Problem 01

${}_{100}C_0+{}_{100}C_5+{}_{100}C_{10}+\cdots\cdots\ {}_{100}C_{100}$를 3으로 나눈 나머지를 구하고자 한다.
다음의 소문항에 답하시오.

[1] $w^5=1$을 만족하는 w에 대해 $w+\dfrac{1}{w}$의 값을 구하시오.

(단, w는 실수가 아니고, $w+\dfrac{1}{w}$는 양수이다.)

[2] $(1+w)^{100}$, $(1+w^2)^{100}$, $(1+w^3)^{100}$, $(1+w^4)^{100}$을 구하시오.

[3] ${}_{100}C_0+{}_{100}C_5+{}_{100}C_{10}+\cdots\cdots\ {}_{100}C_{100}$을 3으로 나눈 나머지를 구하시오.

Problem 07

$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} kx^k\right) - 1 = nx^n + (n-1)x^{n-1} \cdots\cdots + x - 1$이다.

또한 수열 $\{x_n\}$에 대해 자연수 N이 존재하여 $n > N$을 만족하는 모든 n에 대해

$x_n > x_{n+1}$이고 $x_n > L$이면 $\{x_n\}$은 수렴한다.

그리고 $|r| < 1$이면 $\lim_{n \to \infty} r^n \times n = 0$이다.

다음의 소문항에 답하시오.

[1] 모든 n에 대해 $x > 0$일 때 $f_n(x) = 0$을 만족하는 x가 유일하게 존재함을 보이시오.

[2] 모든 n에 대해 $a_n > a_{n+1}$임을 증명하시오.

[3] $x > 0$일 때 $f_n(x) = 0$를 만족하는 x의 값을 a_n이라고 하자. 모든 $n \geq 2$에 대해

$0 < a_n \leq \frac{1}{2}$이고, a_n이 수렴함을 보이시오.

[4] $\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$임을 보이시오.

Problem 18

함수 $f(x)$가 다음의 조건을 만족한다.

조건 1) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$
조건 2) $f(f(x))=f(x)+x$
조건 3) 함수 $f(x)$는 $[0,\infty)$에서 연속이다.

또한 모든 정수 n에 대해 $\{t_n\}$은 $t_n=t_{n-1}+t_{n-2}$, $t_0=0, t_1=1$을 만족한다.
다음의 소문항에 답하시오.

[1] 모든 정수 n에 대해 $\{t_n\}$이 $t_n=\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$의 꼴로 나타날 수 있음을 보이고, α,β의 값을 구하시오.

[2] 함수 $f(x)$가 일대일함수임을 보이고, $f(0)$의 값을 구하시오.

[3] 임의의 $p\in[0,\infty)$에 대해 $f(p)=q$를 만족하는 $q\in[0,\infty)$가 존재한다. $a_n=pt_n+qt_{n+1}$이라고 정의했을 때 모든 정수 n에 대해 $a_{n+1}=f(a_n)$임을 보이시오.

[4] 함수 $f(x)$를 구하시오.

Advanced Problem Solution 01

[1] $w^5-1=(w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)=0$인데, w가 실수가 아니므로 $w-1\neq 0$이다.

따라서 $w^4+w^3+w^2+w+1=0$이다.

양변을 w^2으로 나누어주고 $w+\dfrac{1}{w}$로 정리하면, $\left(w+\dfrac{1}{w}\right)^2+\left(w+\dfrac{1}{w}\right)-1=0$이다.

$w+\dfrac{1}{w}>0$를 만족하는 $\underline{w+\dfrac{1}{w}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$이다.

[2] 우선 $(1+w^3)^{100}=(w^5+w^3)^{100}=w^{200}(1+w^2)^{100}=(1+w^2)^{100}$이고,

여기에 $1+w^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)w$를 대입해주면, $\underline{(1+w^3)^{100}=(1+w^2)^{100}=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{100}}$이다.

다음으로 $(1+w^4)^{100}=(w^5+w^4)^{100}=w^{400}(1+w)^{100}=(1+w)^{100}$이 성립한다.

그리고 $-1=w^4+w^3+w^2+w=w(1+w)(1+w^2)$이므로 $1+w=-\dfrac{1}{w(1+w^2)}$이다.

따라서 $(1+w^4)^{100}=(1+w)^{100}=\left(-\dfrac{1}{w(1+w^2)}\right)^{100}=\dfrac{1}{w^{100}}\times\dfrac{1}{(1+w^2)^{100}}=\dfrac{1}{(1+w^2)^{100}}$이 성립함을

확인할 수 있다. 마지막으로 $1+w^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)w$를 대입해주면,

$\underline{(1+w^4)^{100}=(1+w)^{100}=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{100}}$이다.

[3] $(1+x)^{100}=\displaystyle\sum_{k=0}^{100}{}_{100}C_k x^k$에서 양변에 $1, w, w^2, w^3, w^4$을 대입한 뒤 5개의 식을 모두 더한다.

$$
\begin{array}{rl}
 & (1+w^0)^{100}={}_{100}C_0+{}_{100}C_1(w^0)+{}_{100}C_2(w^0)^2+{}_{100}C_3(w^0)^3+{}_{100}C_4(w^0)^4+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100}(w^0)^{100}\\
 & (1+w^1)^{100}={}_{100}C_0+{}_{100}C_1(w^1)+{}_{100}C_2(w^1)^2+{}_{100}C_3(w^1)^3+{}_{100}C_4(w^1)^4+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100}(w^1)^{100}\\
 & (1+w^2)^{100}={}_{100}C_0+{}_{100}C_1(w^2)+{}_{100}C_2(w^2)^2+{}_{100}C_3(w^2)^3+{}_{100}C_4(w^2)^4+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100}(w^2)^{100}\\
 & (1+w^3)^{100}={}_{100}C_0+{}_{100}C_1(w^3)+{}_{100}C_2(w^3)^2+{}_{100}C_3(w^3)^3+{}_{100}C_4(w^3)^4+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100}(w^3)^{100}\\
+ & (1+w^4)^{100}={}_{100}C_0+{}_{100}C_1(w^4)+{}_{100}C_2(w^4)^2+{}_{100}C_3(w^4)^3+{}_{100}C_4(w^4)^4+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100}(w^4)^{100}\\
\hline
\end{array}
$$

좌변 $=2^{100}+(1+w)^{100}+(1+w^2)^{100}+(1+w^3)^{100}+(1+w^4)^{100}$

우변 $=5\times({}_{100}C_0+{}_{100}C_5+{}_{100}C_{10}+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100})$

$$\Rightarrow {}_{100}C_0+{}_{100}C_5+{}_{100}C_{10}+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100}=\frac{2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{100}+2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100}+2^{100}}{5}$$

이제 a_n을 $a_n=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$이라 정의하자.

한편 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$을 두 근으로 가지는 이차방정식은 $x^2+x-1=0$이다.

양변에 x^{n-2}를 곱해주면 $x^n+x^{n-1}-x^{n-2}=0$이고, x에 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$를 대입후 두 식을 더해주면

$a_n=-a_{n-1}+a_{n-2}$임을 확인할 수 있다. 이때 $a_0=2, a_1=-1$이다.

그리고 $S={}_{100}C_0+{}_{100}C_5+{}_{100}C_{10}+\cdots\cdots+{}_{100}C_{100}$라고 하자.

그러면 $5S=2a_{100}+2^{100}$이다.

$$
\begin{aligned}
a_n &= -a_{n-1} + a_{n-2} \\
&= -(-a_{n-2} + a_{n-3}) + a_{n-2} \\
&= 2a_{n-2} - a_{n-3} \\
&= 2(-a_{n-3} + a_{n-4}) - a_{n-3} \\
&= -3a_{n-3} + 2x_{n-4} \\
&= 3(a_{n-3} - a_{n-4}) - a_{n-4}
\end{aligned}
$$

이므로 a_n과 $-a_{n-4}$를 3으로 나눈 나머지는 같다. 즉 $a_n \equiv -a_{n-4} \pmod 3$[21)]

따라서 a_n과 a_{n-8}를 3으로 나눈 나머지는 같다. 즉 $a_n \equiv a_{n-8} \pmod 3$

$a_{100} \equiv a_4 \equiv -a_0 \equiv 1 \pmod 3$

$5S \equiv 2x_{100} + 2^{100} \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$

5와 3은 서로소이므로 $x \equiv 0 \pmod 3$

따라서 ${}_{100}C_0 + {}_{100}C_5 + {}_{100}C_{10} + \cdots \cdots + {}_{100}C_{100}$를 3으로 나눈 나머지는 $\underline{0}$이다.

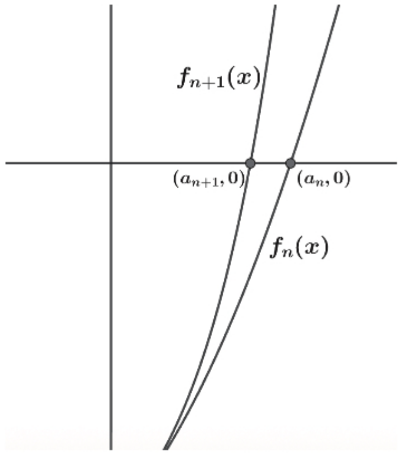
21) 여기서 $a \equiv b \pmod p$라는 기호는 a, b를 p로 나눈 나머지가 같다는 뜻이다. 이는 교육과정에 포함되진 않지만, 정수론에서 널리 쓰이는 표현이다. 답안 작성 시 사용해도 무관하다고 생각된다. 그러나 이것이 불안한 학생은 말로 풀어 적어주면 된다. 아니면 기호에 대한 정의를 추가적으로 서술해주면 된다.
예) $a \equiv b \pmod p$의 표현을 a, b를 p로 나눈 나머지가 같다고 정의하자.

Advanced Problem Solution 07

[1] $\lim_{x\to 0+} f_n(x) = -1$, $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$는 $+\infty$로 발산하므로 사잇값 정리에 의해 $f_n(x)=0$을 만족하는 x가 $(0, \infty)$에 존재한다.

그리고 $x>0$일 때, $f_n{}'(x) = n^2x^{n-1}+(n-1)^2x^{n-2}+\cdots\cdots+4x+1$이므로 $f_n{}'(x)>0$이므로 $f_n(x)=0$를 만족하는 x는 $(0,\infty)$에 유일하게 존재한다.

[2] $x>0$일 때 $f_{n+1}(x) = f_n(x)+(n+1)x^{n+1} > f_n(x)$이다. 이를 기반으로 그림을 그려주면 fig.1.과 같다.



▲ fig.1. Advanced problem 7 solution의 그림

그래프를 통해 모든 n에 대해 $a_n > a_{n+1}$이 증명되었다.

[3] 모든 n에 대해 $a_n > a_{n+1}$이 성립하므로 모든 $n\ge 2$에 대해 $a_n \le \frac{1}{2}$가 성립한다. 그리고 [1]에서 $f_n(x)=0$를 만족하는 x는 $(0,\infty)$에 유일하게 존재함을 확인하였기 때문에 $a_n>0$이다.

따라서 모든 $n\ge 2$에 대해 $0<a_n\le\frac{1}{2}$가 성립한다.

또한 모든 n에 대해 $a_n>a_{n+1}$이 성립하고, $a_n>0$이므로 문제 조건에 의해 $\{a_n\}$은 수렴한다.

[4] $f_n(x) = nx^n+(n-1)x^{n-1}\cdots\cdots+x-1$에서 양변에 $1-x$를 곱한다.

$(1-x)f_n(x) = nx^n+(n-1)x^{n-1}\cdots\cdots+x-1-nx^{n+1}-(n-1)x^n\cdots\cdots-x^2+x$

$=-nx^{n+1}+x^n+x^{n-1}\cdots\cdots+x+1+x-2$

여기에 한번 더 양변에 $1-x$를 곱한다.

$(1-x)^2f_n(x) = -nx^{n+1}+nx^{n+2}+1-x^{n+1}+(x-2)(1-x)$

이제 양변에 $x=a_n$을 대입해주면,

$0=-na_n^{n+1}+na_n^{n+2}+1-a_n^{n+1}+(a_n-2)(1-a_n)$이다. [3]에서 $\{a_n\}$이 수렴함을 확인하였으므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$이라고 하자. 이제 양변에 극한을 취해주면,

$0<a_n\le\frac{1}{2}$이고, $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n\times n = 0$이므로 $0=1+(L-2)(1-L)$이다.

추가적으로 $0<a_n\le\frac{1}{2}$이 성립하므로 $0\le L\le\frac{1}{2}$이고, 위의 이차방정식을 만족하는 L을 구해주면

$L=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.

Advanced Problem Solution 18

참고(중요)

해당 문제를 풀 때 $f(x)$를 미분가능하다고 풀면 안된다. 문제에서는 연속성 조건만 주었다.

[1] $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$는 $x^n - x^{n-1} - x^{n-2}$를 0으로 만든다.

그러면 $\alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$이고,

$\beta\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \beta\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \beta\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$이다. 이제 양변을 더해주면

$$\left\{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} = \begin{aligned}&\left\{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}\\ &+\left\{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right\}\end{aligned}$$ 이다.

그러면 $t_n = \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$꼴로 나타난다.

이제 $t_0 = 0$, $t_1 = 1$를 대입하여 α, β를 구해주면 $\underline{\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$이다.

[2] $f(a) = f(b) = k$라고하자. 그러면 $f(k) = f(f(a)) = f(a) + a = k + a$이다.
마찬가지로 $f(k) = f(f(b)) = f(b) + b = k + b$이다.
따라서 $a = b = f(k) - k$이므로 $f(x)$는 일대일함수이다.
이제 $f(f(x)) = f(x) + x$에서 $x = 0$을 대입하면, $f(f(0)) = f(0)$이다.
$f(0) = c$라고 하자. 그러면 $f(c) = c$이다.
또한 $c \geq 0$이므로 $f(f(x)) = f(x) + x$에 $x = c$를 대입할 수 있다.
대입하면 $f(f(c)) = f(c) + c$이고, $f(c) = c$를 넣어주면 $c = c + c$이므로 $c = 0$이다.
따라서 $\underline{f(0) = 0}$이다.

[3] 우선 $a_n = pt_n + qt_{n+1}$이라고 했을 때 $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$이라고 했기 때문에
$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$이다. 그리고 $a_0 = q$, $a_1 = p + q$이다.
그리고 $f(f(x)) = f(x) + x$에서 $x = p$를 대입하자.
그러면 $f(p) = q$이므로 $f(q) = p + q$이다. 즉 $a_1 = f(a_0)$이다.
다음으로 $n \in \{0\} \cup N$에 대해 $a_{n+1} = f(a_n)$이 성립한다고 가정하자.
$f(f(x)) = f(x) + x$에서 양변에 $x = a_n$을 대입하면, $f(a_{n+1}) = a_{n+1} + a_n$이다.
이때 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$이므로 $a_{n+2} = f(a_{n+1})$이 성립한다.
그리고 d가 존재하여 $f(d) = a_n$을 만족한다고 하자.
$f(f(x)) = f(x) + x$에서 양변에 $x = d$을 대입하면, $f(a_n) = a_n + d$이다.
$d = f(a_n) - a_n = a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$ 따라서 $a_n = f(a_{n-1})$
즉, $a_{n+1} = f(a_n)$이면 $a_{n+2} = f(a_{n+1})$, $a_n = f(a_{n-1})$이 성립한다.
따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 정수 n에 대해 $a_{n+1} = f(a_n)$이 성립한다.

[4] $f(p) = q$라고 하자. 즉, $a_{-1} = pt_{-1} + qt_0 = p$, $a_0 = q$이므로 $a_0 = f(a_{-1})$이다.
이때 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$를 만족하고, $f(x)$가 일대일함수이므로 $a_{-1} \geq 0$이다.
그리고 $a_{-n} \geq 0$이라고 가정하면, $a_{-n} = f(a_{-n-1})$이고, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 이므로
$a_{-n-1} \geq 0$임을 알 수 있다.
따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대해 $a_{-n} \geq 0$이다.

즉, 모든 양의 정수 n에 대해 $pt_{-n}+qt_{-n+1} \geq 0$이다.

이를 다른 말로하면, 모든 양의 정수 n에 대해 $pt_{-2n}+qt_{-2n+1} \geq 0$, $pt_{-2n-1}+qt_{-2n} \geq 0$이다.

$t_{-n}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$에서 $t_{-2n}<0$, $t_{-2n-1}>0$임을 확인할 수 있다.

따라서 $-\frac{t_{-2n}}{t_{-2n+1}} \leq \frac{q}{p} \leq -\frac{t_{-2n-1}}{t_{-2n}}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{t_{-2n}}{t_{-2n+1}}=\lim_{n\to\infty}-\frac{-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}}=-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{t_{-2n-1}}{t_{-2n}}=\lim_{n\to\infty}-\frac{-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}=-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

따라서 샌드위치 정리에 의해 $\frac{q}{p}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

즉 임의의 p에 대해 $f(p)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}p$이므로 $\underline{f(x)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}$이다.