은 O이고 AB가 지름임을 이해

또한 발문에서 반원 위에 C, D가 있음을 이해

2. 원을 삭제하고 도구로 변환

조건이 삼각형 CDE에 대한 내용만 있음을
인지하고 이를 바탕으로 O와 A의 위치를
반원 조건만으로 특정하겠다는 목표 세우기

따라서 반원을 제거하고 도형을 관찰

3. D의 위치 특정하기

이후 O와 D가 연결된 선분이 없음을 깨닫고
이를 연결하여 삼각형 OED를 반원 조건으로 결정

4. 사인법칙과 코사인법칙

선분 AC는 원 위의 선분이므로 사인법칙
선분 CD는 삼각형 CDE의 변이므로 코사인법칙

문항 풀이

R : 반원의 반지름

이라 하자.

C, D는 반원 위의 점

$\Rightarrow\ \overline{OC}=\overline{OD}=R$

에서 삼각형 ODE는

$\overline{OE}=R-4,\ \overline{OD}=R,$

$\overline{ED}=3\sqrt{2},\ \angle OED=\frac{3}{4}\pi$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OD}^2=\overline{OE}^2+\overline{ED}^2-2\times\cos(\angle OED)\times\overline{OE}\times\overline{ED}$$

$\Rightarrow\ R=5$

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=\overline{CE}^2+\overline{ED}^2-2\times\cos(\angle CED)\times\overline{CE}\times\overline{ED}$$

$\Rightarrow\ \overline{CD}=\sqrt{10}$

이고 사인법칙에 의하여

$\overline{CD}:\overline{CE}=\sin(\angle CED):\sin(\angle CDE)$

$\Rightarrow\ \sin(\angle CDE)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

이고

$$\begin{aligned}\overline{AC}&=2R\sin(\angle CDE)\\&=2\times5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\\&=4\sqrt{5}\end{aligned}$$

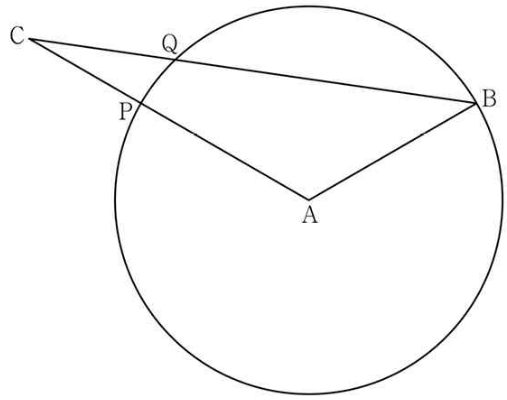
따라서

$\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$

[연관] 28학년도 예시

19. $\cos A = -\frac{1}{2}$, $\sin B : \sin C = 5 : 3$인 삼각형 ABC에서 점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원이 두 선분 AC, BC와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PB의 길이가 $3\sqrt{3}$일 때, 선분 PQ의 길이는? (단, 점 Q는 점 B가 아니다.) [4점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$



정답	⑤

주요 사고법

원은 중심에서 같은 거리만큼 떨어진 점의 모음

원의 정의 자체를 생각하면
Q를 나중에 특정하기 위해서는 원의 성질이 활용됨을 이해할 수 있음

사고 과정

1. 원의 정의를 이해

발문에서 반원의 정의를 확인하면
중심은 A이고 B를 지나는 원으로 이해

또한 발문에서 원 위에 P, Q가 있음을 이해

2. 원을 제거하고 도구로 변환

삼각형 ABC에 대한 조건과 $\overline{\mathrm{PB}}=3\sqrt{3}$만 있음을 인지하고 이를 바탕으로 P, Q의 위치를 원 조건만으로 특정하겠다는 목표 세우기

따라서 원을 제거하고 도형을 관찰

3. 삼각형 ABC 특정

우선 삼각형 ABC의 변의 길이를 비례식으로 나타낼 수 있음을 이해하기

4. PB로 반지름의 길이 확정

삼각형 ABP가 이등변삼각형임을 통해
$\cos A$의 값과 $\overline{\mathrm{PB}}$의 값으로 반지름의 길이 구하기

5. 사인법칙과 코사인법칙

선분 PQ가 원 위의 선분임을 깨닫고 사인법칙 이를 위해
삼각형 PBC에서 코사인법칙으로 $\cos B$ 도출

문항 풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin B : \sin C = 5:3$$
$$\Rightarrow \ \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{AB}} = 5:3$$

$\overline{\mathrm{AB}}=3k$, $\overline{\mathrm{AC}}=5k$ $(k>0)$이라 하자.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\cos A\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$$
$$=49k^2$$
$$\Rightarrow \ \overline{\mathrm{BC}}=7k$$

이때,

$$\cos A = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ A=\frac{2}{3}\pi$$

이고 B, P는 중심이 A인 원 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AP}}$$
$$\Rightarrow \ \angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{APB}$$
$$\Rightarrow \ \angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow \ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AP}}=3 \qquad (\because \text{ 삼각비})$$
$$\Rightarrow \ k=1$$

이때,

$$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AP}}$$
$$=2$$

삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{PBC})=\frac{\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{PC}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$
$$\Rightarrow \ \sin(\angle\mathrm{PBC})=\frac{1}{7}$$

삼각형 BPQ에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}=2\times3\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$