

제 2 교시

수학 영역

부정적분과 정적분

1. $x = -3$ 과 $x = a$ ($a > -3$) 에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -3) \\ \int_0^x |f'(t)| dt & (x \geq -3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $g(-3) = -16, g(a) = -8$
- (나) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
- (다) 함수 $g(x)$ 는 극솟값을 갖는다.

$\left| \int_a^4 \{f(x) + g(x)\} dx \right|$ 의 값을 구하시오. [4점]

2. 실수 a ($a > 1$) 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

3. 실수 a 와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a 의 값의 합을 구하시오. [4점]

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x)=x$ 이다.
 (나) 어떤 상수 a, b 에 대하여 구간 $[0, \infty)$ 에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$ 이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

5. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여
 방정식 $f'(x)=0$ 이 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서 갖는 실근의 개수를
 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a^+} g(t) + \lim_{t \rightarrow a^-} g(t) \leq 2$ 이다.
 (나) $g(f(1))=g(f(4))=2, g(f(0))=1$

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

6. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의
 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$ 가 있다. 양의 상수
 a 에 대하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여
 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 이다.
 (나) 방정식 $g(f(x))=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는
 4이다.

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

7. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t) dt = 3$$

을 만족시킬 때, $\int_1^2 (4x+1)f(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

8. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)| dt$$

는 $x=1$ 과 $x=4$ 에서 극소이다. $f(0)$ 의

값을 구하시오. [4점]

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 이다.

(나) $\int_{-1}^3 f'(x)dx = 12$

$f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $g(x) \geq g(4)$ 이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$ 이다.

11. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하고 $g(x)$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$$

$$(나) f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$$

$\int_1^3 g(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a) \leq 0$ 인 실수 a 의 최댓값은 2이다.

(나) 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$ 의 원소의 개수가 3 이상이

되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 $\frac{8}{3}$ 이다.

$f(0) = 0$, $f'(1) = 0$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

13. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x tf(t)dt + \int_{-1}^x tg(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$
 (나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_0^3 g(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

14. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|) dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $g'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
 (나) 함수 $g(x)$ 는 $x=2$, $x=6$ 에서 극값을 갖는다.

$f(6) \times g(2) < 0$ 일 때, $f(8)$ 의 값? [4점]

- ① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

정적분의 활용

15. 양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

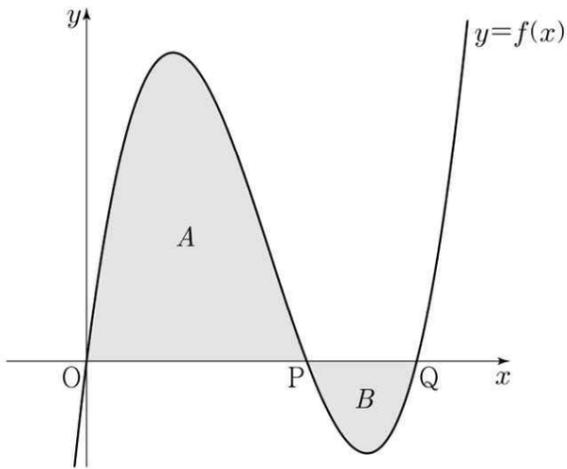
$$f(x) = kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 원점 O 와 두 점 P, Q ($\overline{OP} < \overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 OP 로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 PQ 로 둘러싸인 영역을 B 라 하자.

$$(A \text{의 넓이}) - (B \text{의 넓이}) = 3$$

일 때, k 의 값은? [4점]

- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



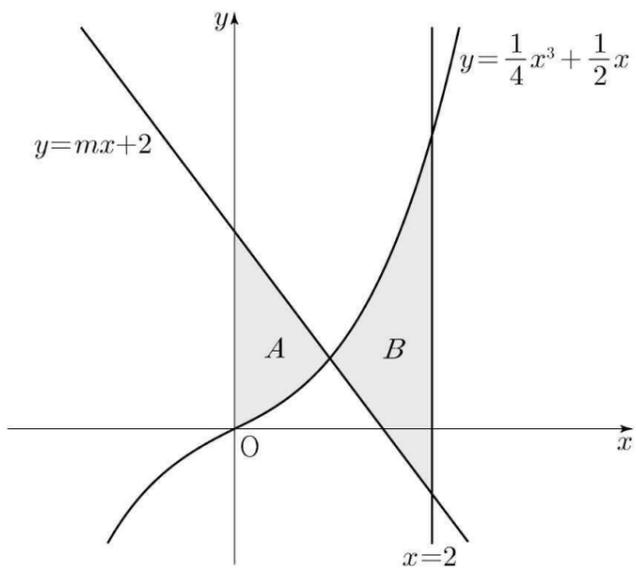
16. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 와 실수 t ($0 < t < 6$)에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

17. 곡선 $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$ 와 직선 $y = mx + 2$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$ 와 두 직선 $y = mx + 2$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $B - A = \frac{2}{3}$ 일 때, 상수 m 의 값은? (단, $m < -1$) [4점]
- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$

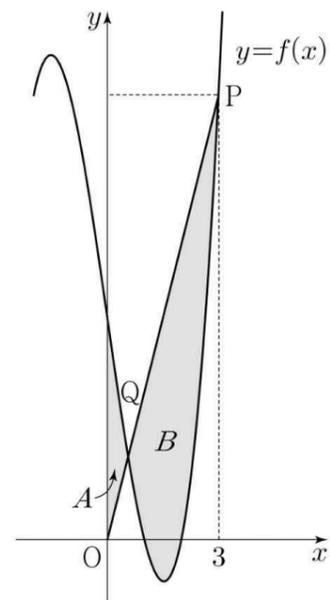


18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$f(1) = f(2) = 0, \quad f'(0) = -7$$

을 만족시킨다. 원점 O 와 점 $P(3, f(3))$ 에 대하여 선분 OP 가 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 y 축 및 선분 OQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 PQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 할 때, $B - A$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$



[정답]

1	80	2	④	3	8	4	110	5	9
6	4	7	⑤	8	13	9	①	10	39
11	10	12	15	13	①	14	⑤	15	②
16	③	17	③	18	⑤				