수능 전 마지막 비킬러 대비 칼럼
3호 - 2022학년도 대수능 분석

教心 교심
교육하는 마음

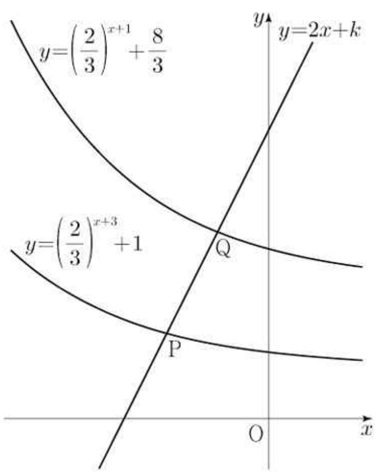
## 22학년도 11월

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1, \quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 $k$의 값은? [4점]

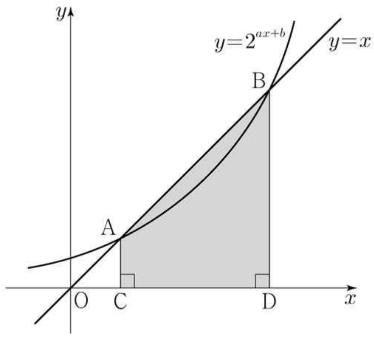
① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$




## [연관] 21학년도 9월

13. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 $x$축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



## 정답

원문항: ④ / 연관문항: ④

## 돌파법

**길이 + 기울기 -> 좌표차**

직선을 통해서 기울기가 주어졌고
선분 길이까지 제공이 되었으면 이를 통해
좌표의 미지수를 하나로 설정할 수 있다.

## 원문항 풀이

P, Q는 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$$(\text{선분 PQ의 기울기})=2$$

에서 P, Q의 $x$좌표의 차를 $d$라 하면

$$(\text{P, Q의 } y\text{좌표 차}) = 2d$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{(d)^2+(2d)^2}$$
$$\Rightarrow d=1$$

이때, P의 $x$좌표를 $p$라 하면

$$\text{P는 } y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1 \text{ 위의 점}$$
$$\Rightarrow (\text{P의 } y\text{좌표})=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1$$
$$\Rightarrow (\text{Q의 } y\text{좌표})=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$$

이므로

$$\text{Q는 } y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3} \text{ 위의 점}$$
$$\Rightarrow \left(p+1, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3\right)\text{은}$$
$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3} \text{ 위의 점}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$$
$$\Rightarrow p=-2$$

따라서

$$\text{P는 } y=2x+k \text{ 위의 점}$$
$$\Rightarrow \left(-2, \frac{5}{3}\right)\text{은 } y=2x+k \text{ 위의 점}$$
$$\Rightarrow k=\frac{17}{3}$$

## 연관문항 풀이

A, B는 $y=x$ 위의 점이므로

$$(\text{선분 AB의 기울기})=1$$

에서 A, B의 $x$좌표의 차를 $d$라 하면

$$(\text{A, B의 } y\text{좌표 차}) = d$$
$$\Rightarrow 6\sqrt{2}=\sqrt{(d)^2+(d)^2}$$
$$\Rightarrow d=6$$
$$\Rightarrow \overline{\text{CD}}=6,\ \overline{\text{AC}}+6=\overline{\text{BD}}$$

곧,

$$(\text{사각형 ACDB의 넓이})$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{CD}}\times\left(\overline{\text{AC}}+\overline{\text{BD}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times\left(2\overline{\text{AC}}+6\right)$$
$$=6\overline{\text{AC}}+18$$

이고 이 값이 30이므로 $\overline{\text{AC}}=2$, $\overline{\text{BD}}=8$
따라서

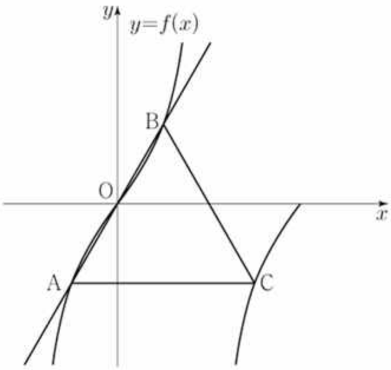
$$\text{A}=(2, 2),\ \text{B}=(8, 8)\text{는 } y=2^{ax+b} \text{ 위의 점}$$
$$\Rightarrow 2=2^{2a+b},\ 8=2^{8a+b}$$
$$\Rightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow a+b=\frac{2}{3}$$

22학년도 11월

11. 양수 $a$에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

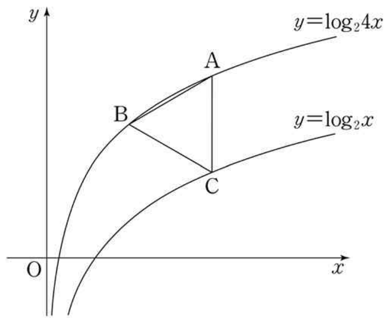
가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 $x$축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]




① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

11학년도 9월

15. 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 $y$축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2 \times 2^q$의 값은? [4점]




① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

**정답**

원문항: ③ / 연관문항: ③

**돌파법**

**정삼각형을 이등분해서 생각하자.**

정삼각형은 사실 변의 길이비가 $2:1:\sqrt{3}$ 인 두 직각삼각형을 이어붙인 하나의 도형과 같다.

**원문항 풀이**

O, A, B를 지나는 한 직선은 원점 O에 대하여 대칭
&
$y=\tan\dfrac{\pi x}{a}$ 는 원점 O에 대하여 대칭

이므로

B = A를 원점 O에 대칭이동
$\Rightarrow$ O는 AB의 중점 … ㉠

B의 $x$좌표를 $p\,(p>0)$라 하자.

㉠ $\Rightarrow$ (A의 $x$좌표)$=p$

이고

AC는 $x$축과 평행
& $y=\tan\dfrac{\pi x}{a}$ 의 주기는 $a$
$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{AC}}=a$

B에서 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

ABC는 정삼각형
$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}$
$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{a}{2}$
$\Rightarrow$ (A, B의 $x$좌표 차)$=\dfrac{a}{2}$
$\Rightarrow$ $p=\dfrac{a}{4}$

따라서

ABC는 정삼각형
$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AH}}$
$\Rightarrow$ $f\left(\dfrac{a}{4}\right)-f\left(-\dfrac{a}{4}\right)=\sqrt{3}\times\dfrac{a}{2}$
$\Rightarrow$ $a=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

이므로

$$(\text{ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{3}\times 2=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

**연관문항 풀이**

AC는 $y$축과 평행
$\Rightarrow$ A, C의 $x$좌표 동일
$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{AC}}=\log_2 4x-\log_2 x=2$

B에서 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

ABC는 정삼각형
$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AH}}$
$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{AH}}=1$, $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ $\mathrm{A}=\left(p+\sqrt{3},\, q+1\right)$

따라서

A, B는 $y=\log_2 4x$ 위의 점
$\Rightarrow$ $q=\log_2 4p$, $q+1=\log_2 4\left(p+\sqrt{3}\right)$
$\Rightarrow$ $p=\sqrt{3}$, $q=\log_2\left(4\sqrt{3}\right)$
$\Rightarrow$ $p^2\times 2^q=12\sqrt{3}$

## 22학년도 11월

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 $1$이고 최솟값이 $0$일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $1$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $2$ ⑤ $\frac{5}{2}$

## 20학년도 6월 (나)

18. 최고차항의 계수가 $1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 $0$일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**정답**

원문항: ③ / 연관문항: ⑤

**돌파법**

**최대/최소 조건은 강력하다**

최대/최소를 통해서 다음 두 사실을 알 수 있다.

i ) $f(x) \le M$ 혹은 $f(x) \ge m$
ii ) $f(x) = M$ 혹은 $f(x) = m$인 $x$ 존재

**원문항 풀이**

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$
$$\Rightarrow (f(x)-1)(f(x)-x)(f(x)+x) = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = 1 \text{ 또는 } f(x) = \pm x$$

조건에 의하여 $0 \le f(x) \le 1$이므로

$$f(x) \le 1$$
$$\Rightarrow x > 1 \text{에서 } f(x) \ne x$$
$$x < -1 \text{에서 } f(x) \ne -x$$

$$f(x) \ge 0$$
$$\Rightarrow x > 0 \text{에서 } f(x) \ne -x$$
$$x < 0 \text{에서 } f(x) \ne x$$

이므로

$$|x| > 1 \text{에서 } f(x) = 1$$
$$|x| < 1 \text{에서 } f(x) = 1 \text{ 또는 } f(x) = |x|$$

이때,

$$f(x) \text{의 최솟값이 } 0$$
$$\Rightarrow f(x) = 0 \text{인 } x \text{ 존재}$$
$$\Rightarrow |x| < 1 \text{에서 } f(x) = |x|$$

따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**연관문항 풀이**

ㄱ.

$$g(x) \text{는 } x = 0 \text{에서 미분가능}$$
$$\Rightarrow g(0) + g'(0)$$
$$= \lim_{x \to 0-} g(x) + \lim_{x \to 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$
$$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \qquad (\text{O})$$

ㄴ.

$$g(x) \text{는 } x = 0 \text{에서 연속}$$
$$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}$$

$$g(x) \text{는 } x = 0 \text{에서 미분가능}$$
$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

이므로

$$f(x) = x^2(x - p) + \frac{1}{2} \quad (p \text{는 상수})$$

이때,

$$g(x) \text{의 최솟값} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x > 0 \text{에서 } f(x) \text{의 최솟값} < \frac{1}{2}$$
$$\left(\because\ x \le 0 \text{에서 } g(x) \ge \frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow x > 0 \text{에서 } f(x) \text{는 극솟값 가짐}$$
$$\Rightarrow x > 0 \text{에서 } f'(x) = 0 \text{의 실근 존재}$$
$$\Rightarrow 3x\left(x - \frac{2}{3}p\right) = 0 \text{인 양수 } x \text{ 존재}$$
$$\Rightarrow p > 0$$

따라서

$$g(1) = f(1)$$
$$= \frac{3}{2} - p$$
$$< \frac{3}{2} \qquad (\text{O})$$

ㄷ.

ㄴ

$$\Rightarrow\ f(x)\text{는 } x=\frac{2}{3}p\text{에서 극소 가짐}$$

$$\Rightarrow\ g(x)\text{의 최솟값은 } f\left(\frac{2}{3}p\right)$$

에서 이의 값은 $0$이므로

$$f\left(\frac{2}{3}p\right)=0\ \Rightarrow\ p=\frac{3}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} g(2)&=f(2)\\ &=\frac{5}{2} \qquad (\text{O}) \end{aligned}$$

따라서 〈보기〉에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.