[2609(미적)28]

실 전 특 강

04

「부분역함수」

책을 샀다고 해서 그 책이 당신 것이 되는 것은 아니다.

지식은 소유가 아닌 소화다.

— 아르투어 쇼펜하우어(1788-1860), 독일 철학자

Lecture

실전특강 ❹ 부분역함수

#260928 #250628 #240628 #230929 #220629 #200630 #181121 #161121

0. INTRO

특강 ❸ 「$f(g(x))=h(x)$ 의 x 좌표 해석」에서

삼차함수

[2609(미적)28] $f(x)=h(g(x))$

$h(x)=x-\tan x$

$h(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$

[2406(미적)28] $h(x)=g(f(x))$

$g(x)=x^2+2x$

과 같은 합성함수 항등식을 해석하는 관점을 배웠다. 이번 특강 ❹ 「부분역함수」에서는 같은 합성함수 항등식 $f(g(x))=h(x)$를 해석하는 또 다른 관점을 다룰 것이다.

저자's LECTURE

❸편과 ❹편의 공통점과 차이점

이번 특강 ❹편에서 다룰 부분역함수는 특강 ❸편의 x 좌표 해석과 마찬가지로 f와 h를 알 때 g를 알아내는데 활용할 수 있습니다. 즉, x 좌표 해석과 부분역함수는 그 해석의 방향성이 같다는 데에 공통점이 있습니다.

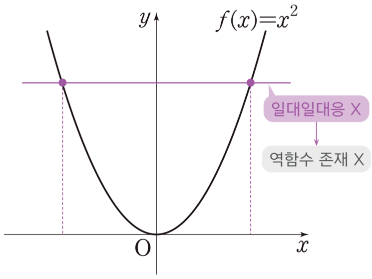
두 해석법의 차이점은 x 좌표 해석은 g의 움직임을 좀 더 직관적으로 바라볼 수 있고, 부분역함수는 함수 g의 식을 직접 써낼 수 있다는 데에 있습니다.

이번 특강 ❹편에는 특강 ❷편에서 다룬 「차수」에 대한 이야기도 나오기 때문에, 특강 ❷편을 다시 들춰볼 일이 있을지도 모릅니다. x 좌표 해석이든 부분역함수든, 합성함수의 그래프 그리기라는 본질에서 비롯된 것이라는 것을 다시 한번 명심하고 학습하시길 바랍니다.

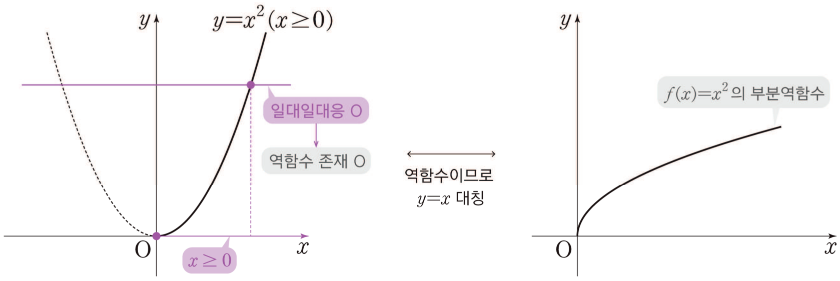
1. 부분역함수

1-1. 부분역함수의 정의

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x^2$은 일대일대응이 아니므로 역함수를 가지지 않는다.



그러나 정의역을 제한하여 일대일대응으로 만들면 역함수를 가지도록 바꿀 수 있다. 예를 들어, 집합 $\{x|x \geq 0\}$에서 정의된 함수 $y=x^2\,(x \geq 0)$은 일대일대응이라 할 수 있고, 따라서 역함수를 가진다.



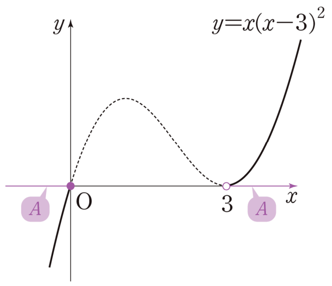
이러한 제한된 정의역에서의 역함수를 **부분역함수**라 하자. 위의 역함수를 $g(x)$라 하면

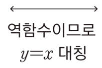
함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=x^2$의 집합 $\{x|x \geq 0\}$에서의 부분역함수

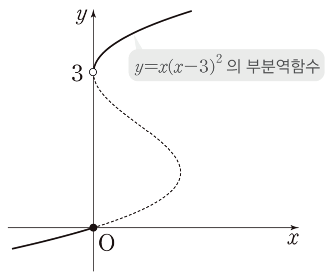
라 할 수 있다.

— Sample Case

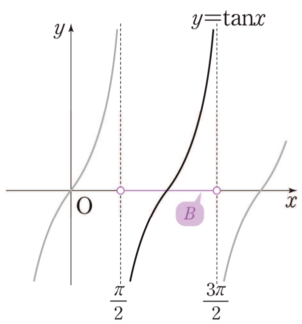
❶ 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=x(x-3)^2$ 은 역함수를 가지지 않는다.
그러나 집합 $A=\{x\,|\,x\le 0$ 또는 $x>3\}$에서 정의된 함수 $y=x(x-3)^2$ 은 역함수를 가진다.
이 역함수는 함수 $y=x(x-3)^2$ 의 집합 A에서의 부분역함수이다.

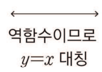


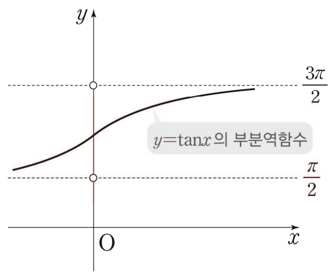




❷ 탄젠트함수 $y=\tan x$ 는 역함수를 가지지 않는다.
그러나 집합 $B=\left\{x \,\middle|\, \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $y=\tan x$ 는 역함수를 가진다.
이 역함수는 함수 $y=\tan x$ 의 집합 B에서의 부분역함수이다.







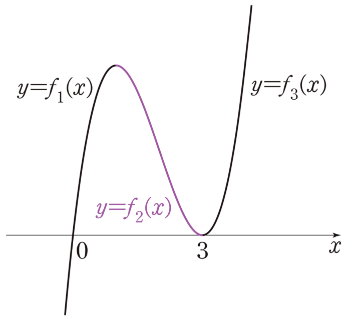
부분역함수의 핵심은, 역함수가 존재하지 않는 경우에도

강제로 역함수를 취해 식을 정리할 수 있다

는 데에 있다. 함수 $f(x)$가 역함수를 가지지 않는다면

$$f(g(x))=h(x) \quad \rightarrow \quad g(x)=f^{-1}(g(x))$$

와 같이 식을 전개하는 것에 무리가 있었는데, 「부분역함수」의 개념을 도입하면 식 정리를 부담 없이 할 수 있게 된다는 것이다.



예를 들어, 위 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x(x-3)^2$를 일대일대응이 되도록 쪼개고 각각 f_1, f_2, f_3이라 하면

$$f(g(x))=h(x) \quad \rightarrow \quad g(x)=f_n^{-1}(h(x)) \quad (n=1,\ 2,\ 3)$$

과 같이 식을 정리하는 것을 생각할 수 있다.

따라서 앞으로 $f(g(x))=x$, $f(g(x))=h(x)$와 같은 식을 만나면 함수 $f(x)$가 역함수를 가지는 것과 관계없이

$$f(g(x))=x \quad \rightarrow \quad g(x)=f^{-1}(x)$$
$$f(g(x))=h(x) \quad \rightarrow \quad g(x)=f^{-1}(h(x))$$

와 같이 양변에 f^{-1}를 취하여 식을 정리하고, **f^{-1}를 f의 부분역함수 중 하나**라고 생각하면 된다.

실제 문제로는 부분역함수에 연속성, 미분가능성 등의 조건을 줘서 상황을 확정하게 하는 식으로 출제된다. 다음 문제를 풀어 보자.

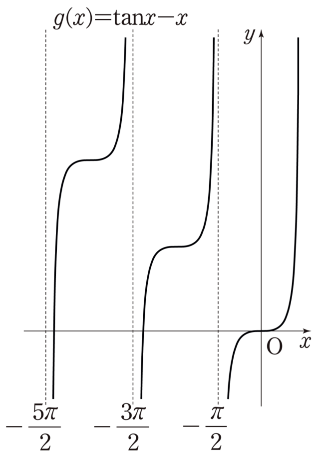
KEY01 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\tan f(x) = f(x) + x$$

를 만족시킨다. $f(\pi) = -\pi$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그리시오.

주어진 항등식의 우변의 $f(x)$ 를 좌변으로 이항하면 $\tan f(x) - f(x) = x$ 이다. 이때 $g(x) = \tan x - x$ 라 하면



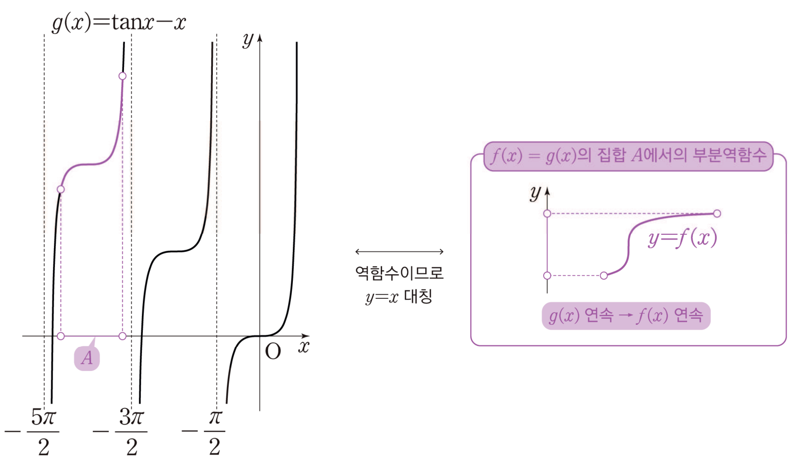
$$\tan f(x) - f(x) = x \quad \rightarrow \quad g(f(x)) = x \quad \rightarrow \quad f(x) = g^{-1}(x)$$

이므로 f 는 g 의 부분역함수 중 하나이다. 함수 $g(x) = \tan x - x$ 의 그래프를 그려 놓고 생각해 보자. 그래프의 특징을 나열해 보면 다음과 같다.

❶ 구간 $\cdots$, $\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cdots$ 에서 연속인 구간이 나뉘어져 있음

❷ 각 구간의 양 끝에서 $\pm\infty$ 로 발산

역함수의 그래프는 원래 함수의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이므로, 함수 $f(x)$ 가 연속이라는 것은 정의역을 제한시킬 때 함수 $g(x)$ 가 연속인 구간으로만 제한시켜야 함을 의미한다.

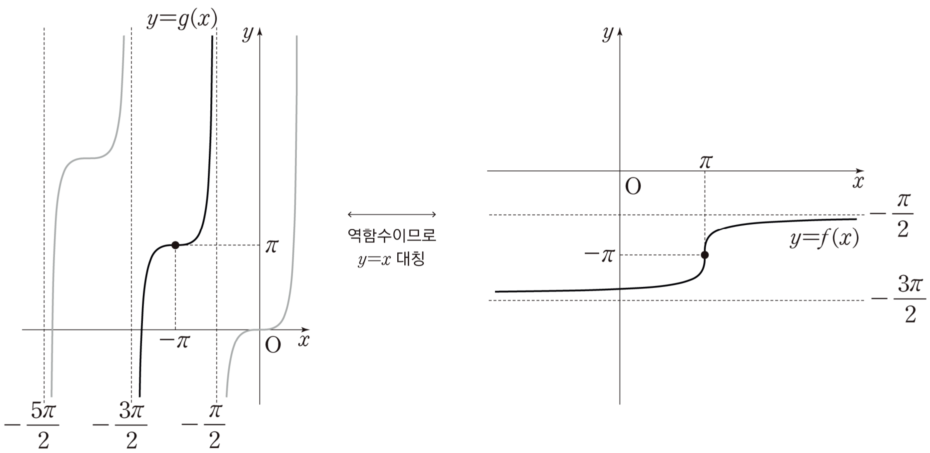


또한 함수 $f(x)$ 가 정의역이 실수 전체의 집합인데, 이는 함수 $f(x)$ 의 역함수, 즉 함수 $g(x)$ 의 정의역을 제한시켜서 만든 일대일대응의 치역이 실수 전체의 집합임을 의미한다. 즉, 함수 $f(x)$ 가 함수 $g(x)$ 의

$$\cdots,\ \left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \cdots$$

중 하나의 구간에서의 부분역함수임을 알 수 있다. 이제 함수 f 의 치역이 이 구간들 중 무엇인지 파악하면 된다.

이때 $f(\pi)=-\pi$ 이고 이는 구간 $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ 에 속하므로 함수 $f(x)$ 는 함수 $g(x)$ 의 구간 $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 부분역함수이다. 즉, 해당 구간에서의 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시키면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 얻을 수 있다.

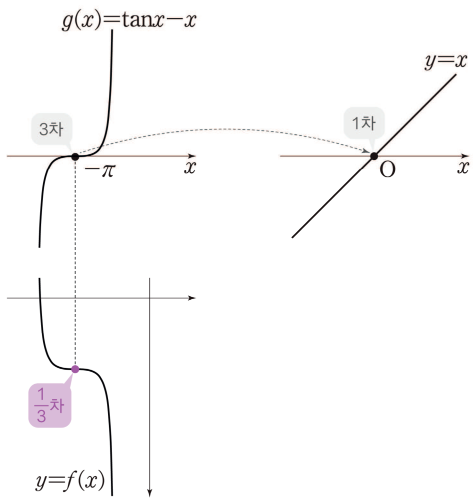


2. 부분역함수의 차수

2-1. 부분역함수와 차수논리

KEY01의 함수들의 관계를 다시 떠올려 보자.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는 함수 $g(x)=\tan x-x$의 구간 $\left(-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right)$에서의 부분역함수이며, 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=x$이므로 아래 그림과 같은 상황으로 이해할 수 있다.



특징적인 점에서의 '차수'도 표시해 보자. 함수 $g(x)=\tan x-x$의 차수는 3이고,[1] $y=x$의 차수는 1이다. 이때 **대응되는 점에서의 차수의 곱이 합성함수의 차수**이므로

함수 $g(x)$의 부분역함수인 $f(x)$의 차수는 $\frac{1}{3}$

임을 알 수 있다. 즉, 부분역함수나 역함수의 차수가 원래 차수의 '역수'와 같아진다고 이해할 수 있다.

각주

1) $\tan x-x$를 미분한 $\sec^2 x-1=\tan^2 x$이 2 차이므로 $\tan x-x$는 3 차라고 이해하면 된다.

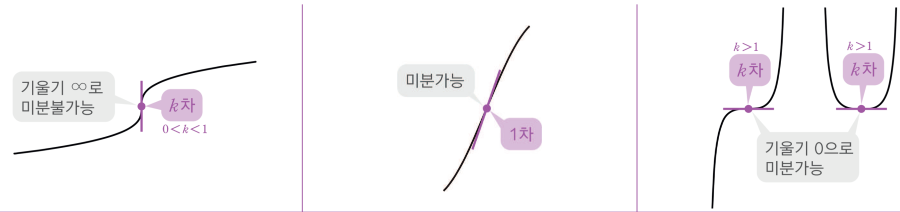
2-2. 차수와 미분가능성

부분역함수의 차수가 원래 함수의 차수의 역수이므로, 부분역함수로 차수논리를 잘 활용하기 위해서는 차수가 1보다 작아질 때에 어떤 성질을 가지는지 알아둘 필요가 있다. 많은 경우에 '미분가능한 함수'를 다루므로, 미분가능성과 관련된 성질을 배워 보자.

차수에 따른 미분가능성을 정리하면 다음과 같다.

실전 개념 **차수에 따른 미분가능성** 교과서 개념 실전 개념

차수가 $k\,(k>0)$인 점에서의 미분가능성은 다음과 같이 분류할 수 있다.



$0<k<1$일 때	$k=1$일 때	$k>1$일 때
기울기 ∞로 미분가능하지 않음	직선으로 미분가능	기울기 0으로 미분가능

다시 정리해보면 차수 k의 값의 따라

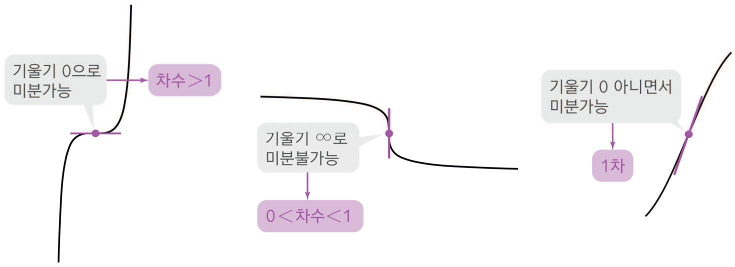
$0<k<1$이면 기울기 ∞로 미분가능하지 않음
$k=1$이면 직선으로 미분가능함
$k>1$이면 기울기 0으로 미분가능함

인 것이다. 따라서 문제에 '미분가능한 함수'가 나오면 그 즉시

이 함수의 차수는 반드시 1 이상이구나.

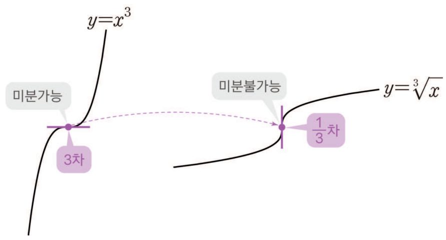
라고 생각할 수 있어야 한다. 이처럼 '차수'를 통해 함수를 이해하고 사고하는 습관을 들여 놓도록 하자.

거꾸로, 다음과 같이 미분가능하거나 기울기 ∞ 로 미분가능하지 않은 점을 만났을 때에는 그래프만 보고 차수의 범위를 판단할 수도 있다.

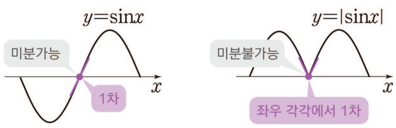


— Sample Case

❶ 함수 $y=x^3$ 의 $x=0$ 에서의 차수는 3 이고, 이때 미분가능하다.
그 역함수 $y=\sqrt[3]{x}$ 의 $x=0$ 에서의 차수는 $\frac{1}{3}$ 이고, 이때 미분가능하지 않다



❷ 함수 $y=\sin x$ 의 $x=0$ 에서의 차수는 1 이고, 이때 미분가능하다.
함수 $y=|\sin x|$ 의 $x\to 0+$ 에서의 차수와 $x\to 0-$ 에서의 차수는 둘 다 1 인데, 이때 미분가능하지 않다.



❸ 그래프를 보고도 차수를 판단할 수 있으면 된다.

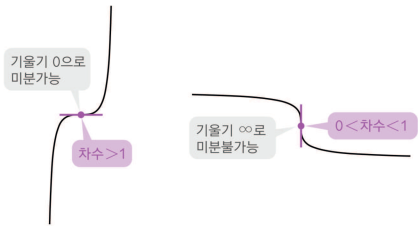


그림1 그림2

그림1 과 같이 기울기 0 으로 미분가능한 점은 차수가 1 보다 크고,
그림2 와 같이 기울기 ∞ 로 미분가능하지 않은 점은 차수가 1 보다 작다.

이제 지금까지 공부한 내용을 바탕으로 최근 기출 문항 몇 개를 다시 풀어 보자.

KEY02 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2025·미적 27번 |

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

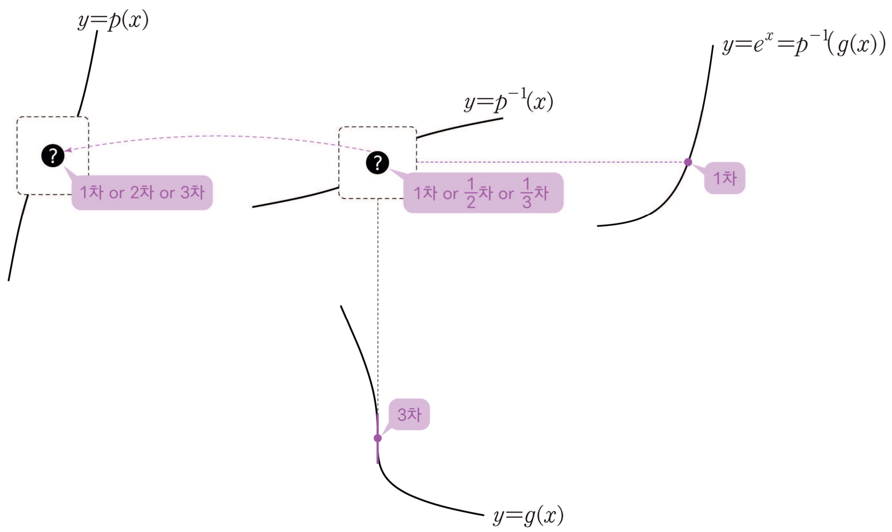
이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선이 x 축이고 함수 $g(x)$ 가 역함수 $h(x)$ 를 가질 때, $h'(8)$ 의 값은? [3점]

| 한완기 평수능 미적분 E6·10 |

역함수의 차수의 관점에서 접근해 보자. $p(x)=f(x)+x$ 라 하면 주어진 식을

$$g(x)=h(e^x) \quad \rightarrow \quad p^{-1}(g(x))=e^x$$

라고 쓸 수 있다. $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 x 축과 교차하며 접하므로 3 차이고,[1] e^x 는 모든 점에서 1 차이다. 이제 대응되는 점에서의 차수를 추적하자.



그림과 같이 $(0, g(0))$ 에 대응되는 곡선 $y=p^{-1}(x)$ 위의 점에서의 차수를 비교하면

$$(p^{-1}\text{ 의 차수})\times(g\text{ 의 차수}) = (e^x\text{ 의 차수}) = 1$$

을 만족시킬 수 있는 경우가 $3\times\frac{1}{3}=1$ 밖에 없으므로, $p(x)$ 가 $x=e^0=1$ 에서 3 차임을 알 수 있다. 따라서 $p(x)=f(x)+x=(x-1)^3$ 이다.

각주

1) 기하적 상황만 해석하면 '1 보다 큰 홀수차'인 것만 알 수 있다. 그러나 $g(x)$ 가 삼차함수(최대 3 차)와 e^x(항상 1 차)를 합성한 것이므로 가능한 차수가 3 밖에 없다.

KEY03 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2026.9·미적 28번 |

삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

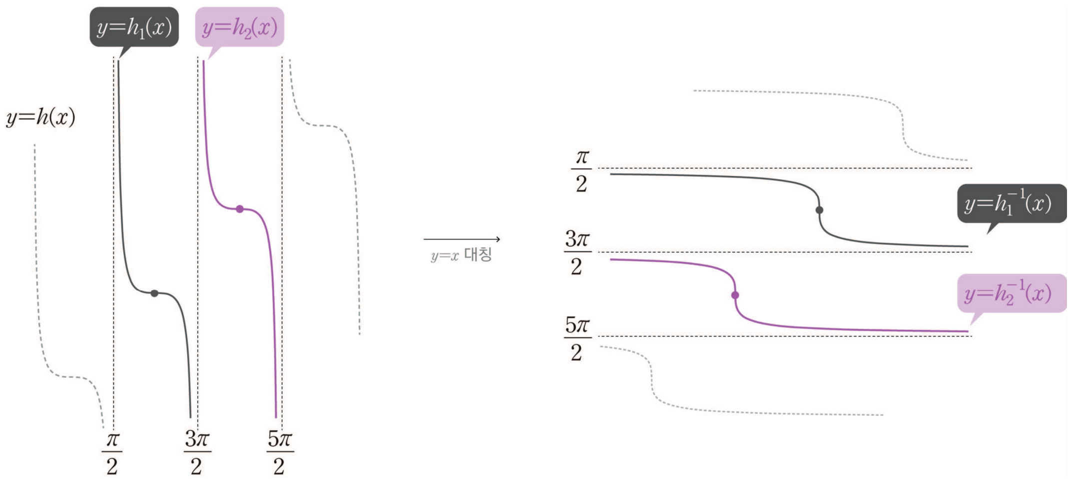
$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times\left(g(0)\right)^2$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$

(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

주어진 식은 함수 $h(x)=x-\tan x$ 에 대하여 $f(x)=h(g(x))$ 라고 쓸 수 있다.

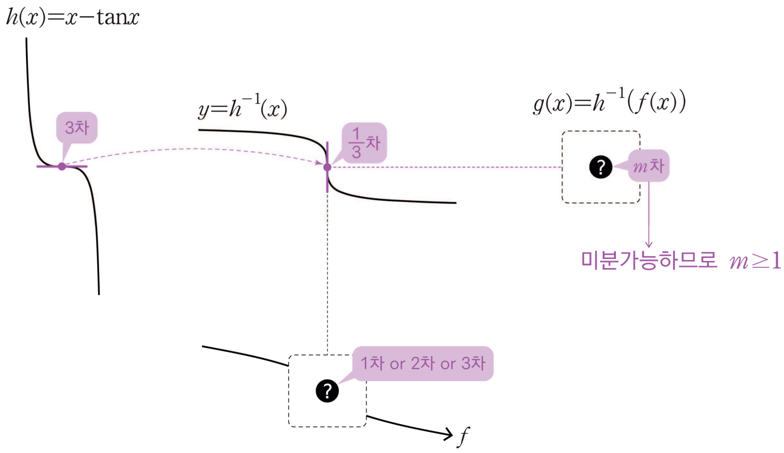


그림과 같이 $y=h(x)$ 의 그래프를 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 부분역함수 h^{-1} 를 하나 선택하여 이용할 것인데, $g(x)$ 의 연속성을 고려하면 한 구간에서의 곡선만 선택해야 함을 알 수 있다. 특히 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$ 을 만족시키려면 $x=\frac{3\pi}{2}$ 를 점근선으로 갖는 h_1, h_2 뿐이다.

h_1, h_2 중 하나를 선택했다고 가정하고, 선택한 h^{-1} 을 이용해 주어진 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$f(x)=h(g(x)) \quad \to \quad g(x)=h^{-1}(f(x))$$

이제 $g(x)$ 의 미분가능성을 이용하자. **미분가능하다는 것은 차수가 1 이상**이라는 것이다.



위의 그림과 같이 대응 관계를 생각하면 $g(x)$가 미분가능한 것은 f가 3차인 경우뿐이다. 삼차함수의 그래프에 3차인 점이 나타난다는 것은 $f(x)=a(x-\alpha)^3+b$ 꼴이라는 것이다.

이때 (가)조건의 $f''(\pi)=0$로부터 $\alpha=\pi$임을 알 수 있고, 남은 조건으로 h^{-1}가 어느 구역에서의 부분역함수인지만 결정하면 된다. $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 변곡점의 y좌표가 π 또는 2π이므로

h_1인 경우: $f(x)=a(x-\pi)^3+\pi$　　　　h_2인 경우: $f(x)=a(x-\pi)^3+2\pi$

이고, $f(0)=0$을 통해 a의 값을 구한 뒤 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{3\pi}{2}$임을 확인하면 가능한 것은 h_2인 경우의 $f(x)=\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+2\pi$뿐임을 알 수 있다.

3. 부분역함수의 활용

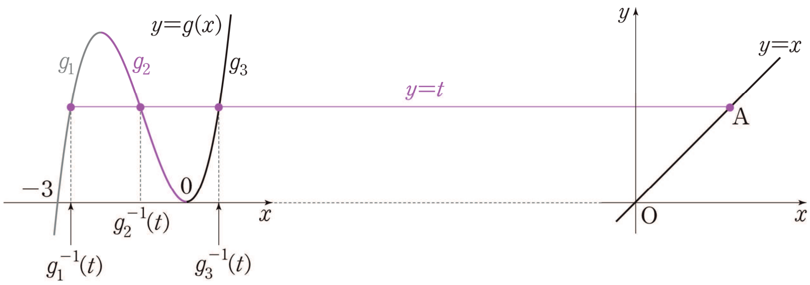
3-1. 그래프에서 부분역함수의 표시

여기부터는 차수논리와는 관계없이 부분역함수를 활용하는 연습을 해 보자.

$$\left(f(x)\right)^3+3\left(f(x)\right)^2=x$$

라는 식이 주어지면 다음과 같이 읽을 수 있다.

$g(x)=x^3+3x^2$ 의 그래프와 상수함수 $y=t$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표들 중 하나가 $f(t)$

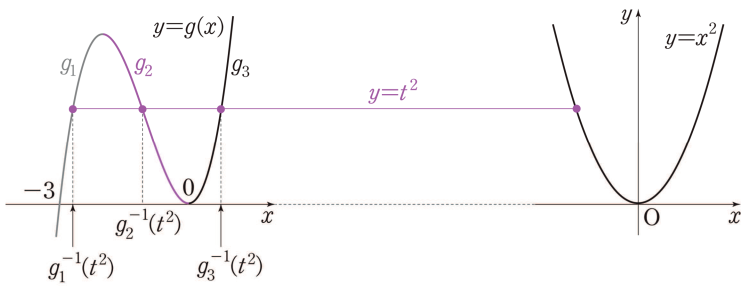


부분역함수를 제대로 공부했다면 $g(x)$를 증가·감소 구간마다 각각 g_1, g_2, g_3로 정의하고,

$$g(f(x))=x \quad \rightarrow \quad f(x)=g_1^{-1}(x) \text{ 또는 } g_2^{-1}(x) \text{ 또는 } g_3^{-1}(x)$$

과 같이 $f(x)$를 직접 써낼 수 있을 것이다. 이처럼 $\left(f(x)\right)^3+3\left(f(x)\right)^2=x$와 같은 식이 출제되면 부분역함수를 이용하여 식을 직접 써내는 풀이의 좋은 관점이 될 수 있다.

$\left(f(x)\right)^3+3\left(f(x)\right)^2=x^2$으로 주어져도 마찬가지로



$$g(f(x))=x^2 \quad \rightarrow \quad f(x)=g_1^{-1}(x^2) \text{ 또는 } g_2^{-1}(x^2) \text{ 또는 } g_3^{-1}(x^2)$$

와 같이 나타내면 문항의 구조를 편하게 분석할 수 있을 것이다. 기출문제에 적용해 보자.

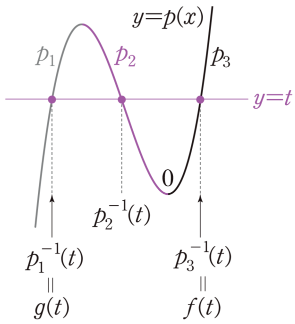
KEY04 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2016·B 21번 |

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은? [4점]

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

| 한완기 평수능 미적분 E4·18 |

$p(x)=x^3+2x^2-15x+5$라 하면 $p(f(t))=t,\ p(g(t))=t$이므로 $f(t)=p_1^{-1}(t),\ g(t)=p_3^{-1}(t)$이다.



$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$을 구해야 한다. 이때 방정식 $p(x)=5$를 풀면 $f(5)=3,\ g(5)=-5$이고, 역함수의 미분법에 의하여

$y=f(x)=p_3^{-1}(x)$ 위의 점 $(5,3)$에서의 기울기는 $y=p(x)$에서 $(3,5)$에서의 기울기의 역수

$y=g(x)=p_1^{-1}(x)$ 위의 점 $(5,-5)$에서의 기울기는 $y=p(x)$에서 $(-5,5)$에서의 기울기의 역수

이다. $p'(x)=3x^2+4x-15$에서 $p'(3)=24,\ p'(-5)=40$이므로 각각 역수를 취하면 바로 $f'(5)=\frac{1}{24},\ g'(5)=\frac{1}{40}$을 얻는다.

$$\therefore\ h'(5)\ =\ f(5)-g(5)+5\{f'(5)-g'(5)\}\ =\ 3-(-5)+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)\ =\ \frac{97}{12}$$

KEY05 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2016·B 21번 변형 |

$-1<t<3$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$ 와 직선 $y=t^3+t+3$ 이 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t^3+t+3)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t^3+t+3)$ 이라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$ 라 할 때, $30h'(1)$ 의 값을 구하시오.

| 한완기 평수능 미적분 E4·18 |

위와 같이 우변이 다른 함수로 주어지더라도 보자마자

$$f(t)=p_3^{-1}(t^3+t+3),\quad g(t)=p_1^{-1}(t^3+t+3)$$

으로 나타내면 된다. 합성함수·역함수 미분법으로 각각의 값을 구하면 된다. $f'(5)$, $g'(5)$ 를 구할 때 두 함수 $p_n^{-1}(x)$, x^3+x+3 의 합성이므로 각각에서의 미분계수를 구하여 두 기울기의 곱으로 미분계수를 구할 수 있다. 정답은 242 이니 스스로 풀어보자.

풀면서 머릿속에 삼차함수 $p(x)$ 와 상수함수 $y=t^3+t+3$ 의 그래프가 그려졌으면 훌륭하다.

3-2. 식만 있을 때, 정리하여 부분역함수 강제로 활용하기

문제를 풀다가

$$(f(x))^3=x+e^{f(x)}$$

와 같은 식을 만났다고 하자. 좌변에 $f(x)$ 를 몰아서 우변에 x 만 남기면 $(f(x))^3-e^{f(x)}=x$ 이다. 그러면 $g(x)=x^3-e^x$ 라 하면 $g(f(x))=x$ 이므로 $f(x)=g^{-1}(x)$ 를 구할 수 있다. 문제에서 $f(x)$ 에 대한 미분이든 적분이든 무엇이 출제되든 '역함수 문제'로 생각하고 접근하여 풀 수도 있다.

마찬가지로

$$(f(x))^3=x^2\ln x+e^{f(x)}$$

를 만났다고 하더라도, 동일하게 식을 정리하면 $f(x)=g^{-1}(x^2\ln x)$ 를 구할 수 있다.

이처럼 식 변형을 잘 거치면 부분역함수를 활용할 수도 있음을 명심하자.

KEY06 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2018·가 21번 변형 |

양수 t에 대하여 점 $(1, 0)$을 지나고 곡선 $y=-t+\ln x$와 접하는 직선의 기울기를 $h(t)$라 하자.

함수 $h(t)$가 미분가능하고 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킬 때, $h'(a)$의 값은? [4점]

| 한완기 평수능 미적분 H·47 |

$(1, 0)$을 지나고 기울기가 $h(t)$인 직선의 방정식은 $y=h(t)(x-1)$이다. 접점의 x좌표를 s라 하고 함숫값, 미분계수가 각각 같음을 이용하면 다음을 얻는다.

$$-t+\ln s=h(t)(s-1),\quad h(t)=\frac{1}{s}\quad \to\quad -t-\ln h(t)=h(t)\times\left(\frac{1}{h(t)}-1\right)$$

$$\to\quad t+\ln h(t)=h(t)-1$$

이때 양변을 미분하여 합성함수의 미분법으로 풀어도 좋지만, 다음처럼 정리하면 눈에 익은 형태로 바꿀 수 있다.

$$h(t)-\ln h(t)-1=t$$

한 변에 $h(t)$로 표현할 수 있는 함수를 전부 모아 합성함수로 해석할 수 있게 변형하는 것이 핵심이다.

이 식의 좌변은 함수 $p(x)=x-\ln x-1$과 $h(t)$의 합성으로 해석할 수 있다. 이제 $p(x)$의 증감과 상관없이 양변에 부분역함수 p^{-1}을 연산하면 $h(t)=p^{-1}(t)$이므로 $h'(a)$의 값을 역함수의 미분법을 활용하여 구할 수 있게 된다.

$h(a)=\dfrac{1}{e+2}$임이 주어져 있으므로 $y=p(t)$의 $x=\dfrac{1}{e+2}$에서의 기울기를 구하면

$$p'(t)=1-\ln t\quad \to\quad p'\left(\frac{1}{e+2}\right)=-(e+1)$$

이고, $y=p^{-1}(t)$의 $x=a$에서의 접선의 기울기는 그 역수인 $-\dfrac{1}{e+1}$이다.

KEY04·06 모두 합성함수의 미분법으로도 풀 수 있지만, 부분역함수를 이용해 역함수의 미분법으로도 풀 수 있다. 유사성을 생각하며 공부하자. $h(t)-\ln h(t)=t+1$에서 $p(x)=x-\ln x$라 한 후 $h(t)=p^{-1}(t+1)$로 풀어도 상관없다. 우변이 꼭 t로 정리되지 않더라도 겁먹을 필요가 없다.

풀이를 보면 알 수 있듯, 부분역함수를 활용한다고 해서 풀이의 길이가 드라마틱하게 단축이 되는 것은 아니다. 그러나 관점을 하나 더 갖고 있는 것은 풀이의 유연성을 높인다는 측면에서 도움이 되므로 그러한 목적을 가지고 학습을 이어나가도록 하자.

KEY07 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2025.6·미적 28번 |

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\ge a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

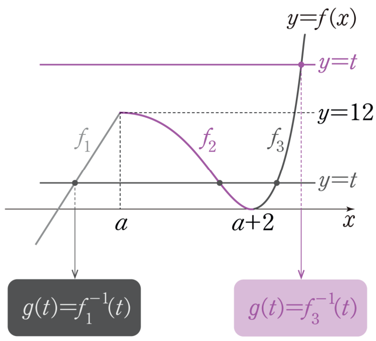
일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

| 한완기 평수능 미적분 E8·16 |

이제는 $f(x)=t$를 보자마자 부분역함수가 떠올라야 한다. 부분역함수의 후보 중 최소인 것을 $g(t)$라고 했고 $t=12$에서만 불연속이라고 했으므로 다음과 같은 상황이다.



$$\rightarrow \quad g(t)=\begin{cases}f_3^{-1}(t) & (t>12)\\ f_1^{-1}(t) & (t\le 12)\end{cases}$$

즉, $f(a)=12$이다. 구해야하는 값은 $g'(f(a+2))$, $g'(a+6)$인데, $g'(f(a+2))$는 직선 $y=f_1(x)$의 기울기의 역수, $g'(f(a+6))$은 $f_3(x)$의 $x=a+6$에서의 기울기의 역수이다.

$f(a)=12$를 계산하면 $a=\ln 3$이고, 따라서 직선 $y=f_1(x)$의 기울기는 9, $g'(f(a+2))=\dfrac{1}{9}$이다. 또한 a의 값을 이용하면 $f_3'(a+6)=\dfrac{1}{72e^6}$이다.

$$\therefore\ \frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}=8e^6$$

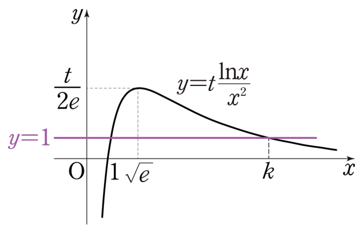
KEY08 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2022.6·미적 29번 |

$t > 2e$ 인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

| 한완기 평수능 미적분 E8·18 |

문제에선 k라고 줬지만 k도 t에 대한 함수라는 것을 인지하고 푸는 것이 중요하다.

$$f'(x) \;=\; 2t\frac{\ln x}{x}-2x \;=\; 2x\left(t\frac{\ln x}{x^2}-1\right) \;\; (x>0)$$



함수 $f(x)$는 $x=k(k>\sqrt{e})$에서 극대를 가짐을 알 수 있다.

즉, $k=g(t)$이므로 $t\frac{\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}=1 \;\to\; t=\frac{\{g(t)\}^2}{\ln g(t)}$ $(g(t)>\sqrt{e})$이다.

따라서 $g(x)$는 $h(x)=\frac{x^2}{\ln x}(x>\sqrt{e})$의 역함수이다. 이제 역함수의 미분법을 활용하여 답을 내면 된다.

다른 방법으로도 풀어보자. 처음에 식을 정리할 때

$$f'(x)=2tx\left(\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{t}\right) \;\; (x>0)$$

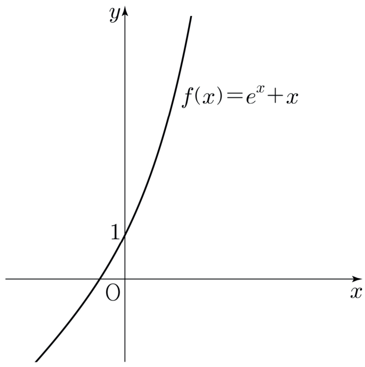
을 얻었다면 $\frac{\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}=\frac{1}{t}$ 이므로 $h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$로 잡으면

$$h(g(t))=\frac{1}{t} \quad\to\quad g(t)=h^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

으로 두고 문제를 풀 수도 있다. 우변을 꼭 t로 정리할 필요가 없다는 것이 이 풀이의 교훈이다.

KEY09 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2023.9·미적 29번 |

함수 $f(x)=e^x+x$ 가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



| 한완기 평수능 미적분 E6·16 |

문제에 주어진 s도 t에 대한 함수이므로 $s(t)$로 두고 풀이를 시작하자. 그래야 헷갈리지 않는다. 두 점 $(t, 0)$과 $(s, f(s))$를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$의 $(s, f(s))$에서의 접선과 수직이므로

$$\frac{f(s(t))}{s(t)-t}=-1 \quad \rightarrow \quad \left(e^{s(t)}+s(t)\right)\left(e^{s(t)}+1\right)=t-s(t) \quad \rightarrow \quad \left(e^{s(t)}+s(t)\right)\left(e^{s(t)}+1\right)+s(t)=t$$

이다. 즉, $s(t)$를 $p(t)=\left(e^t+t\right)\left(e^t+1\right)+t$의 역함수로 해석하여 문제를 풀면 된다. $g(t)=f(s(t))=e^{s(t)}+s(t)$이고, 역함수의 미분법에 의해

$h'(1)$ = (곡선 $y=g(t)$의 y좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기의 역수) ⋯ ①

주어진 그래프를 보면 $g(t)=f(s(t))=1$인 순간은 $s(t)=0$임을 쉽게 알 수 있다. $s(t)=0$인 순간일 때 $f(x)$의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$이다. 이제 $s(t)=0$인 순간일 때 $s(t)$의 접선의 기울기를 구해보자.

$s(t)$는 $p(t)=\left(e^t+t\right)\left(e^t+1\right)+t$의 역함수이므로 $p(t)$에서 $t=0$인 점에서의 기울기를 구해서 역수를 취하면 된다. $p'(t)=\left(e^t+1\right)^2+e^t\left(e^t+t\right)+1$에서 $p'(0)=6$이므로 구하는 $s(t)=0$인 순간일 때 $s(t)$의 접선의 기울기는 $\frac{1}{6}$이다. 따라서 '$y=g(t)$의 y좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기'는 $f'(0)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$이다.

∴ $h'(1)$ = (곡선 $y=g(t)$의 y좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기의 역수) = 3

역함수가 여러 번 나와 정석적인 해법보다 많이 돌아가는 복잡한 풀이이지만 역함수를 이용하는 연습을 위해 제시하였다. 이 정도를 헷갈리지 않고 제대로 부분역함수를 적용한다면 이 특강을 제대로 공부한 것이다.

KEY10 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2020.6·가 30번 |

상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

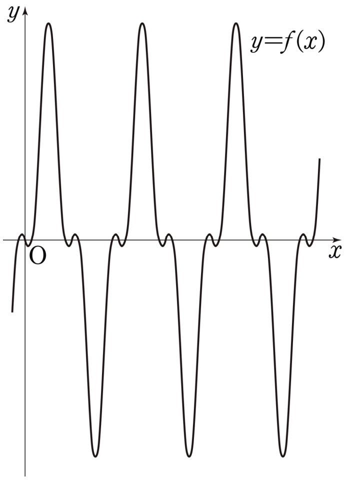
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 $t\ (1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오.

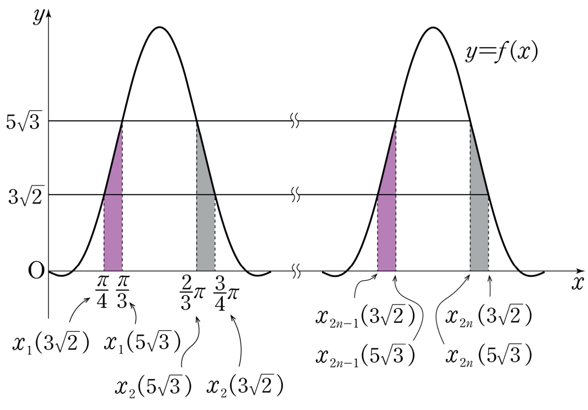
(단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



| 한완기 평수능 미적분 Ⅰ·01 |

x_n도 t에 대한 함수이므로 $x_n(t)$라 두고 문제를 풀자. 그런데, $y=t$와의 교점의 x좌표이므로 보자마자 $x_n(t)=f_n^{-1}(t)$라고 쓸 수 있다. 즉, $\displaystyle\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'\left(f_n^{-1}(t)\right)}dt$에서 $t=f(s)$로 치환하여 적분하자.

$$\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'\left(f_n^{-1}(t)\right)}dt = \int_{f_n^{-1}(3\sqrt{2})}^{f_n^{-1}(5\sqrt{3})}\frac{f(s)}{f'(s)}f'(s)ds = \int_{f_n^{-1}(3\sqrt{2})}^{f_n^{-1}(5\sqrt{3})}f(s)\,ds$$



그림에서 $c_{\text{홀수}}$, $c_{\text{짝수}}$는 서로 부호만 반대임을 알 수 있고, 따라서

$$\sum_{n=1}^{101}c_n = c_1+(-c_1)+c_1+(-c_1)+\cdots+(-c_1)+c_1 = c_1$$

$$\therefore\ c_1 = \int_{f_1^{-1}(3\sqrt{2})}^{f_1^{-1}(5\sqrt{3})}f(s)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(s)\,ds = \frac{17\sqrt{2}-19}{3} \rightarrow q-p = \frac{17}{3}-\left(-\frac{19}{3}\right) = 12$$