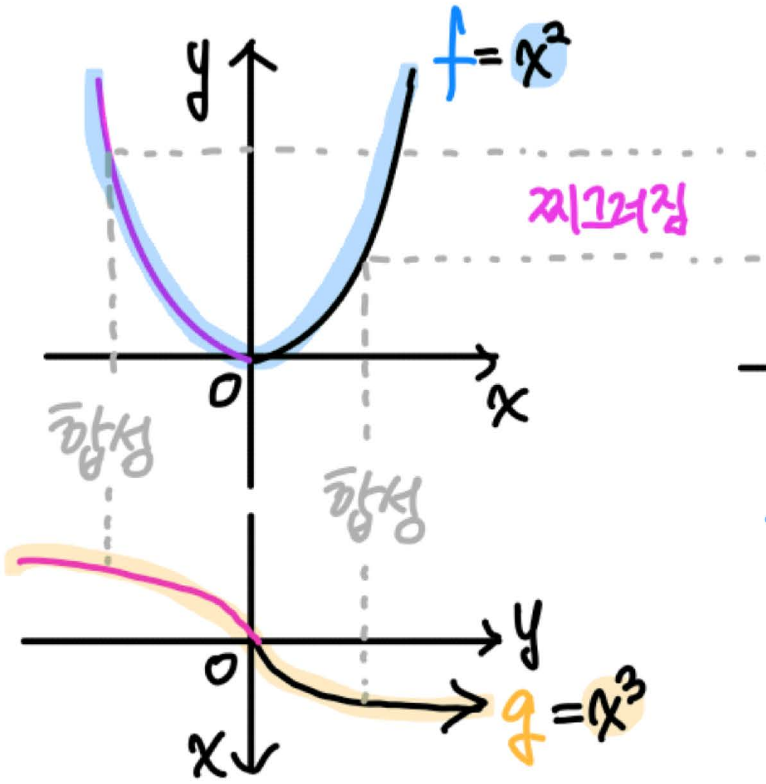
특강 ①

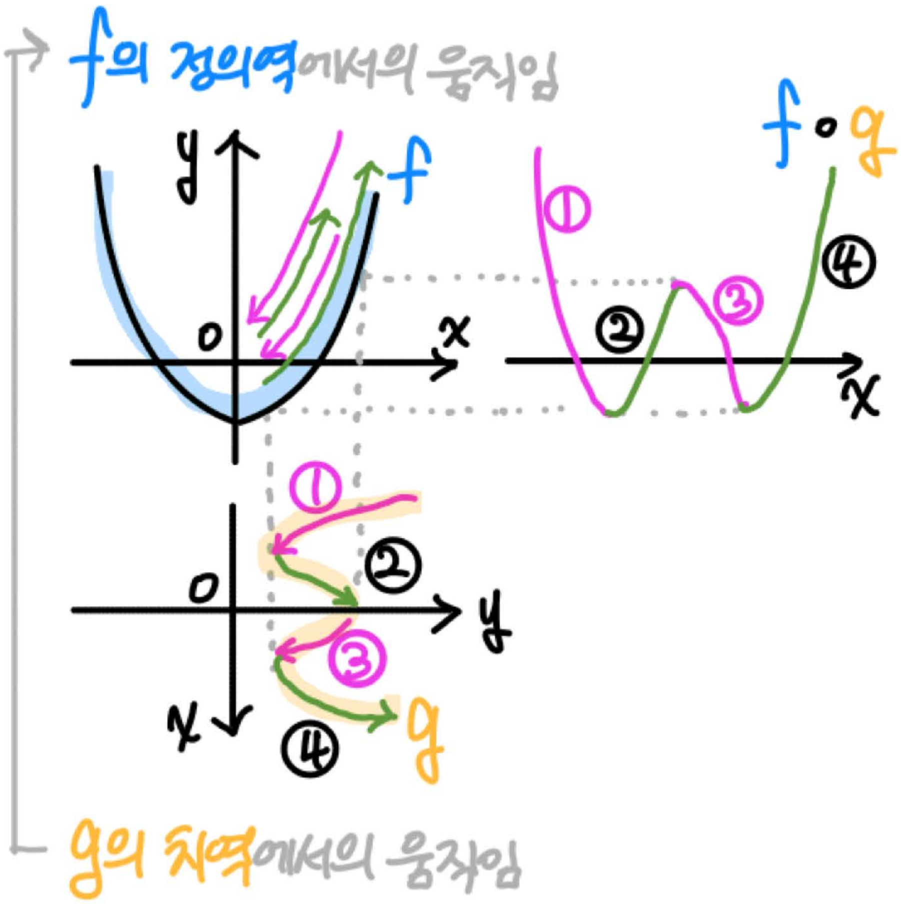
〈함수의 합성과 성질 보존〉

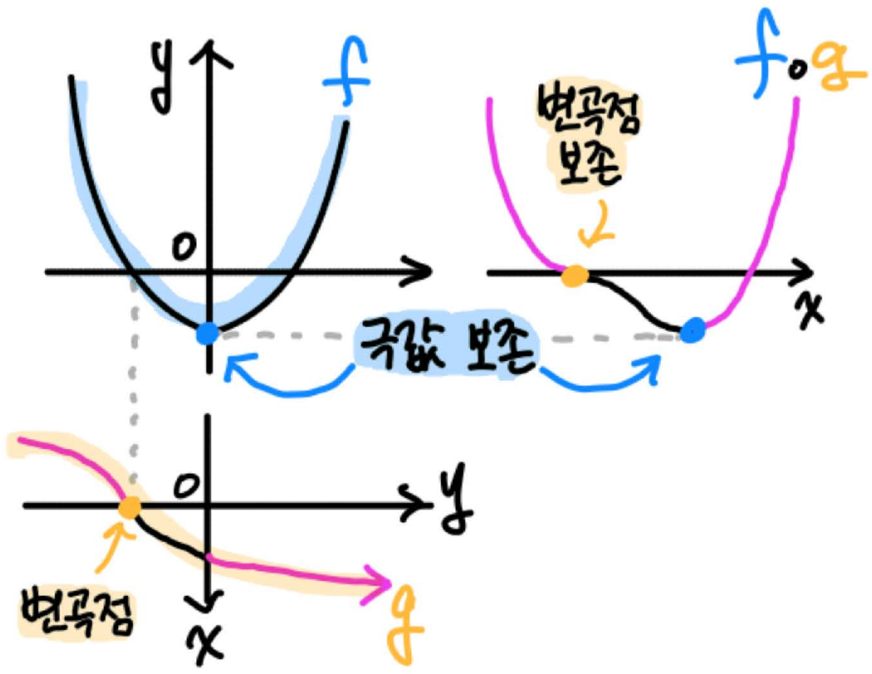
합성 = 그래프 찌그러뜨리기

$f \overset{\text{합성}}{\circ} g$ → f의 그래프가 g에 의해 찌그러진다!



$$f \circ g = x^6 = (x^3)^2$$





그래프의 성질이 보존될수 있다!

→ 극값, 변곡점 (변곡접선), 정의역 등등

기출 적용 예시

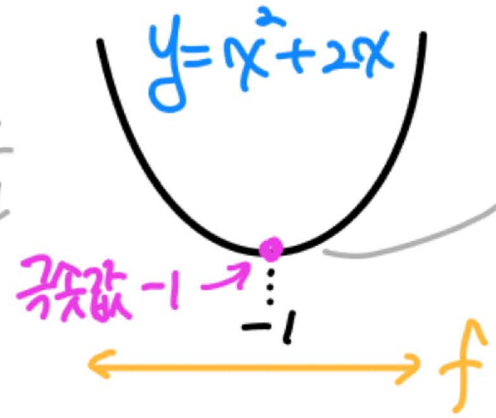
겉함수 성질이 합성함수에 보존!

① $g(x)=f(e^x)+e^x=(f(x)+x)\circ(e^x)$

25학년도 수능 27번

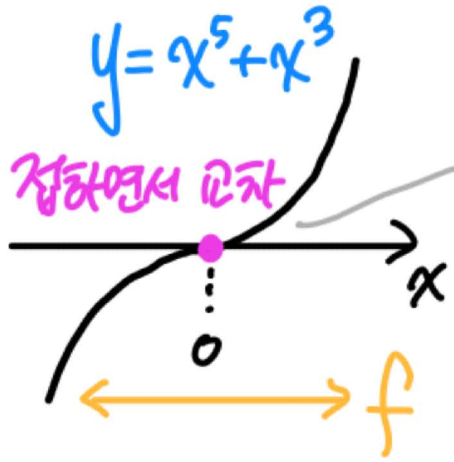
합성하기 전에도 x축이 변곡접선 → $f(x)+x=(x-1)^3$

② 24학년도 6평 28번



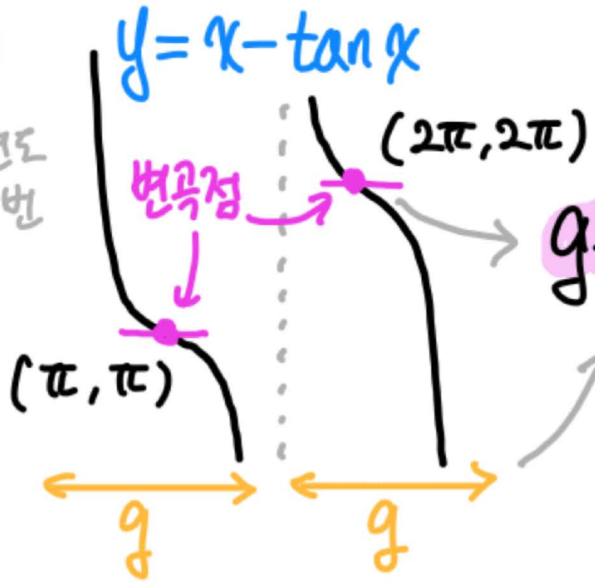
f가 -1을 지나니까 f^2+2f도 극솟값 -1을 가짐 → $a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$의 극솟값이 -1

③ 26학년도 6평 28번



f가 0을 지나니까 f^5+f^3도 x축이 변곡접선 → $\ln(x^2+x+\frac{5}{2})$의 변곡접선 찾기

④ 26학년도 9평 28번



$g-\tan g$도 변곡접선 기울기 0
구간 하나 선택해야 함 → $f(x)=a(x-\pi)^3+n\pi$ + 함수의 움직임 조사

특강 ②

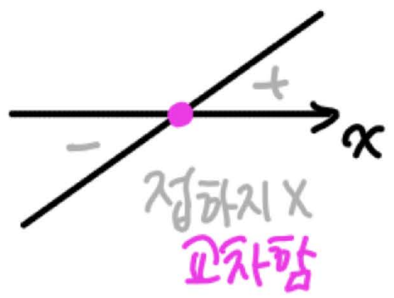
〈 차수논리 〉

근사와 차수논리

> 초월함수도 각각의 점 근방에서는 다항함수처럼 움직인다
> → 각 점에서 차수가 몇 차인지 생각할 수 있다!

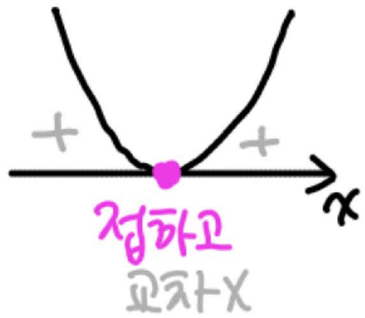
다항함수의 경우…

① 인수가 1개



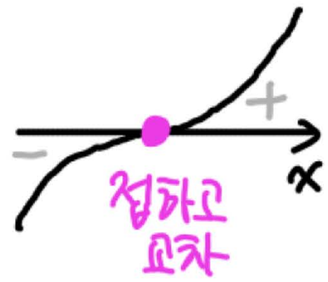
→ 1차

② 인수가 짝수개



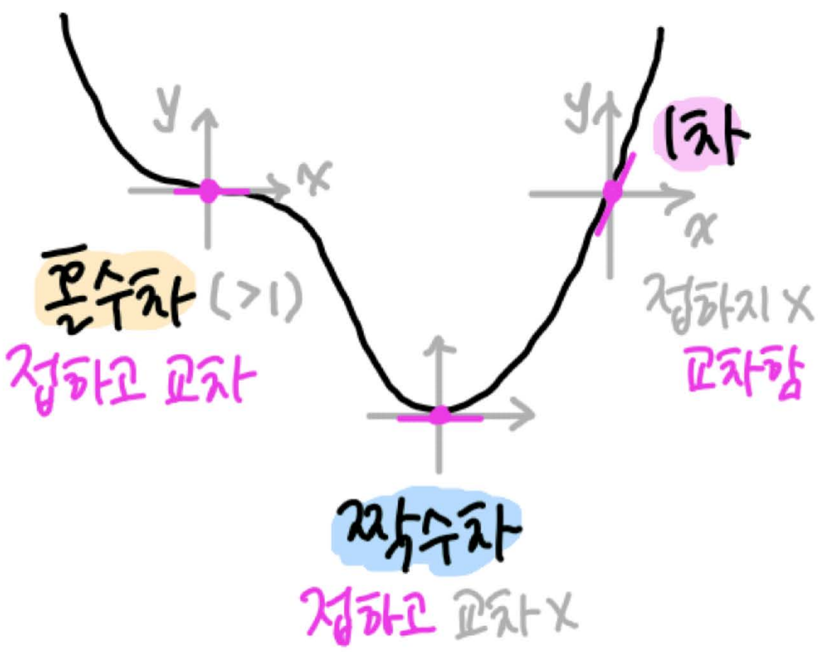
→ 짝수차

③ 인수가 홀수개 (1보다 큰)

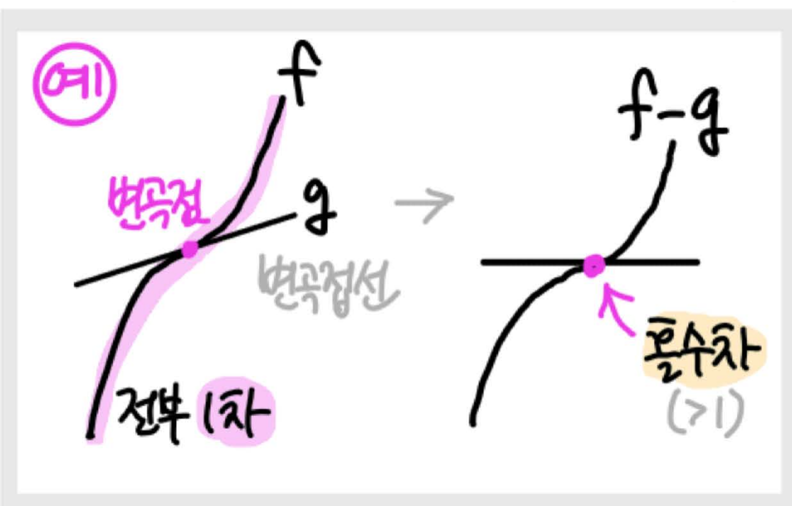


→ 홀수차 (>1)

다항함수로 근사되는 초월함수에 **적용하면!**

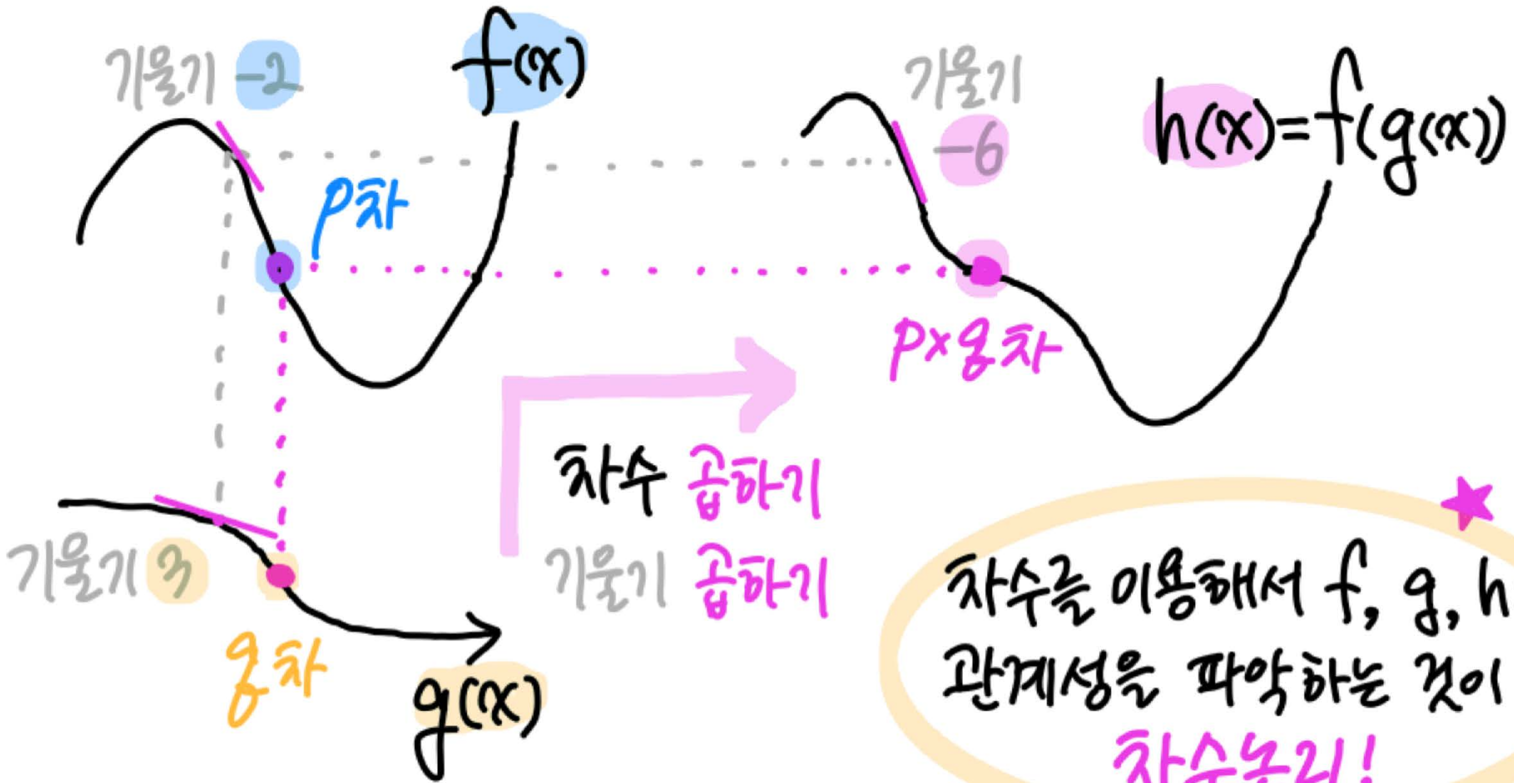


- 기울기 0 아님 : 1차
- 기울기 0
  - 극대극소 : 짝수차
  - 접선과 교차 : 홀수차 (>1)



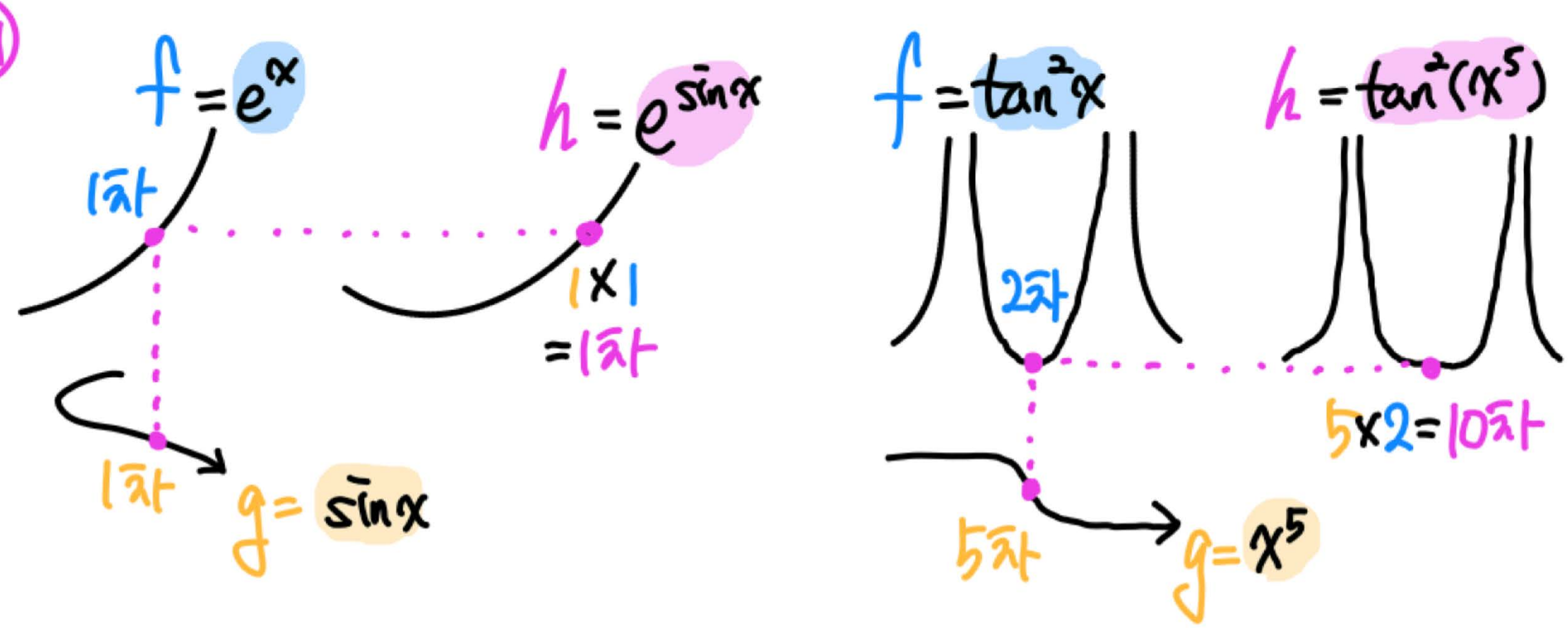
합성함수의 차수

(겉함수 차수) × (속함수 차수) = (합성함수 차수)
and (겉함수 기울기) × (속함수 기울기) = (합성함수 기울기)



차수를 이용해서 f, g, h의 관계성을 파악하는 것이 **차수논리!**

예1



미분 · 적분과 차수

도함수를 활용하면 차수 판단 가능!

3차 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 2차 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 1차 $\xrightarrow{\text{미분}}$?

예) $y = \cos x$ 가 2차 $\xrightarrow{\text{미분}}$ $y' = -\sin x$ 는 1차

$x=0$에서

$y' = 1 - \cos x$ 가 2차 $\xrightarrow{\text{적분}}$ $y = x - \sin x$ 는 3차

$y' = 1 - \sec^2 x$ 가 2차 $(= -\tan^2 x)$ $\xrightarrow{\text{적분}}$ $y = x - \tan x$ 는 3차

주의!

① 1차를 미분했을 때 : 차수 알 수 없음

예) e^x (1차) $\xrightarrow{\text{미분}}$ e^x (1차) / $\sin x$ ($x=0$에서 1차) $\xrightarrow{\text{미분}}$ $\cos x$ (2차)

② 적분한다고 차수가 1씩 커지는 것은 아님

우리는 최저차수를 보고 있다!

예) $y = 3x^2$

2차

적분 ↓

3차

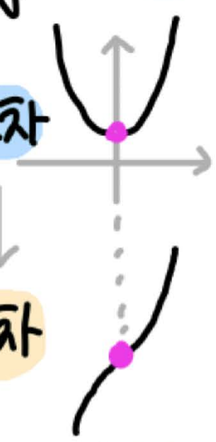
$y = x^3 + C$

$y = 3x^2 + 1$

2차

적분 ↓

1차



$y = x^3 + x + C$

함숫값 0 : 적분하면 차수 1만큼 커짐

함숫값 0 아님 : 적분하면 1차

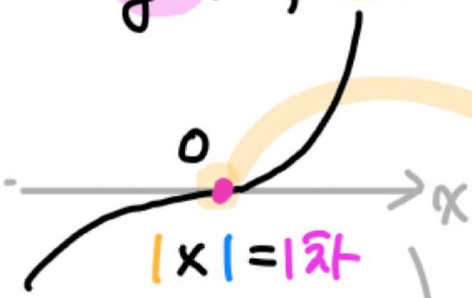
예) ① 25학년도 수능 미적 27번

삼차함수 $y=f(x)+x$

1차
아 2차
아 3차

$x=1$?

$g(x)=f(e^x)+e^x$

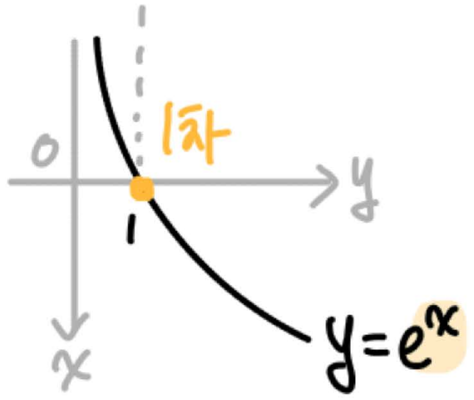


$1\times1=1$차
아 $1\times2=2$차
아 $1\times3=3$차

but 접하고 교차

→ 홀수차(>1)

→ 3차 확정!



차수 곱하기

∴ $f(x)+x$는 $x=1$에서 3차 → $f(x)+x=(x-1)^3$

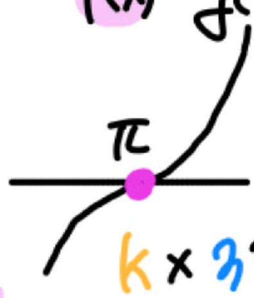
② 26학년도 9평 미적 28번

$y'=1-\sec^2 x=-\tan^2 x$
가 $x=0$에서
2차, 함숫값 0
→ y는 $x=0$에서 3차
→ 변곡점에서 다 3차

미분가능하므로 $k\geq1$

$f(x)=g(x)-\tan g(x)$

삼차함수



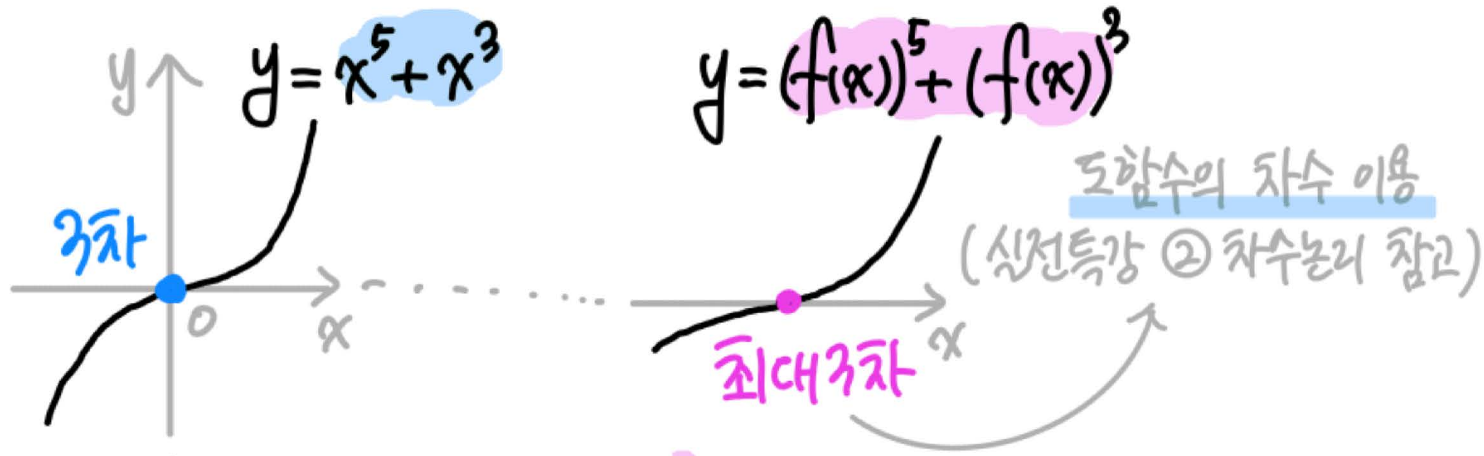
$k\times3$차 $=1$차
아 2차
아 3차

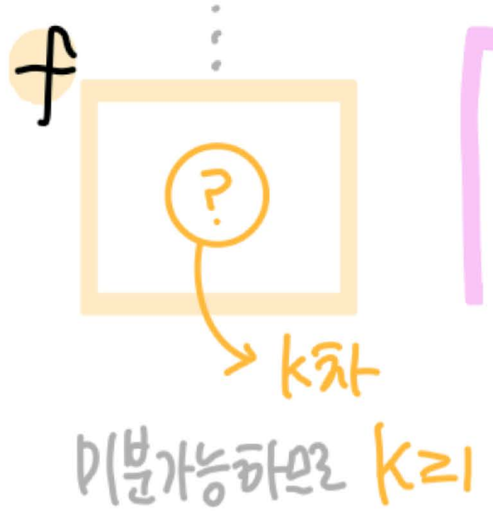
인데 $k\geq1$ 이므로
3차 확정!

차수 곱하기

∴ $f(x)-f(\pi)=a(x-\pi)^3$

예 ③ 26학년도 6평 미적 28번





차수 곱하기 : $3 \times k$가 최대 3차

이때 $k \geq 1$이므로 $k = 1$

→ $(f(x))^5 + (f(x))^3$은 3차

∴ x축이 변곡접선!

차수논리 활용법

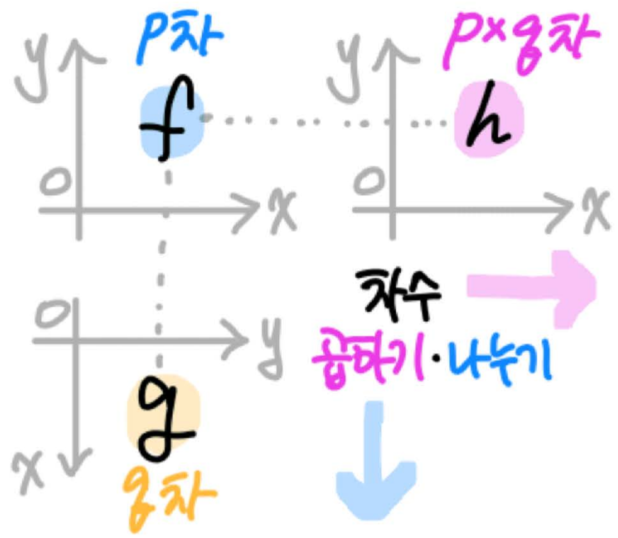
Summary

$f(g(x)) = h(x)$가 주어졌을 때

① 주어진 조건으로 f, g, h 차수 파악

② 차수 곱하기·나누기로 차수 관계 파악

③ 찾아낸 관계로 식 확정



3인 캐치볼처럼 생각하자!

특강 ③

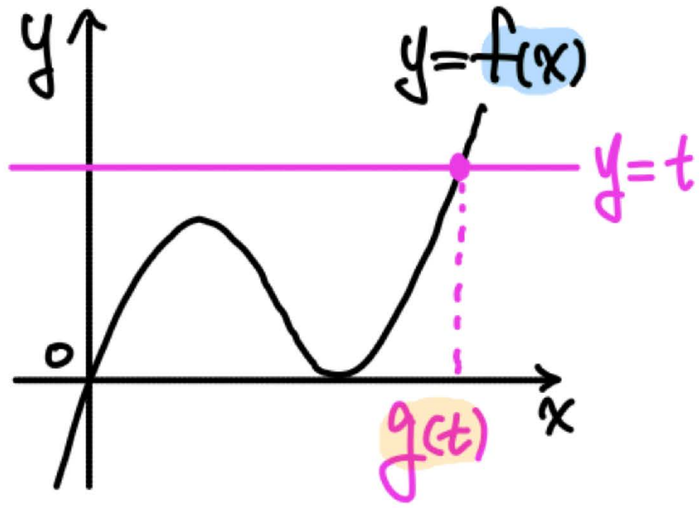
$\langle f(g(x)) = h(x)$의 x좌표 해석$\rangle$

$f(g(x)) = x$ 의 x좌표 해석

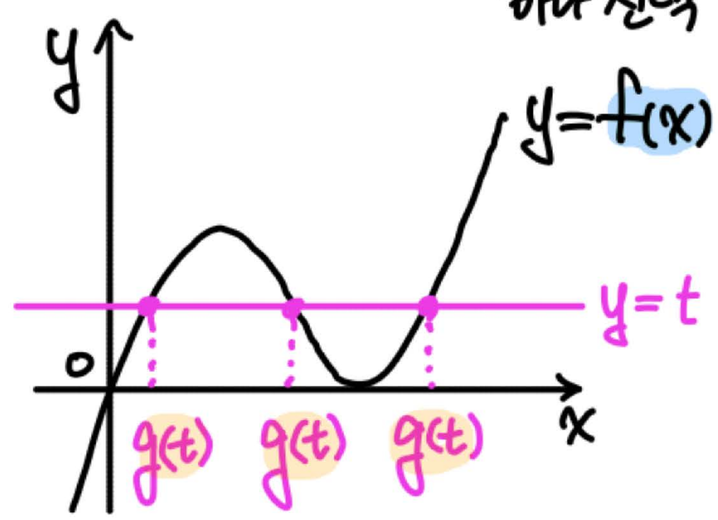
겉함수를 알 때 속함수 관찰하기

$f(g(t)) = t$ → 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표가 $g(t)$

① 한 점에서 만남 : $g(t)$ 확정!

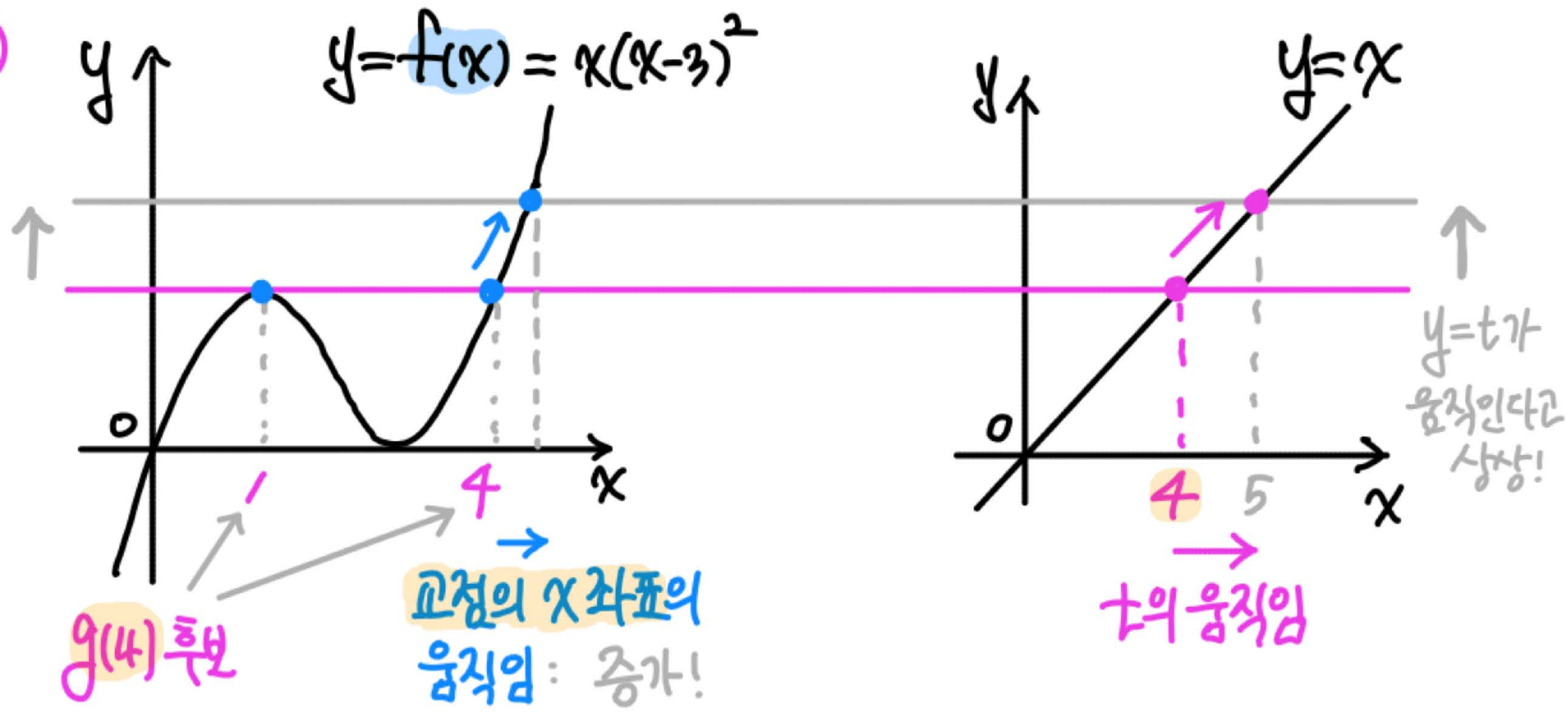


② 여러 점에서 만남 : 가능한 후보 중 하나 선택



★ 직선 $y=t$를 움직이며 상상해보자!

예)

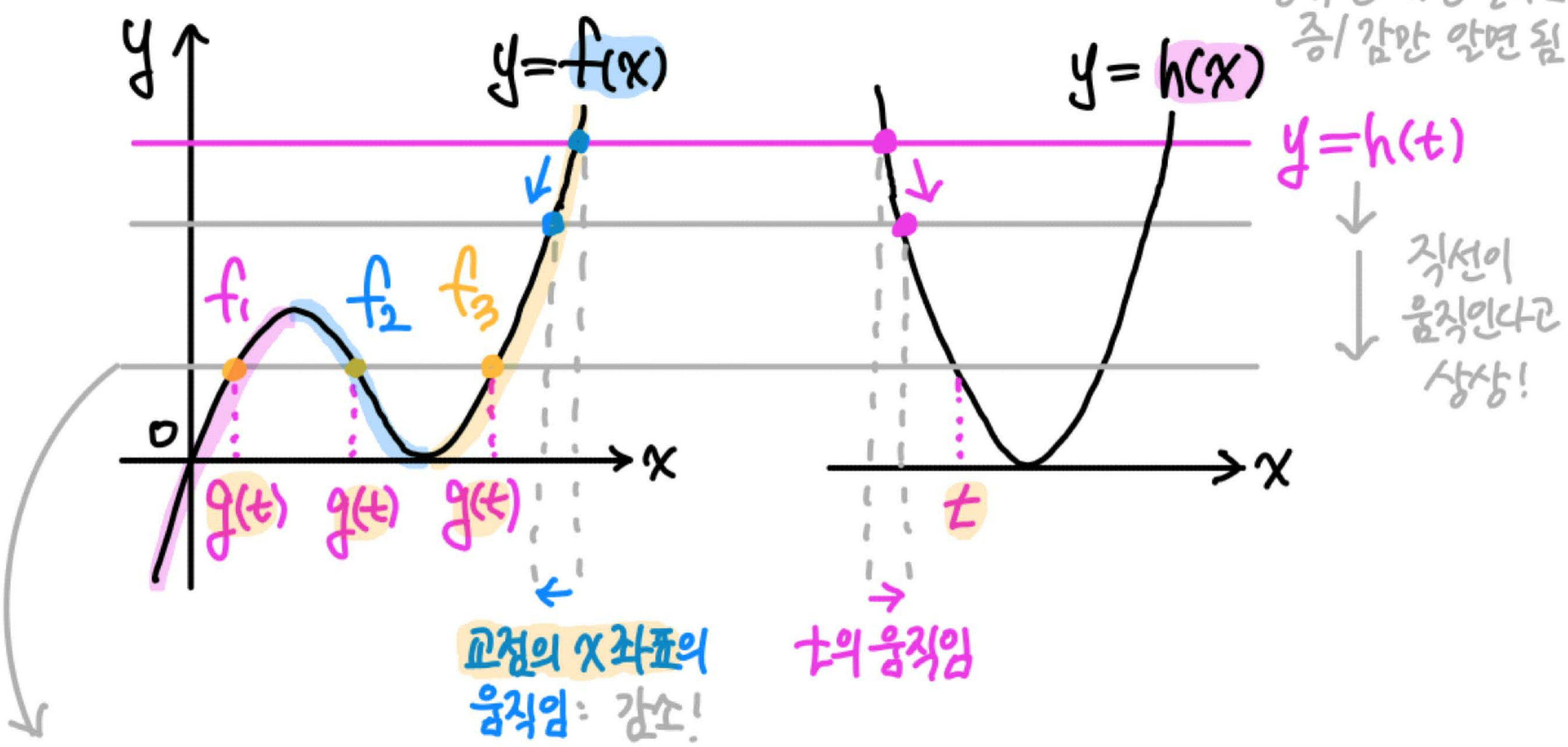


$f(g(x)) = h(x)$의 x좌표 해석

$f(g(t)) = h(t)$ → 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(t)$의 교점의 x좌표가 $g(t)$

★ 우변은 상수함수로 생각하자!

정확한 개형 몰라도 증/감만 알면 됨



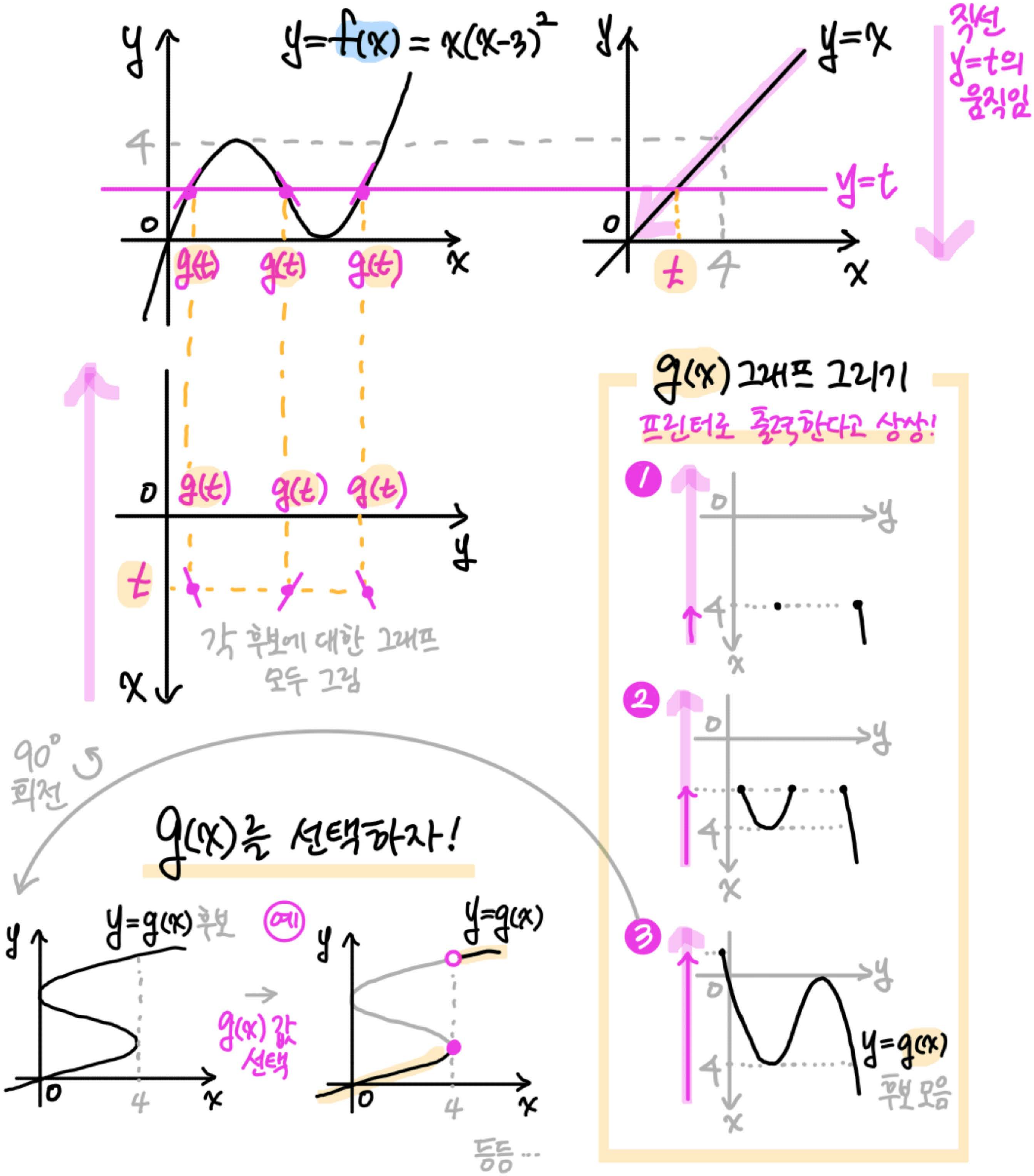
여러 점에서 만날 경우 함수를 증/감 구간마다 나눠서 생각 (f_1, f_2, f_3)

→ 어느 $g(t)$가 결정되는지는 문제마다 판단!

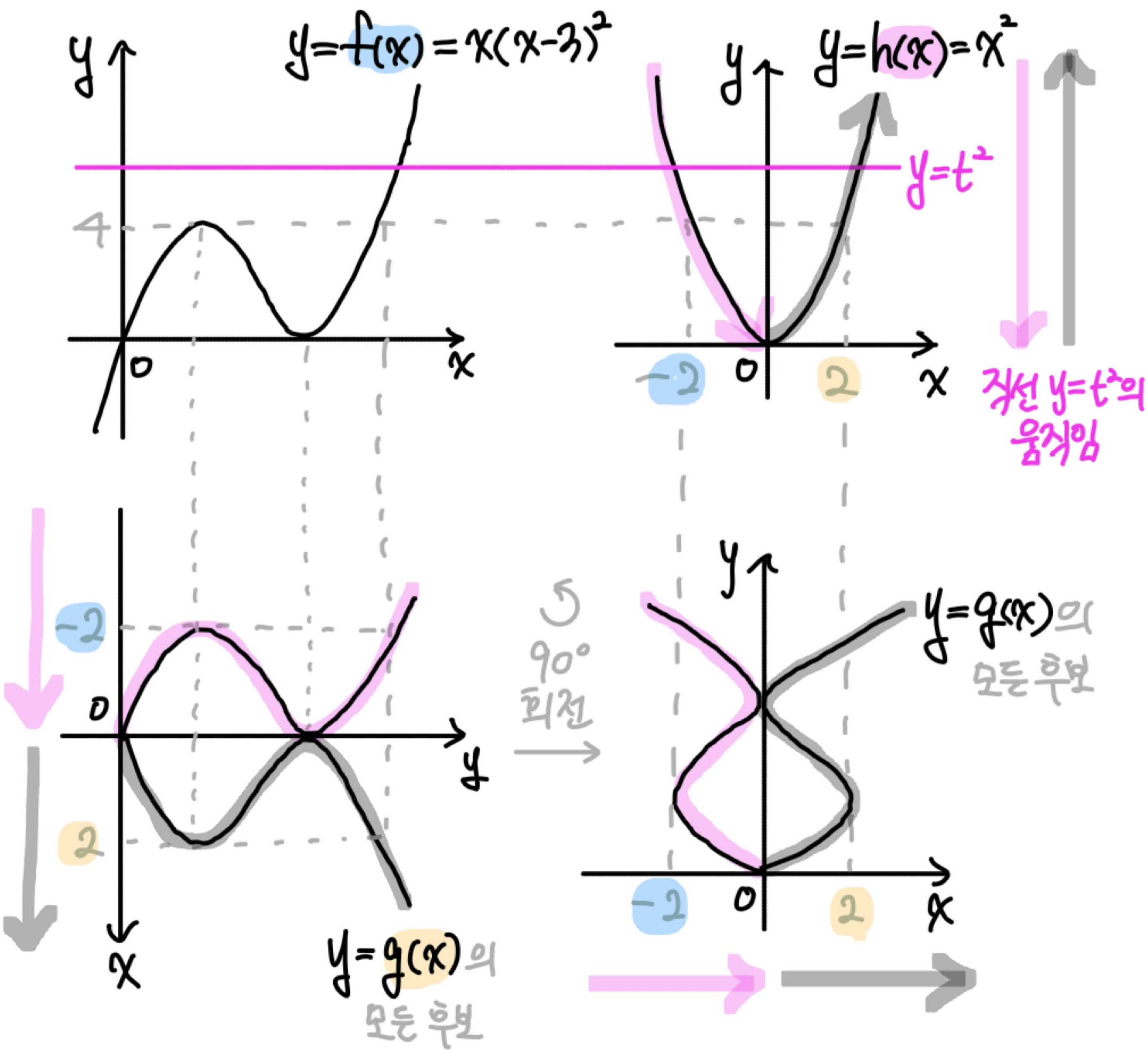
예) $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속

→ f_3에서만 움직임 (∵ 점프하면 불연속) → $g(x) = f_3^{-1}(h(x))$

x좌표 해석 시각화 : $f(g(x)) = x$



x좌표 해석 시각화 : $f(g(x)) = h(x)$



⇒ x좌표 해석은 N축의 역방향이다!

방향만 다른 접근!

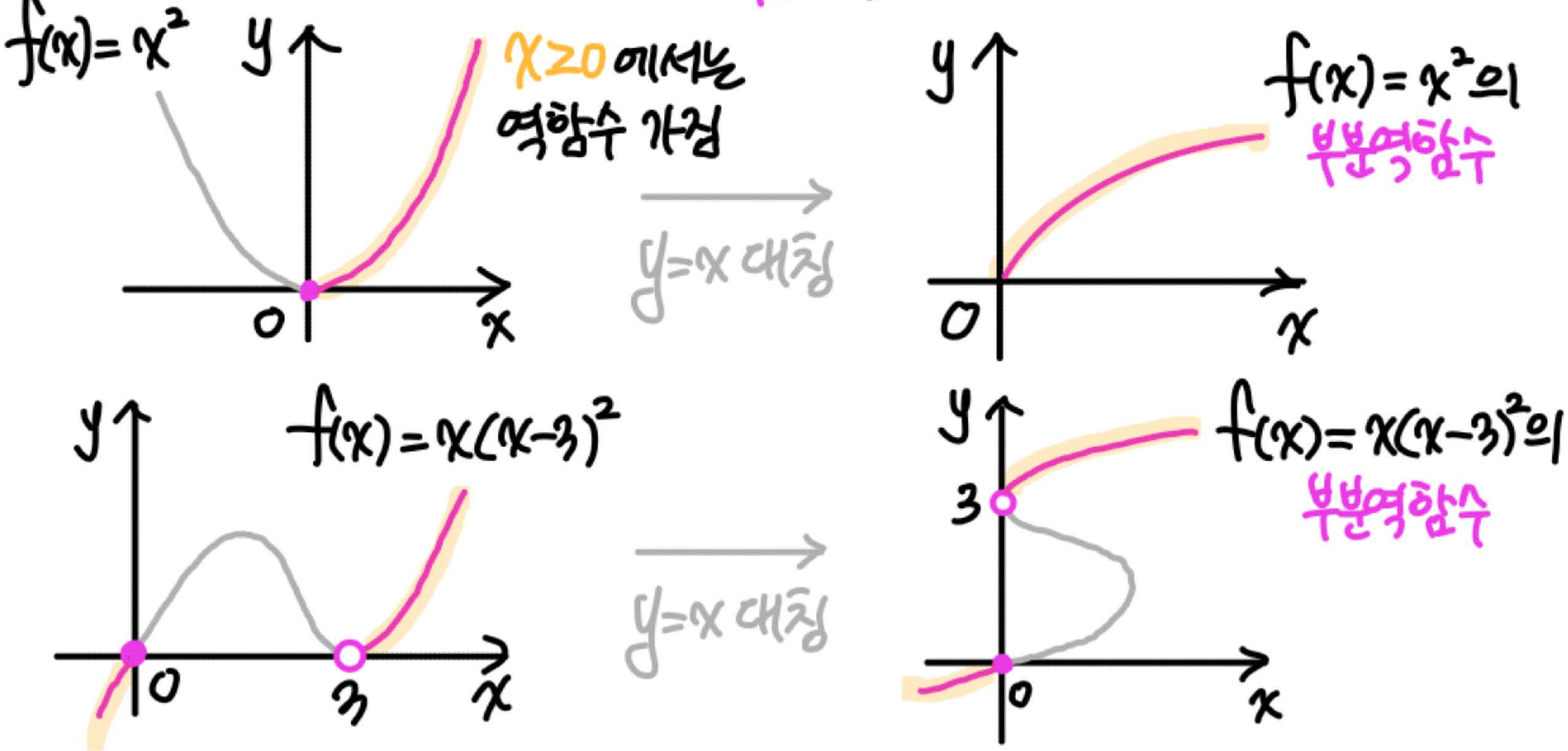
특강 ④

〈 부분역함수 〉

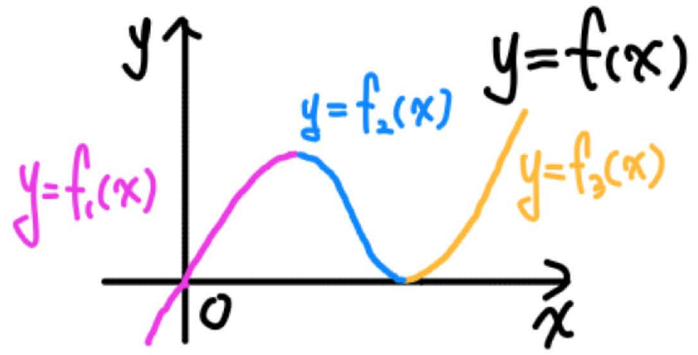
부분역함수란?

역함수가 존재하지 않는 함수 (일대일대응X) 도 정의역을 제한하면 역함수를 가지도록 할 수 있다!

→ 부분역함수!



이제 역함수를 취해서 식을 정리할 수 있다!



일대일대응이 되도록 쪼개면 각각 부분역함수 가짐

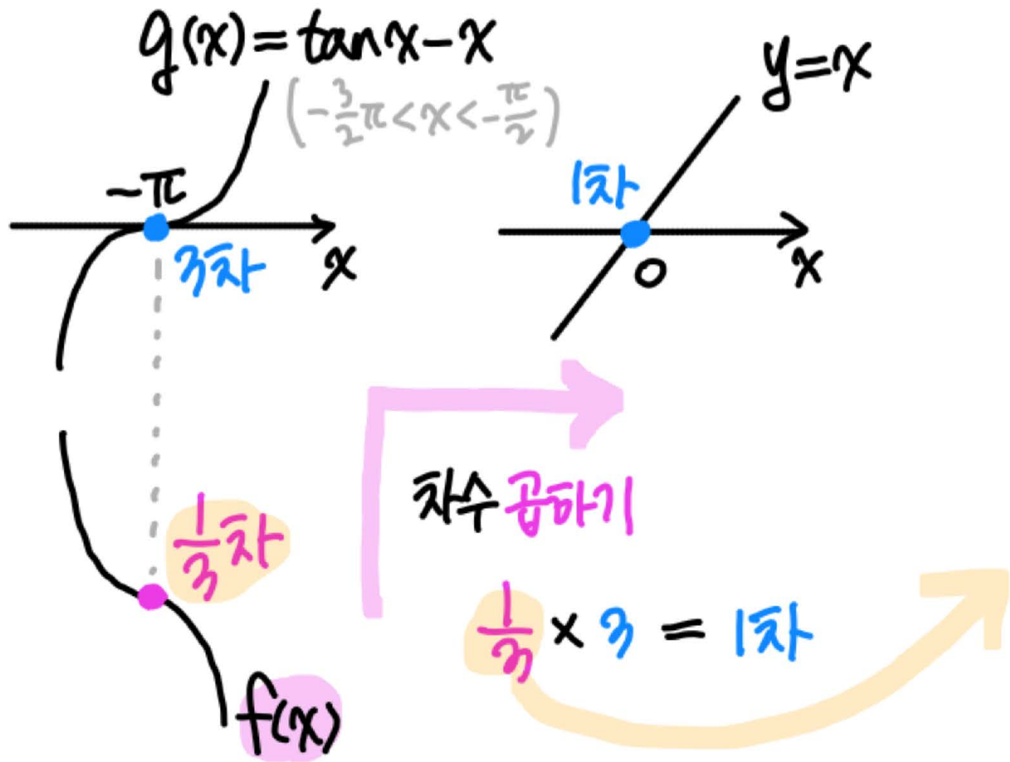
$$f(g(x)) = h(x)$$

↓ 역함수 취하기!

$$g(x) = f_n^{-1}(h(x))$$

$(n=1, 2, 3)$

부분역함수의 차수



$g(f(x)) = x$

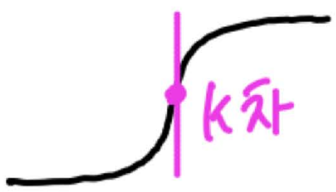
$g(x)$의 부분역함수

부분역함수의 차수는 원래 차수의 역수

차수가 1보다 작아지면 …?

차수가 k인 점에서

① $0<k<1$



기울기 ∞

미분불가능

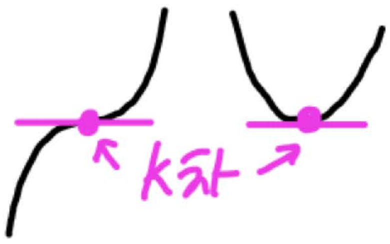
예) $y=\sqrt[3]{x}$

② $k=1$

기울기 $a\ (\neq 0)$

미분가능

③ $k>1$

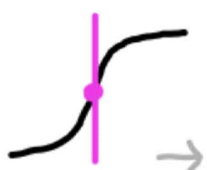


기울기 0

미분가능

미분가능하면 차수가 1 이상!

→ 반대로 그래프 보고 차수의 범위 판단도 가능!



기울기 0이고 미분불가능

→ $0<$ 차수 <1

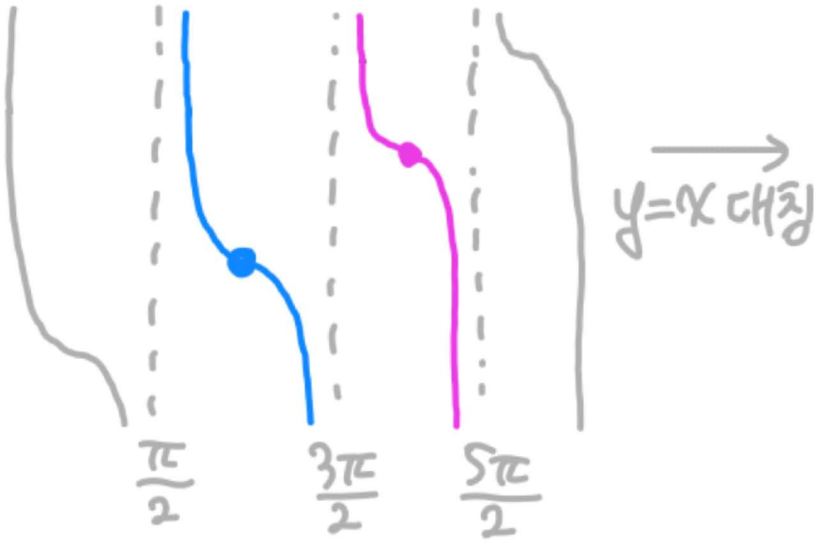
예) 26학년도 9평 미적 28번

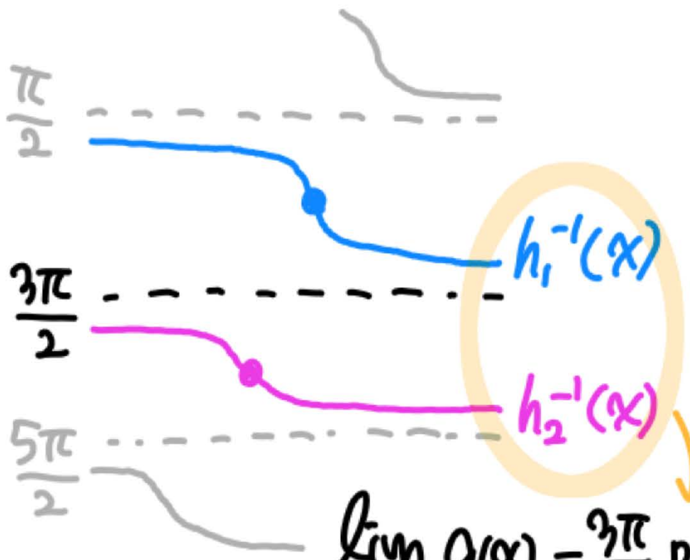
$f(x)=g(x)-\tan g(x)$

$h(x)=x-\tan x$ 라 하면 $f(x)=h(g(x)) \to h^{-1}(f(x))=g(x)$

부분역함수 이용!

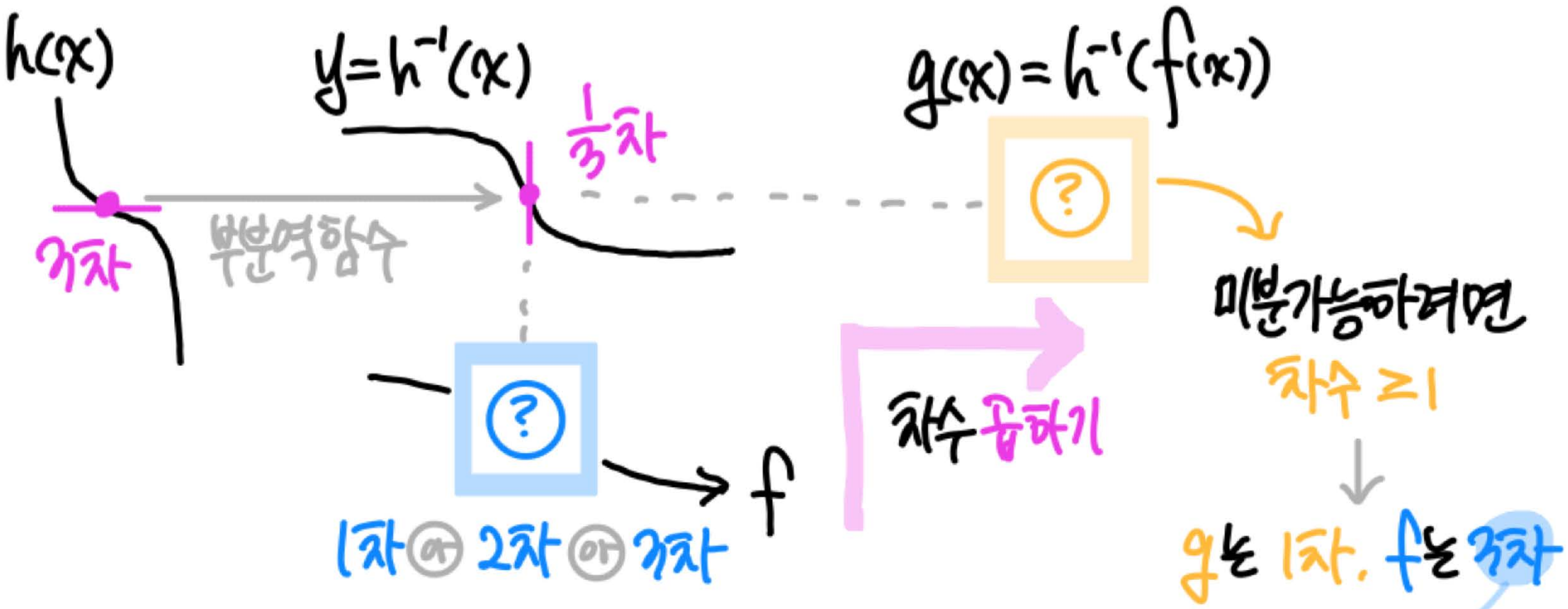
① 부분역함수





$\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$ 만족

② 차수논리



→ h_1 인 경우 $f(x)=a(x-\pi)^3+\pi$

h_2 인 경우 $f(x)=a(x-\pi)^3+2\pi$

↳ $f''(\pi)=0$

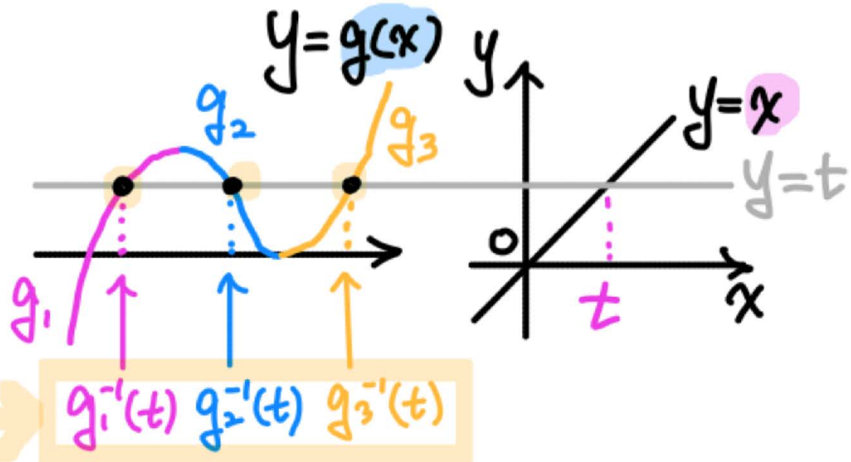
나머지 조건으로 둘 중 어느 것인지 판단!

부분역함수를 활용해보자!

① 그래프에서의 활용

예) $(f(x))^3 + 3(f(x))^2 = x$

→ $g(x) = x^3 + 3x^2$의 그래프와
직선 $y=t$가 만나는 점의
x좌표 중 하나가 $f(t)$



$g(f(x)) = x \longrightarrow f(x) = g_1^{-1}(x)$ 또는 $g_2^{-1}(x)$ 또는 $g_3^{-1}(x)$

$g(f(x)) = x^2 \longrightarrow f(x) = g_1^{-1}(x^2)$ 또는 $g_2^{-1}(x^2)$ 또는 $g_3^{-1}(x^2)$

우변 식이 달라져도 같은 방식으로 정리 가능

② 식에서의 활용

$(f(x))^3 = x + e^{f(x)} \rightarrow (f(x))^3 - e^{f(x)} = x$ — 좌변에 $f(x)$ 몰아주기

$\rightarrow g(f(x)) = x \quad (g(x) = x^3 - e^x)$

부분역함수 이용 가능!

$(f(x))^3 = x^2 \ln x + e^{f(x)} \rightarrow (f(x))^3 - e^{f(x)} = x^2 \ln x$

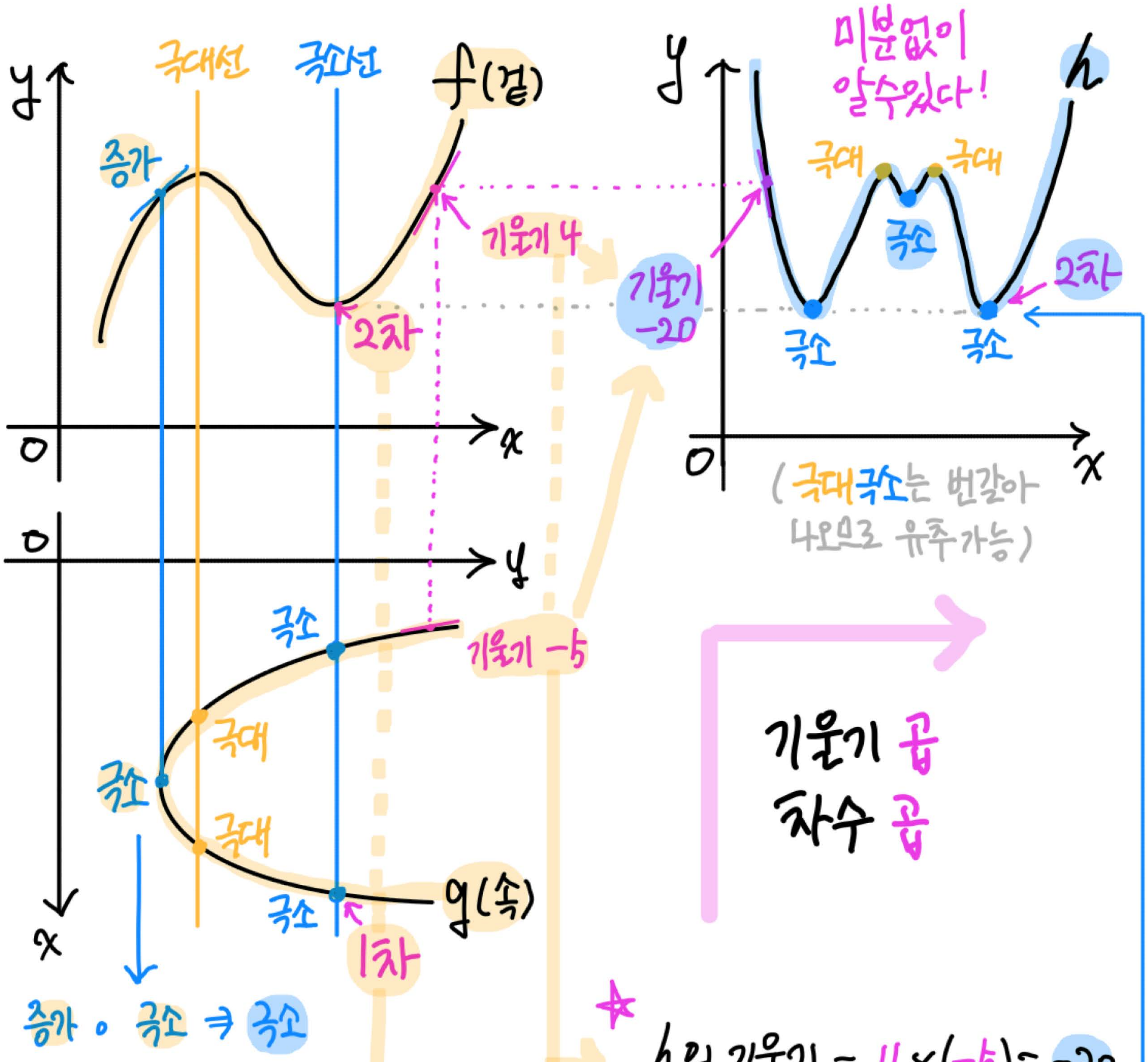
$\rightarrow g(f(x)) = x^2 \ln x$ 부분역함수 이용 가능!

특강 ⑤

〈 합성함수 총정리 〉

$f \circ g = h$ 의 성질

아는 함수



★ h의 기울기 $= 4 \times (-5) = -20$

★ 차수: 2차 × 1차 = 2차

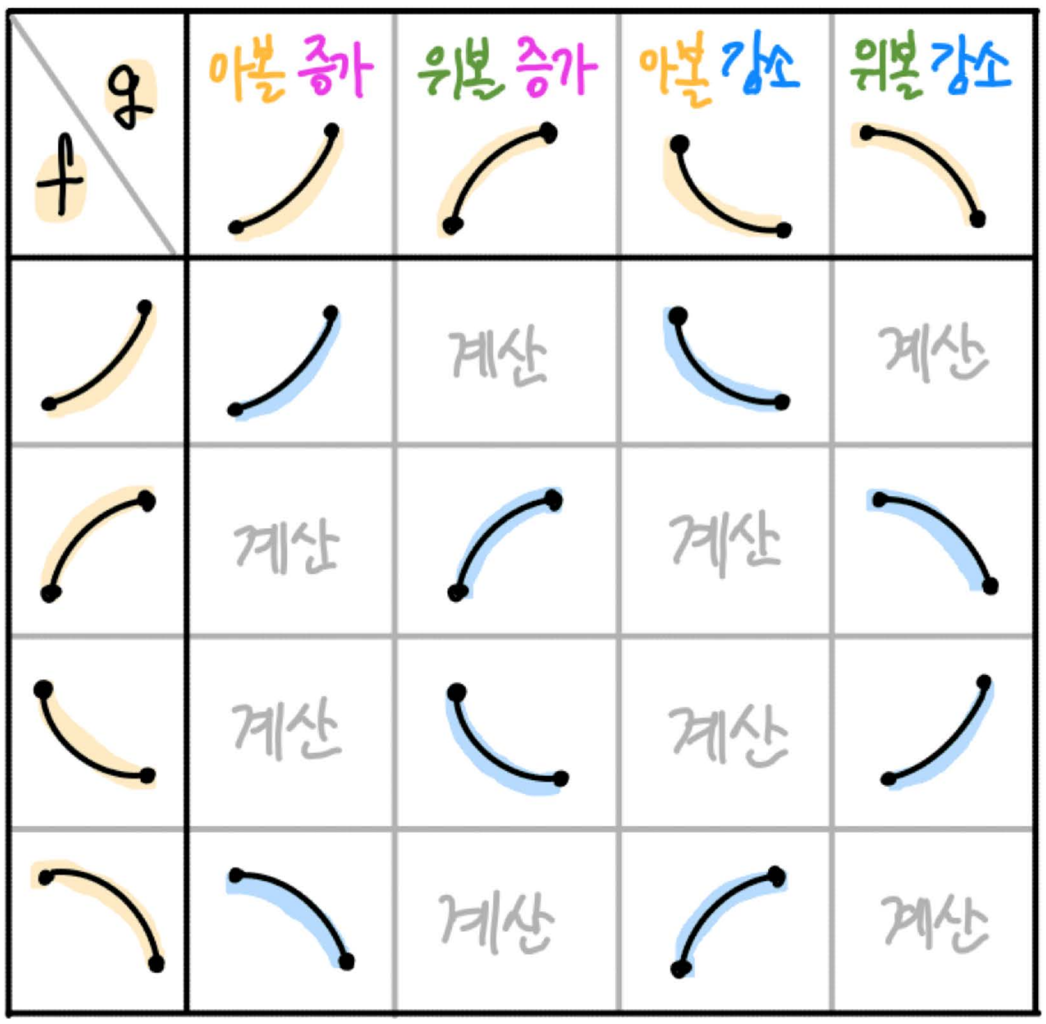
증감과 볼록

① 증감 판단

증∘증 = 증　　증∘감 = 감

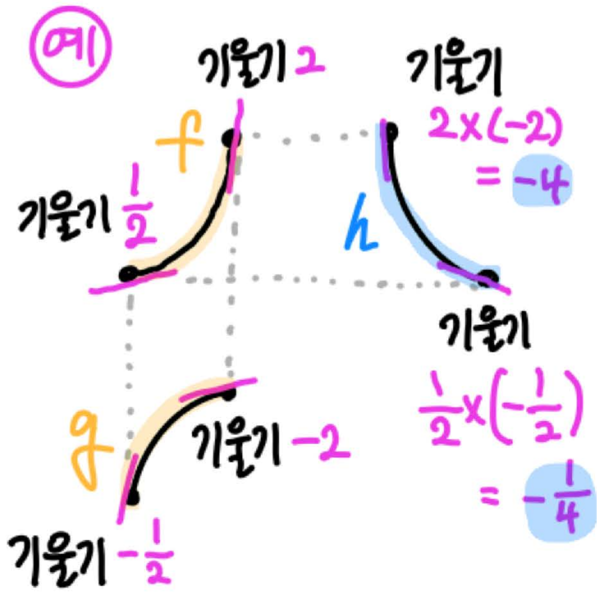
감∘감 = 증　　감∘증 = 감

② 아볼·위볼 암산 일반화 (feat. 2012 한완수)



암기하지 말고 간단한 예시 들기!

예



∴ h는 아볼감소

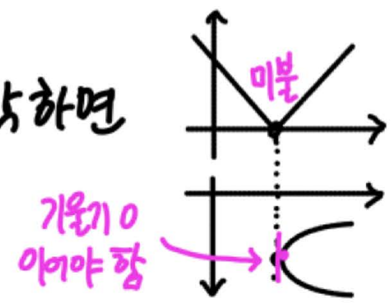
16개 중　8개는 예시들기로 암산 가능

　　　　8개는 직접 미분해서 구해야 함

연속성과 미분가능성

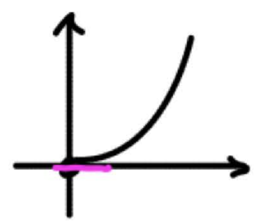
① 연속성 : 속함수 치역 = 겉함수 정의역 됨을 생각하여 암산!
(쉬우니 스스로 해보기)

② 미분가능성 : 하나가 미분불가능일 때 기울기 곱을 생각하면
하나는 주로 0 이어야 미분가능

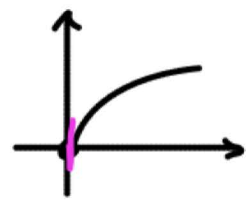


※ 두 기울기를 곱하는데 $\infty \times 0$ 꼴일 때 → 차수논리 등장! (편의상 우극한만 생각)

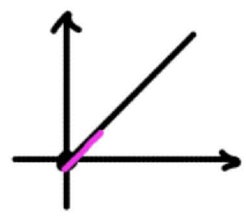
1) 차수가 1차 초과 → 우미분계수 0
예 x^2, $x^{\frac{3}{2}}$



2) 차수가 1차 미만 → 우미분계수 ∞
예 $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$



3) 차수가 딱 1차 → 우미분계수 a $(a \neq 0)$
예 x, $\frac{3}{2}x$



⇒ 즉, 좌·우 따로 따져서 양쪽 다 1차일 때만 주의하면 된다.

case i) ii) iii)

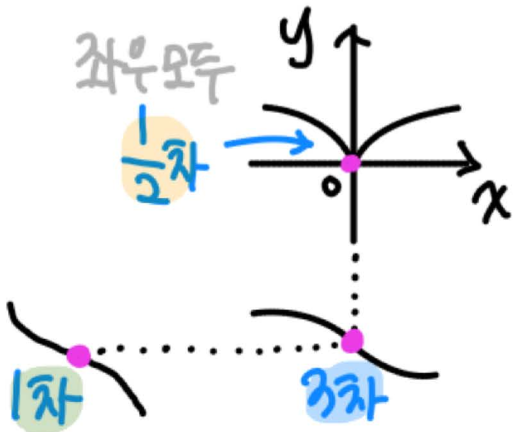
⇒ 극값 존재 ⇔ 미분불가능
극값 X ⇔ 미분가능

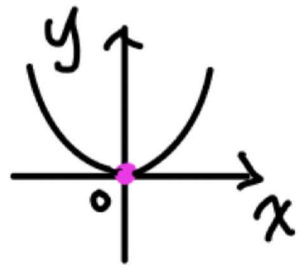
셋 중 하나인데, 좌우대칭 or 부드러운 함수면 ii 는 나오지 X (수능기준 애매)
(공부할 땐 엄밀하게 따져보자!)

예) 1) 차수가 1차 초과 → 미분가능!

$x=0$ 에서 $y=\sqrt{|\sin^3 x|}$ 의 미분가능성?

$f=\sqrt{|x|}$ → $f\circ g\circ h=\sqrt{|\sin^3 x|}$





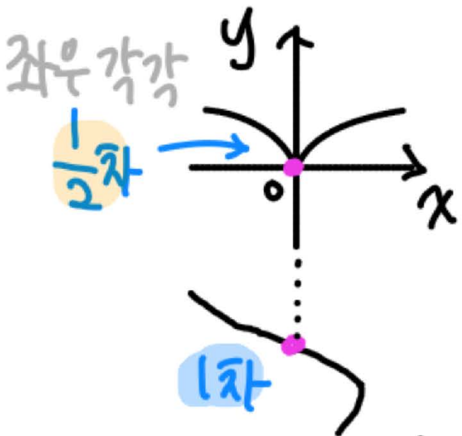
$h=\sin x$ $g=x^3$

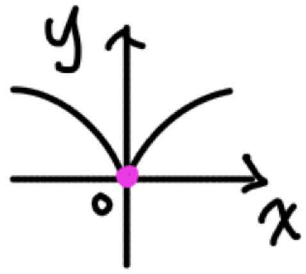
차수 곱하기! $\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$차이므로 미분가능

2) 차수가 1차 미만 → 미분불가능!

$x=\frac{\pi}{6}$ 에서 $y=\sqrt{\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|}$ 의 미분가능성?

$f=\sqrt{|x|}$ → $f\circ g=\sqrt{\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|}$





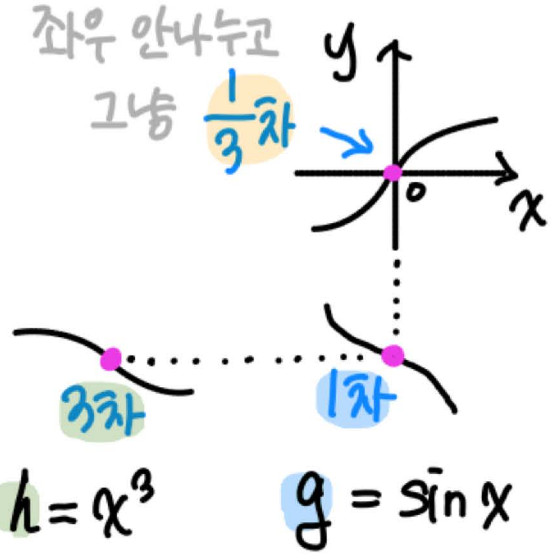
$g=\sin x-\frac{1}{2}$

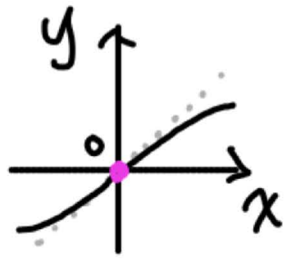
차수 곱하기! $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$차이므로 미분불가능

예 3-1) 차수가 딱 1차 : 극값 없음 → 미분가능! (아마도)

$\boxed{x=0 \text{ 에서 } y=\sqrt[3]{\sin(x^3)} \text{ 의 미분가능성?}}$

$f=\sqrt[3]{x} \rightarrow f\circ g\circ h = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$





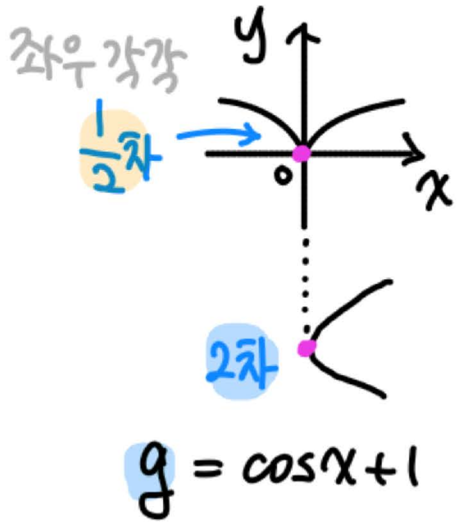
차수 곱하기! $\frac{1}{3}\times 1\times 3=1$차인데

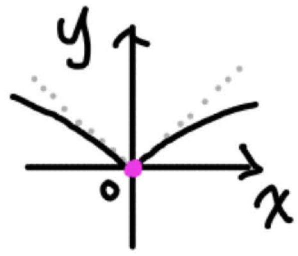
극값 아니므로 미분가능

3-2) 차수가 딱 1차 : 극값 있음 → 미분불가능!

$\boxed{x=\pi \text{ 에서 } y=\sqrt{|\cos x+1|} \text{ 의 미분가능성?}}$

$f=\sqrt{|x|} \rightarrow f\circ g = \sqrt{|\cos x+1|}$





차수 곱하기! $\frac{1}{2}\times 2=1$차인데

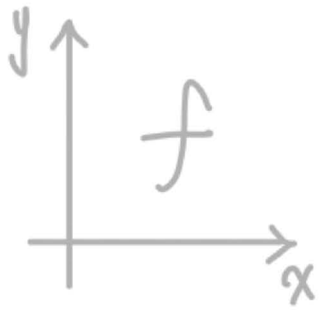
극소이므로 미분불가능

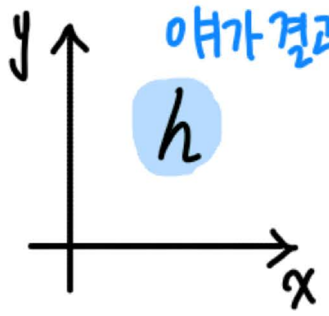
요즘 유행은 …

과거 유행

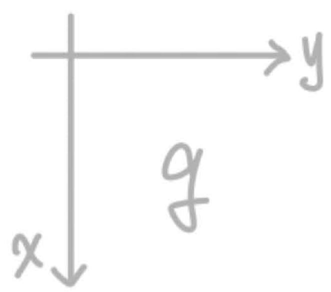
$f \circ g = h$

아는 함수 — 알아낸 함수





얘가 결과



기울기 곱
차수 곱

증감 (4개)
아볼·위볼 (16개)
연속성, 미가·미분

전부
암산가능
(미분없이)

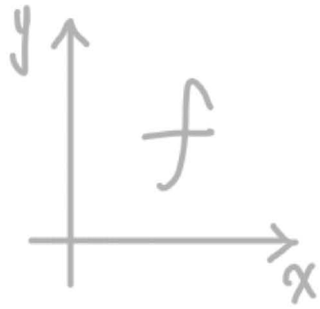
차수논리

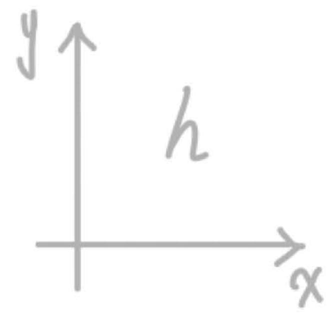
양쪽 1차 + (극값 존재 → 미분
극값 X → 미가

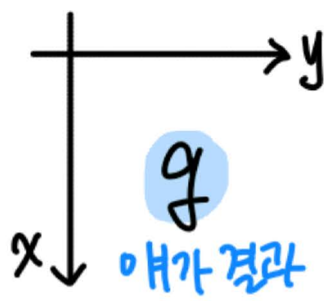
요즘 유행

$h = f \circ g$

아는함수 — 알아낸 함수







얘가 결과

기울기 나누기
차수 나누기

부분역함수로
동일하게 유도가능

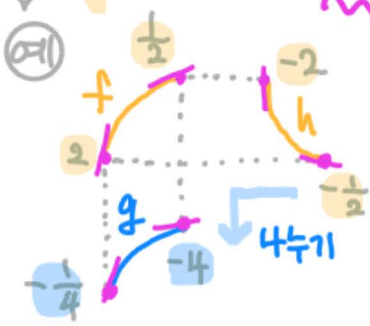
예) 기울기
음수 ÷ 양수 = 음수
⇒ 감소

증감 (4개)
아볼·위볼 (16개)
연속성, 미가·미분

전부
암산가능

차수논리

예)



나머지는 스스로 해보기!

증감과 볼록*

($h = f \circ g$ 속함수 ver.)

① 증감 판단

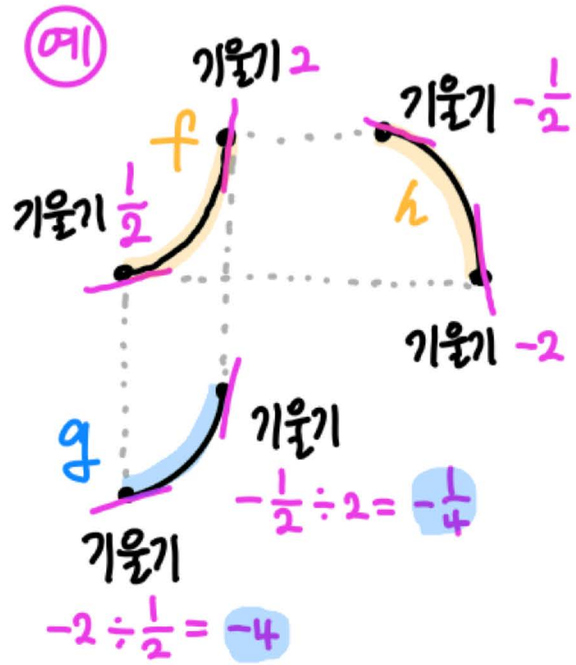
증 = 증 ∘ 증　　　감 = 증 ∘ 감

증 = 감 ∘ 감　　　감 = 감 ∘ 증

② 아볼·위볼 암산 일반화 (feat. 2012 한완수)

f \ h	아볼 증가	위볼 증가	아볼 감소	위볼 감소
	계산		계산	
		계산		계산
	계산		계산	
		계산		계산

암기하지 말고 간단한 예시 들기!



∴ g는 위볼감소

16개 중　8개는 예시들기로 암산 가능

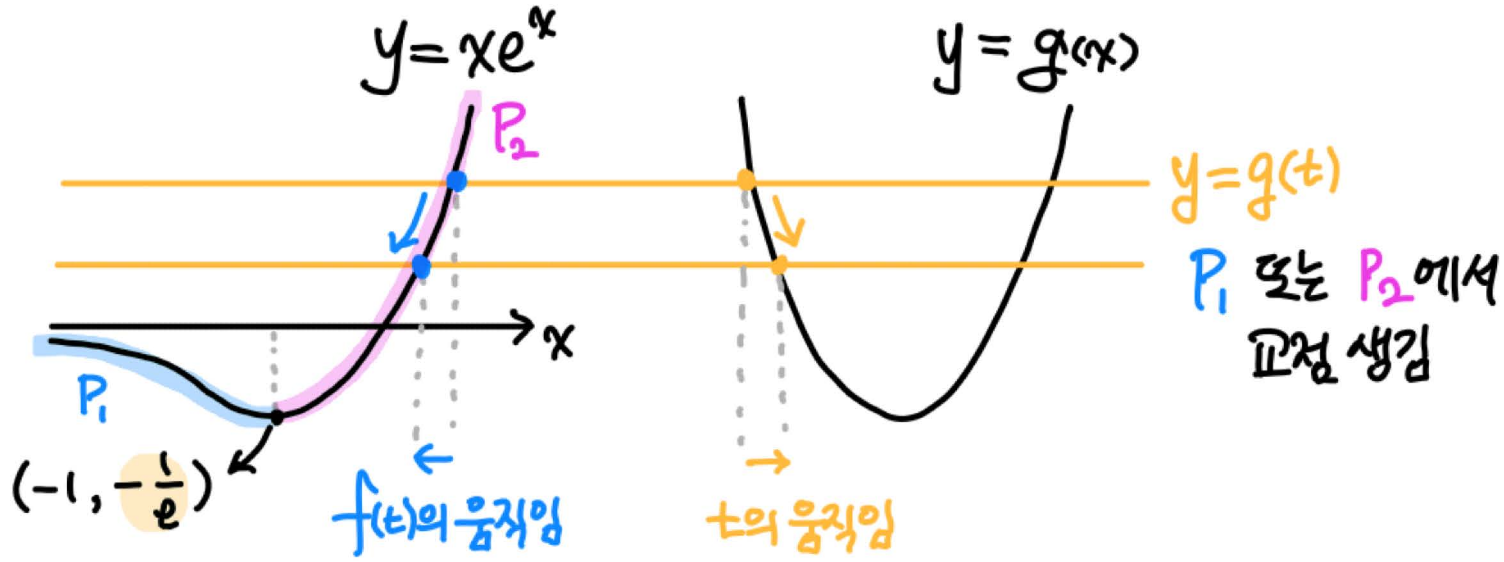
　　　　8개는 직접 미분해서 구해야 함

예)

$f(x)\, e^{f(x)} = g(x)$ (이차함수) $\Rightarrow$ $y = xe^x$와 $y = g(t)$의 교점의 x좌표가 $f(t)$

알아낼 함수

★ 평행선 그리면서 교점의 x좌표 관찰하기!!



★ t를 움직이면서 $f(t)$의 움직임을 평행선으로 살필 수 있다.

$\Rightarrow$ $f(x)$가 실수 전체 집합에서 연속 조건 있으면 : $g(x) \geq -\frac{1}{e}$

① (∵ 반드시 P_2를 따라가야 하므로)

$\Rightarrow$ ① + 한 점에서 미분불가능 조건 있으면 : $g(x)$의 최솟값이 $-\frac{1}{e}$

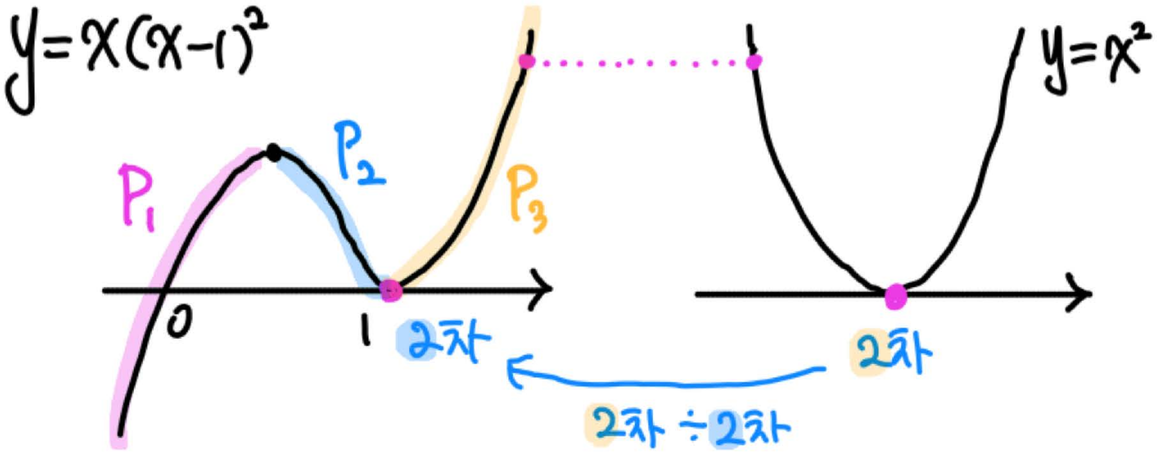
(P_2를 따라갈 때 자수나누기를 생각해보면 좌우 모두 1차인데 미분불가능해야 하니 극값 가짐)

$\Rightarrow$ P_2를 따라가는 걸 구할 : 부분역함수 이용하면 $f(x)$를 직접 구할 수 있다!

$P_2^{-1}(g(t))$

예)

$f(x)\{f(x)-1\}^2 = x^2$ ⇒ $y=x(x-1)^2$과 $y=t^2$의 교점의 x좌표가 $f(t)$



① 실수 전체의 집합에서 연속 ⇒ P_3은 따라감

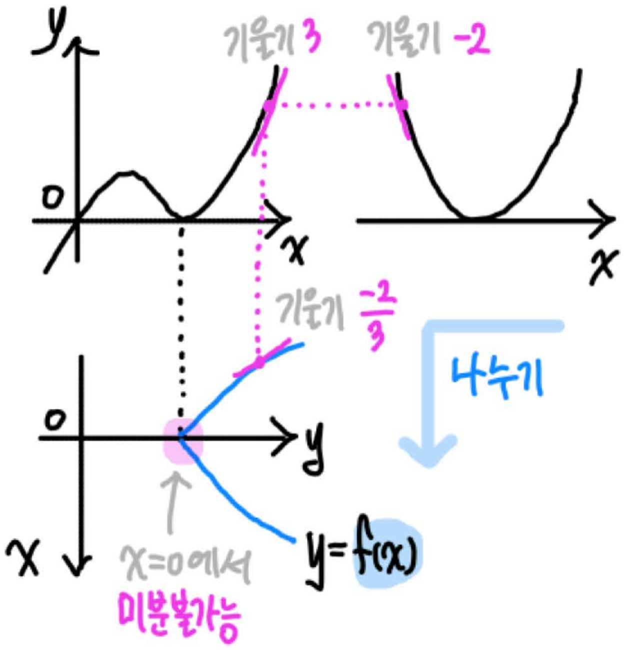
② $x=0$ 에서의 미분가능성 : 차수나누기로 파악

⇒ $\frac{2}{2}$ = 1차인데 극소이므로 미분불가능

③ P_3은 증가인데 x^2은 감소 → 증가 이므로

$f(x)$도 감소 → 증가 이다.

(∵ 양수기울기를 나누면 부호 그대로)



④ 아본·위본은 16개 중 8개만 암산가능한데,

이 경우에는 모두 암산 불가능한 상황

⑤ $P(x)=x(x-1)^2$에서

$P(f(x))=x^2$의 양변에 P_n^{-1} 연산 ⇒ $f(x)=P_n^{-1}(x^2)$

이문제에서는 $n=3$

중간에 갈아타더라도 $P_n^{-1}(x^2)$을 구간별로 직접 구할 수 있다!

$(n=1, 2, 3)$