[2609(미적)28]

실 전 특 강

03

「$f(g(x))=h(x)$ 의 x 좌표 해석」

수학에서 좋은 결과를 얻고자 한다면,

누구든 반드시 수많은 절망을 먼저 견뎌내야 한다.

— 존 밀너(1931-), 미국 수학자

0. MOTIVATION

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 와 모든 실수 x 에 대하여 항등식

$$f(g(x))=h(x)$$

가 성립한다는 식으로 조건이 주어지는 문항을 지금까지 매우 많이 봐왔을 것이다. 평가원에서 출제된 적 있는 항등식과 출처를 몇 가지 정리하면 다음과 같다.

출처	항등식
2609(미적)28	$f(x)=g(x)-\tan g(x)$
2606(미적)28	$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$
25수능(미적)27	$g(x)=f(e^x)+e^x$
2406(미적)28	$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$
23수능(공통)22	$f(x)=f(1)+(x-1)f'\left(g(x)\right)$
2209(미적)29	$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$
19수능(가)30	$g(x)=\dfrac{1}{2+\sin\left(f(x)\right)}$

각각의 경우의 식의 구조가 보이는가? 간단히 [2609(미적)28]과 [2406(미적)28]만 그 구조를 파악해 보면 다음과 같다.

[2609(미적)28] $f(x)=h(g(x))$ $h(x)=x-\tan x$

[2406(미적)28] $h(x)=g(f(x))$ $h(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$ $g(x)=x^2+2x$

위 표의 다른 항등식들도 구조를 스스로 파악해보고 넘어가자. 이렇게 $f(g(x))=h(x)$의 꼴의 항등식이 조건으로 주어지는 상황을 많이 경험했다면, 아래와 같은 생각을 할 수도 있다.

> $f(g(x))=h(x)$를 해석하는 방법을 학습해두면, 이런 문제를 접근할 때 수월할 것 같은데...

합성함수 항등식을 해석하는 방법은 매우 다양하다. 이번 특강 ❸ $f(g(x))=h(x)$ 의 x 좌표 해석에서는 그 중에서도 속함수 $g(x)$ 의 움직임을 시각적으로 해석하는 접근에 대해서 다룰 것이다.

이를 위하여 먼저 가장 간단한 경우인 $h(x)=x$ 인 경우, 즉

$$f(g(x))=x$$

에서의 속함수 $g(x)$ 의 움직임을 해석한 후, 일반적인 경우인

$$f(g(x))=h(x)$$

를 다루는 식으로 논리를 확장해나갈 것이다. 이 흐름을 잘 기억하고 뒤 내용을 읽도록 하자.

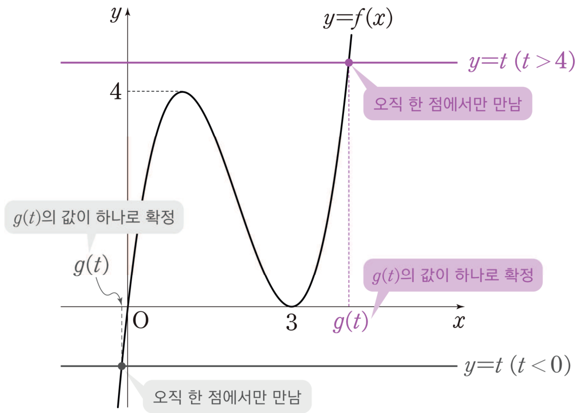
1. x좌표 해석

1-1. $f(g(x))=x$의 x좌표 해석

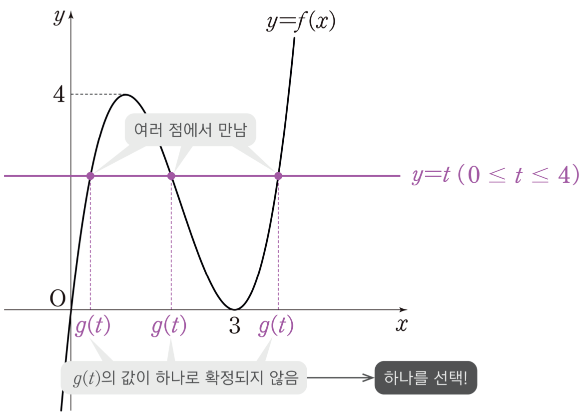
항등식 $f(g(x))=x$의 **x좌표 해석**의 핵심은 실수 t에 대하여

$$f(g(t))=t \quad \rightarrow \quad \text{곡선 } y=f(x)\text{와 상수함수 } y=t\text{의 그래프가 만나는 점의 } x\text{좌표가 } g(t)$$

로 보는 것이다. 예시로 항등식 $g(x)\left(g(x)-3\right)^2=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$의 움직임을 살펴보자. 함수 $f(x)=x(x-3)^2$에 대하여 좌변을 $f(g(x))$로 볼 수 있다. 즉, 곡선 $y=x(x-3)^2$과 상수함수 $y=t$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 살피면 된다.



먼저 $t<0$ 또는 $t>4$인 경우, 곡선 $y=f(x)$와 상수함수 $y=t$의 그래프가 오직 한 점에서만 만나므로 $g(t)$의 값이 하나로 확정된다.



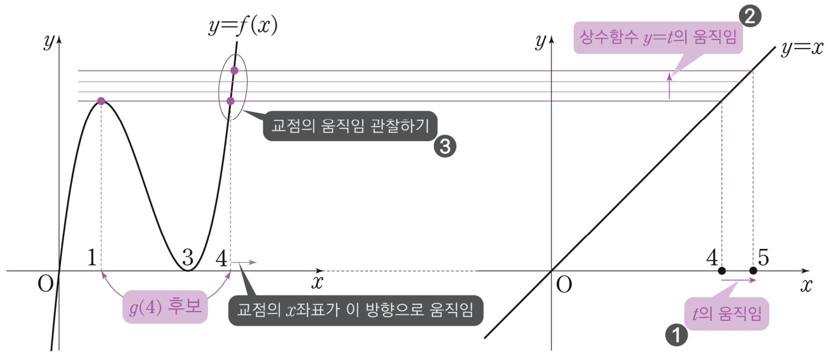
반면 $0\le t\le 4$인 경우, 곡선 $y=f(x)$와 상수함수 $y=t$의 그래프가 여러 점에서 만나므로 $g(t)$의 값이 하나로 확정되지 않는다. 함수 $g(t)$가 하나의 t에 대하여 여러 함숫값을 가질 수는 없으므로 가능한 값들 중 하나를 선택하여 함수 $g(t)$를 구성하면 된다.

즉, 항등식 $f(g(x))=x$ 의 x 좌표 해석은

겉함수 f를 알 때, 속함수 g의 움직임을 눈으로 관찰하는 법

인 것이다. 따라서 문제에 겉함수가 주어지고 속함수에 대한 정보를 묻는 상황을 만났을 때 떠올려서 활용하면 된다.

다시 앞 페이지의 상황으로 돌아가자. 이제 $y=t$ 의 움직임을 더 직관적으로 살피기 위해 우변의 함수인 $y=x$ 의 그래프를 추가적으로 그린 후 t 의 값을 4 에서 5 까지 변화시키며 생각해 보자.



위 그림을 다음의 순서에 따라 눈을 이동하며 동영상을 상상해 보자.

❶ t 의 값이 오른쪽 그래프의 x 축 위의 4 에서 5 까지 화살표를 따라 움직인다.
❷ 그에 따라 상수함수 $y=t$ 가 $y=4$ 에서 $y=5$ 까지 이동한다.
❸ $y=t$ 와 $y=f(x)$ 의 교점을 생각하면 $y=4$ 일 때는 교점이 2 개 존재한다. 즉, $g(4)$ 로 가능한 값은 2 개이다. 하지만 그 이후 $y=4$ 부터 $y=5$ 까지 전부 교점이 1 개만 생기므로 $g(t)$ 로 가능한 값은 1 개이다.

즉, 교점의 x 좌표의 움직임을 관찰하면 4 에서 점점 증가함을 알 수 있고,
그것이 곧 함수 $g(t)$ 의 움직임이다. 따라서 $4<t<5$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 4 에서 점점 증가한다.

❸을 자세히 읽어본 후 위의 상황에서

함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[4,\ 5]$ 에서 연속이다.

라는 조건이 주어졌다고 생각해 보자. 그러면 $g(4)=1$ 이면 연속일 수 없으므로 $g(4)=4$ 임이 확정됨을 알 수 있다. t 의 값이 4 에서 5 로 변할 때, $g(t)$ 의 값인 교점의 x 좌표는 4 에서 오른쪽으로 움직이고 있으므로 $g(4)=4$ 여야 함수 $g(x)$ 가 $x=4$ 에서 연속이다.

이처럼 x 좌표 해석은 $f(g(x))=x$ 이 주어졌을 때 곡선 $y=f(x)$ 와 상수함수 $y=t$ 의 그래프를 그린 후 $y=t$ 가 움직이는 동영상을 상상하며 $g(t)$ 의 움직임을 눈으로 관찰하는 것이 핵심인 접근이다.

1-2. $f(g(x))=h(x)$ 의 x 좌표 해석

항등식 $f(g(x))=h(x)$ 의 **x 좌표 해석** 역시 실수 t 에 대하여

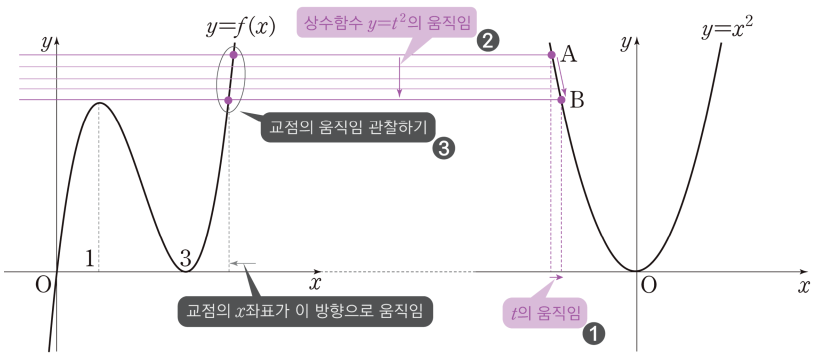
$f(g(t))=h(t)$ → 곡선 $y=f(x)$ 와 상수함수 $y=h(t)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 $g(t)$

로 보면 된다. 우변을 **상수함수**로 생각하는 것이 핵심이다. 예를 들어, $t=1$ 일 때에는 곡선 $y=f(x)$ 와 상수함수 $y=h(1)$ 의 그래프가 만나는 점을 살피면 된다.

예시로 항등식 $g(x)\left(g(x)-3\right)^2=x^2$ 을 만족시키는 함수 $g(x)$ 의 움직임을 보자.

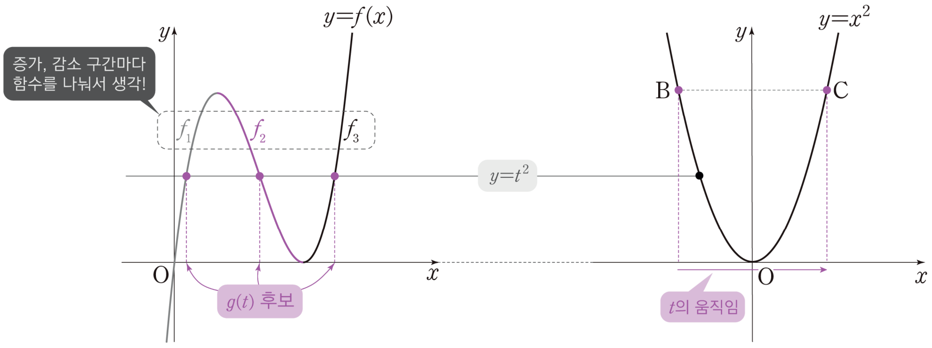
$g(x)\left(g(x)-3\right)^2=x^2$
→ 함수 $f(x)=x(x-3)^2$ 의 그래프와 상수함수 $y=t^2$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 $g(t)$

라고 해석하여 두 함수 $f(x)=x(x-3)^2$, $y=x^2$ 의 그래프를 좌·우에 각각 그려놓고 t 의 값에 따라 이동하는 상수함수 $y=t^2$ 의 그래프를 보면 된다. 역시 동영상으로 상상하는 것이 중요하다.

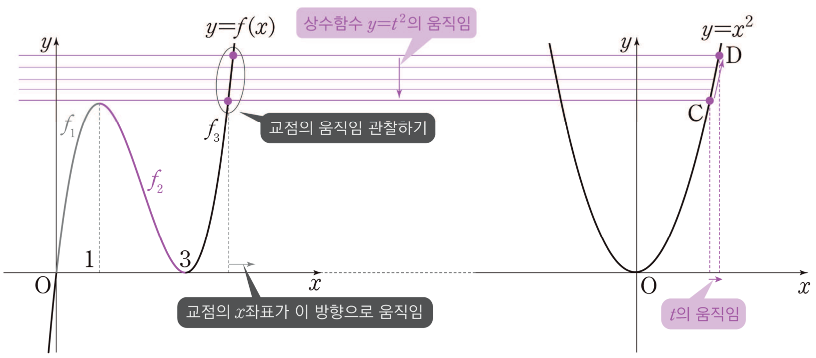


위 그림을 다음의 순서에 따라 눈을 이동하며 머릿속에 동영상을 상상해 보자.

❶ 오른쪽 그래프에서 't 의 움직임'을 보자. 이는 함수 $y=x^2$ 위의 점 A 에서 점 B 로의 움직임과 대응된다.
❷ 상수함수 $y=t^2$ 의 그래프가 점 A 에서 점 B 까지 움직인다.
❸ 곡선 $y=f(x)$ 와 상수함수 $y=t^2$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표의 움직임을 관찰하자.
t 의 값이 증가함에 따라 x 좌표는 감소함을 알 수 있고, 그것이 곧 $g(t)$ 라는 함수의 움직임이다.
즉, 해당구간에서 함수 $g(t)$ 는 감소한다.



위 그림과 같이 $\mathrm{B}\to\mathrm{O}$, $\mathrm{O}\to\mathrm{C}$ 에서는 상수함수 $y=t^2$ 의 그래프와 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점이 여러 개인 경우가 있다. 이럴 때에는 위 그림의 f_1, f_2, f_3 중 어느 함수에 의해 $g(t)$ 의 값이 결정될지 선택하면 된다. 이처럼 만나는 점이 여러 개 있을 때는 함수를 **증가, 감소 구간마다 나눠서** 생각하도록 하자.



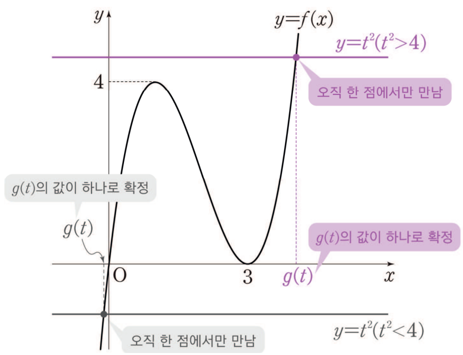
$\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ 에서는 위 그림과 같이 f_3에 의해서만 $g(t)$ 의 값이 결정되는 것을 쉽게 알 수 있다.

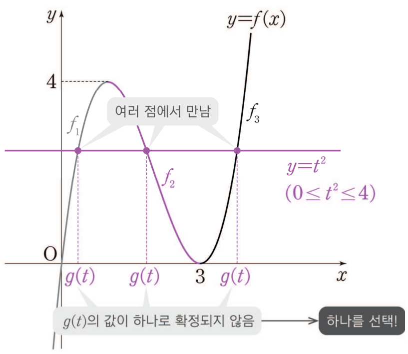
SUMMARY

① $t^2<0$, $t^2>4$ 인 경우에는 $g(t)$ 의 값이 하나로 확정

② $0\le t^2\le 4$ 인 경우에는 $g(t)$ 의 값이 여러 개가 가능 $\rightarrow$ 하나를 선택

(f를 구간별로 나눈 세 함수 f_1, f_2, f_3 중 어떤 함수에 의하여 결정되는지 문제마다 판단)





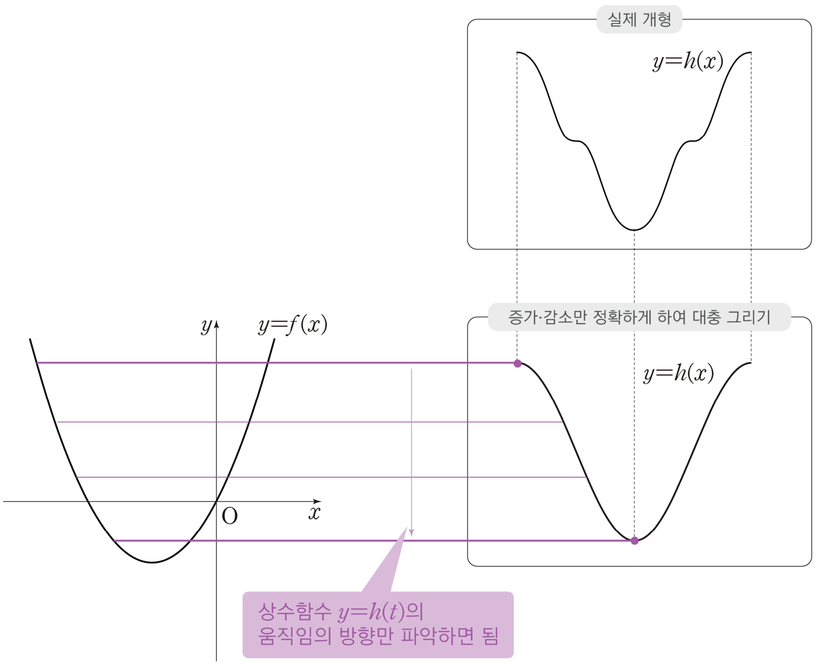
즉, 항등식 $f(g(x))=h(x)$ 의 x 좌표 해석도 $f(g(x))=x$ 의 x 좌표 해석과 마찬가지로

겉함수 f를 알 때, 속함수 g의 움직임을 눈으로 관찰하는 법

인 것이다.

$f(g(x))=x$ → 곡선 $y=f(x)$ 와 상수함수 $y=t$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 $g(t)$
$f(g(x))=h(x)$ → 곡선 $y=f(x)$ 와 상수함수 $y=h(t)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 $g(t)$

항등식 $f(g(x))=h(x)$ 의 해석에서 곡선 $y=h(x)$ 를 오른쪽에 그릴 때, 정확한 개형을 그릴 필요 없이 **'증가·감소' 만 판단하여 그리면 된다**는 사실을 알아두자. 상수함수의 움직임의 방향만 확실하게 파악하면 충분하기 때문이다.



KEY01 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

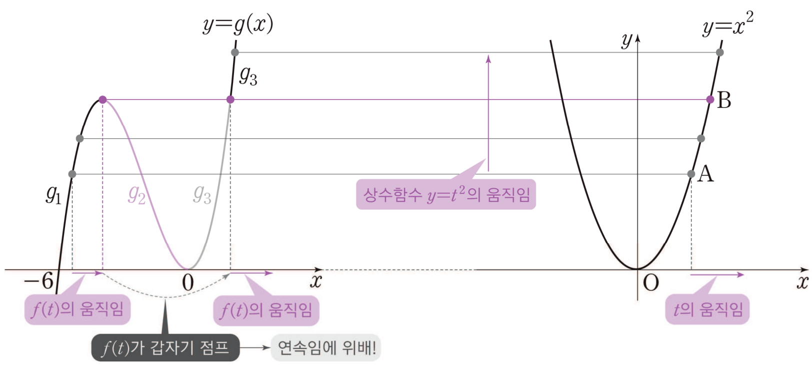
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(\sqrt{7})$ 의 값은?

> 모든 실수 x 에 대하여 $\left(f(x)\right)^3+6\left(f(x)\right)^2=x^2$ 이다.

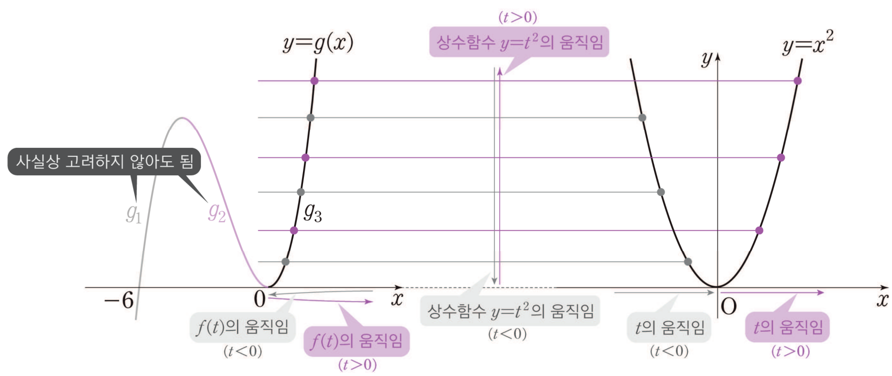
편의상 $g(x)=x^3+6x^2$ 이라 하면 주어진 조건의 항등식은 $g(f(x))=x^2$ 이다.

즉, 두 함수 $g(x)=x^3+6x^2$ 과 $y=x^2$ 의 그래프를 좌·우에 나란히 그린 후 상수함수 $y=t^2$ 의 움직임을 생각하면 된다.

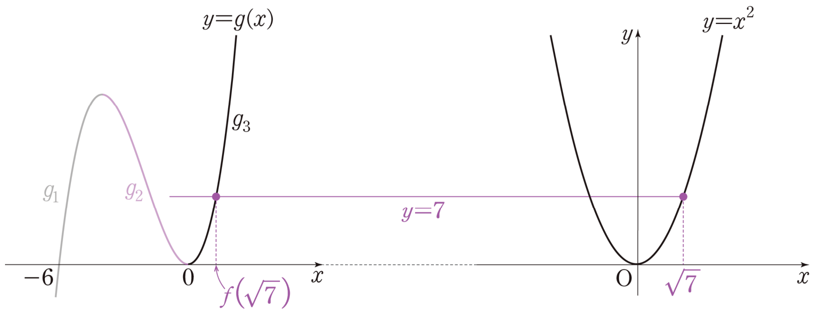
$y=t^2$ 의 움직임을 동영상으로 상상하며 g 를 구간별로 나눈 세 함수 g_1, g_2, g_3 중 어떤 함수에 의하여 $f(t)$ 의 값이 결정될지 생각해 보자. 문제에 주어진 함수 f 의 조건이라고는 '연속' 하나밖에 없다.



위 그림과 같이 $y=t^2$ 이 점 A 에서 B 로 움직이는 동안 g_1 으로 $f(t)$ 가 결정된다고 생각해보자. t 의 값이 점점 커져서 상수함수 $y=t^2$ 이 점 B 를 지나고 나면 $y=t^2$ 이 g_3 와만 교점을 가지므로, 이때부터는 g_3 으로만 $f(t)$ 가 결정된다. 즉, g_1 로 $f(t)$ 가 결정되는 부분이 있으면 갑자기 점프해서 불연속인 점이 생기는 것이다. 이는 g_2 로 $f(t)$ 가 결정되는 부분이 있는 경우에도 동일하다. 스스로 확인해 보자.



그러므로 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 위 그림과 같이 g_3 와의 교점에 의해서만 $f(t)$ 가 결정되어야 함을 알 수 있다. 즉, g_1, g_2 는 $f(t)$ 의 값을 관찰할 때 사실상 고려할 필요가 없는 것이다.



이제 묻는 값을 구하자. 그림과 같이 함수 $g(x)=x^3+6x^2$의 그래프와 직선 $y=7$이 만나는 점의 x좌표가 $f(\sqrt{7})$이다. 이때 g_3만 고려하면 되므로 방정식 $x^3+6x^2=7$의 실근 중 0보다 큰 값을 구하자.

$$
\begin{aligned}
x^3+6x^2=7 \quad &\rightarrow \quad x^3+6x^2-7=0 \\
&\rightarrow \quad (x-1)(x^2+7x+7)=0 \\
&\rightarrow \quad x=1 \quad (\because \ x>0)
\end{aligned}
$$

즉, $f(\sqrt{7})=1$임을 알 수 있다.

저자's LECTURE

부분역함수로의 빌드업

KEY01은 결국 $g(x)=x^3+6x^2$의 그래프를 그릴 때 g_3만 고려하면 된다는 것을

'$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속'

이라는 조건으로 숨겨둔 문제입니다. 즉, 연속 조건을 통해 g_3만 고려하면 된다는 것을 알아내는 과정이 문제 풀이의 핵심이라고 할 수 있습니다. 이때 g를 '증가함수 g_3'로만 고려하면 역함수를 가진다고 할 수 있습니다. 즉, $g(f(x))=x^2$의 양변에 역함수 g_3^{-1}을 취하면

$$g(f(x))=x^2 \quad \rightarrow \quad f(x)=g_3^{-1}(x^2)$$

라 써낼 수도 있습니다. 어차피 **해당구간만 고려하기 때문**입니다. 이처럼 역함수를 가지지 않는 함수를 만나도 특정 구간에서의 '부분역함수'를 생각하여 조건을 해석하고 식을 써낼 수 있습니다.

KEY02 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

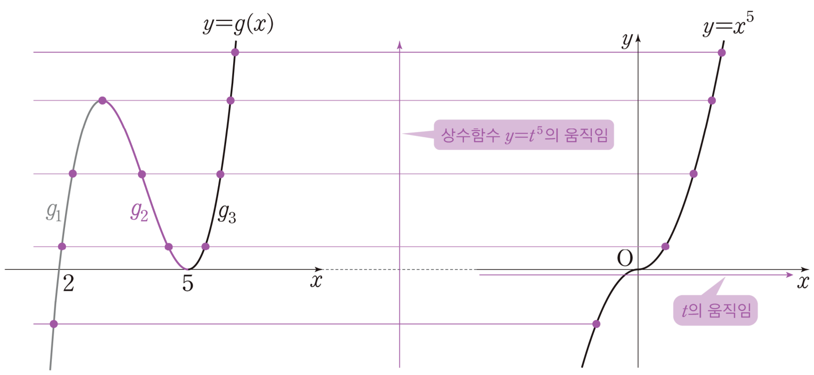
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $f(0)$ 의 값의 곱을 구하시오.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $\left(f(x)-2\right)\left(f(x)-5\right)^2=x^5$ 이다.
(나) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이다.

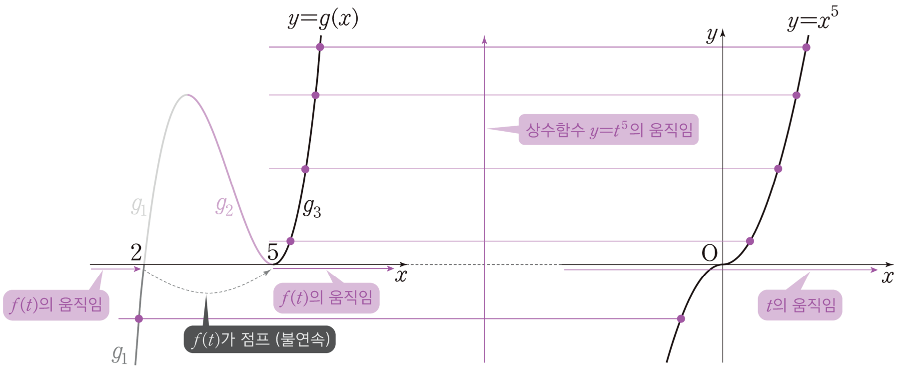
역시 편의상 $g(x)=(x-2)(x-5)^2$ 이라 하면 (가)조건의 항등식은 $g(f(x))=x^5$ 이다.

즉, 두 함수 $g(x)=(x-2)(x-5)^2$ 과 $y=x^5$ 의 그래프를 좌·우에 나란히 그린 후 상수함수 $y=t^5$ 의 움직임을 생각하면 된다.

$y=t^5$ 의 움직임을 동영상으로 상상하며 g 를 구간별로 나눈 세 함수 g_1, g_2, g_3 중 어떤 함수에 의하여 $f(t)$ 의 값이 결정될지 생각해 보자. (나)조건에 따르면 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이어야 한다.



함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서만 불연속이라는 것은 $x\neq 0$ 에서는 모두 연속이라는 뜻이다. 이때 $f(t)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 상수함수 $y=t^5$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이므로, $t\neq 0$ 일 때에는 이 교점의 위치가 연속적으로 변화해야 함을 알 수 있다. 그리고 $t=0$ 일 때에는 교점의 위치가 불연속적으로 점프하여 변화해야 한다.

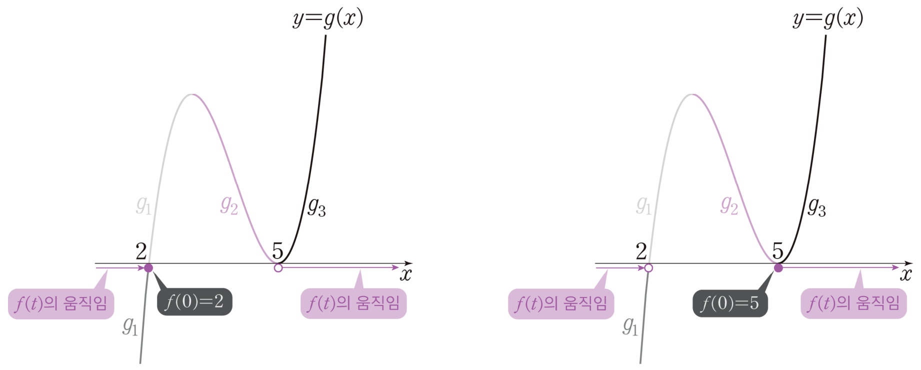


즉, 위 그림과 같이 $t<0$ 일 때 $f(t)$ 는 g_1 과의 교점의 x 좌표이고, $t>0$ 일 때 $f(t)$ 는 g_3 와의 교점의 x 좌표일 수밖에 없음을 알 수 있다.[1)]

각주

1) 다른 경우가 왜 조건을 만족시킬 수 없는지 스스로 확인해보도록 하자.
예를 들어, g_2 와의 교점으로 $f(t)$ 가 결정되는 부분이 있다면 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 이 아닐 때에도 불연속인 경우가 반드시 생긴다.

이때 ‘불연속 조건’만으로는 $t=0$일 때 곡선 $y=g(x)$와 $y=t^5$의 교점이 $(2,0)$일지 $(5,0)$일지 알 수 없다. 즉, 아래의 그림처럼 $f(0)=2$와 $f(0)=5$가 모두 가능하다.



$\therefore$ (모든 $f(0)$의 값의 곱) $=2\times5=10$

KEY03 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $f(0)$ 의 값의 곱을 구하시오.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $\left(f(x)-2\right)\left(f(x)-5\right)^2=x$ 이다.
(나) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이다.

KEY03은 KEY02에서 (가)조건의 항등식의 우변만 x 로 바뀐 것인데, KEY02의 풀이를 제대로 이해했다면 풀이 과정과 정답이 동일하다는 것을 바로 알 수 있을 것이다. 즉, KEY03의 정답도 $2\times5=10$ 이다.

이는 x^5 과 x 의 $x=0$ 에서의 함숫값이 동일하고 증감 추이가 거의 유사하기 때문이다. 잘 모르겠다면 KEY02의 풀이를 참고하여 스스로 풀어 보자.

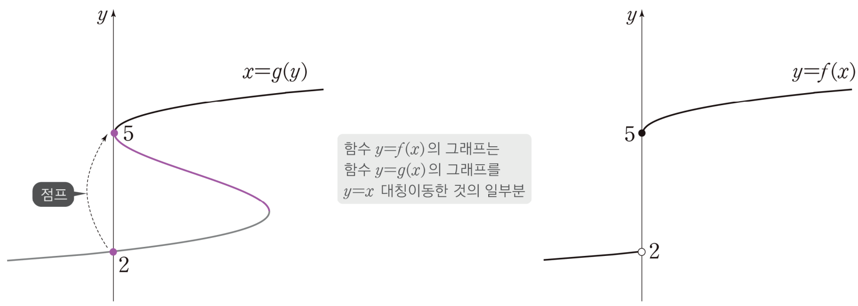
저자's LECTURE

부분역함수로의 빌드업 2

KEY02·KEY03의 $g(x)=(x-2)(x-5)^2$ 도 문제 풀이를 위해서는 결국 g_1, g_3 만 고려하는데, 각각 역함수가 존재하므로 양변에 g_1^{-1}, g_3^{-1} 를 취하면 다음과 같이 $f(x)$ 의 식을 써낼 수 있습니다.

KEY02: $g(f(x))=x^5 \;\rightarrow\; f(x)=g_n^{-1}(x^5) \quad (n=1,\ 3)$
KEY03: $g(f(x))=x \;\rightarrow\; f(x)=g_n^{-1}(x) \quad (n=1,\ 3)$

특히 KEY03의 경우 $f(x)$ 가 $g(x)$ 의 구간별 역함수임을 의미합니다. 이를 기하적으로 바라보면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것의 일부분이라는 것으로 해석할 수 있습니다.



관련된 내용은 특강 ❹편 부분역함수에서 더욱 자세히 배울 것입니다. 여기에서는 아래 정도로 정리하고 넘어갑시다.

$f(g(x))=h(x)$ 를 해석할 때 겉함수 f를 증가·감소인 구간으로 각각 나눈
함수 f_1, f_2, $\cdots$, f_n에 대하여 각각의 역함수 f_1^{-1}, f_2^{-1}, $\cdots$, f_n^{-1}을 양변에 취하면
$g(x)=f_k^{-1}(h(x))$ 라 표현할 수 있다. 즉, 속함수 $g(x)$ 의 식을 직접 써낼 수 있다.

KEY04 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2024.6·미적 28번 |

두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$이다.
(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

| 한완기 평수능 미적분 E8·22 |

편의상

$$g(x)=x^2+2x,\quad h(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$

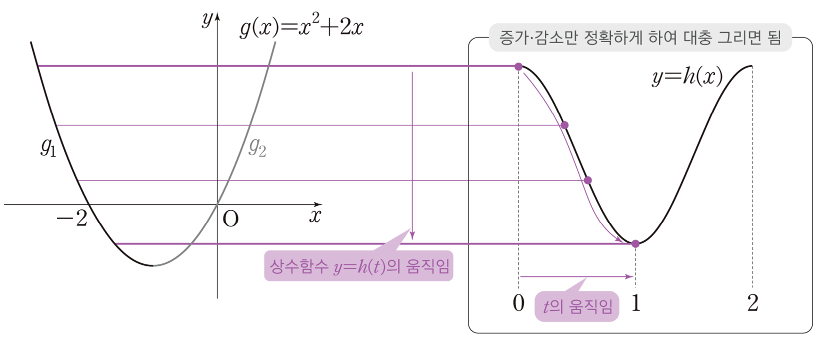
라 하면 (가)조건의 항등식은 $g(f(x))=h(x)$이다.

즉, 두 함수 $g(x)=x^2+2x$과 $h(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$의 그래프를 좌·우에 나란히 그린 후 상수함수 $y=h(t)$의 움직임을 생각하면 된다. 함수 $h(x)$의 식이 매우 복잡해서 당황할 수 있는데, 어차피 상수함수 $y=h(t)$로 해석할 것이기 때문에 증감만 정확히 그리면 된다. 함수 $h(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$는

주기가 2이고
$\cdots$, $x=-1$, $x=1$, $x=3$, $\cdots$ 에서 극소이고
$\cdots$, $x=0$, $x=2$, $x=4$, $\cdots$ 에서 극대이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프를 증감만 신경 써서 대략적으로 그리면 다음과 같다.

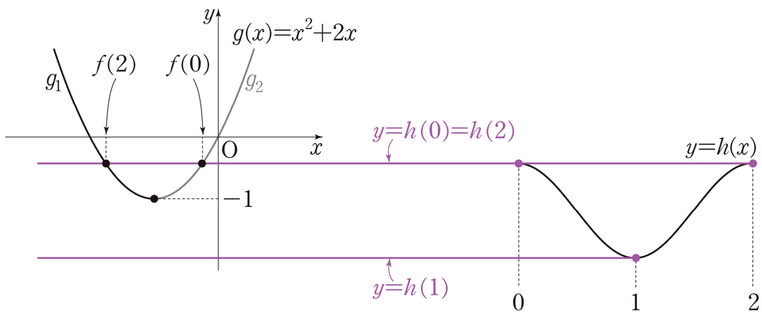
$y=h(t)$의 움직임을 동영상으로 상상하며 g를 구간별로 나눈 두 함수 g_1, g_2 중 어떤 함수에 의하여 $f(t)$의 값이 결정될지 생각해 보자. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)=f(2)+1$이다.



이때 (나)조건에 $f(0)=f(2)+1$ 가 있으므로 $t=0$ 과 $t=2$ 일 때부터 해석해 보면 다음과 같다.

$g(x)=x^2+2x$ 와 $y=h(0)$ 이 만나는 점의 x 좌표가 $f(0)$
$g(x)=x^2+2x$ 와 $y=h(2)$ 가 만나는 점의 x 좌표가 $f(2)$ … Ⓐ

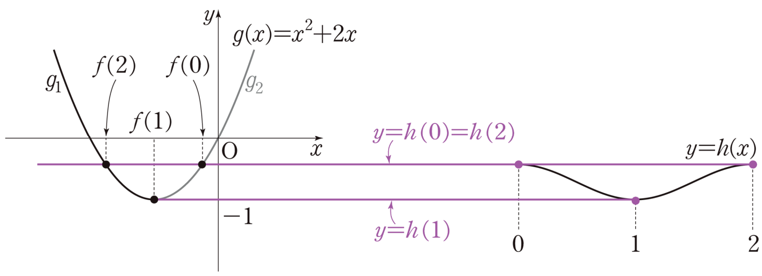
위에서 그려본 함수 $y=h(x)$ 의 그래프에서 $h(0)=h(2)$ 이고 이 값은 함수 $h(x)$ 의 극댓값임을 확인할 수 있다. 따라서 Ⓐ로부터 다음과 같은 상황임을 알 수 있다.



그림과 같이 $f(0)=f(2)+1$ 에서 $f(2)<f(0)$ 이므로 $f(0)$ 는 g_2 로 결정되고, $f(2)$ 는 g_1 으로 결정된다.

이제 $f(x)$ 의 연속성을 활용하자. 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=h(t)$ 의 교점의 x 좌표인 $f(t)$ 가 연속이려면 이 교점의 위치 역시 연속적으로 변화해야 한다. 한편 위에서 $f(0)$ 는 g_2 로 결정되고, $f(2)$ 는 g_1 으로 결정된다고 했으므로 f 를 결정하는 함수가 g_2 에서 g_1 으로 바뀌는 순간이 존재한다.

종합하여 '교점의 위치가 연속적으로 변화하며 함수가 g_2 에서 g_1 으로 갈아타지는 상황'이 존재하려면 아래 그림과 같이 상수함수 $y=h(1)$ 의 그래프가 곡선 $y=g(x)$ 에 접해야함을 알 수 있다. 즉, $h(1)$ 의 값이 함수 $g(x)=x^2+2x$ 의 극솟값과 일치하는 순간이 원하는 상황인 것이다.[1)]



따라서 $f(1)=-1$ 임과 $f(0)=f(2)+1$ 을 활용하면 a, b 의 값을 모두 구할 수 있다.

각주

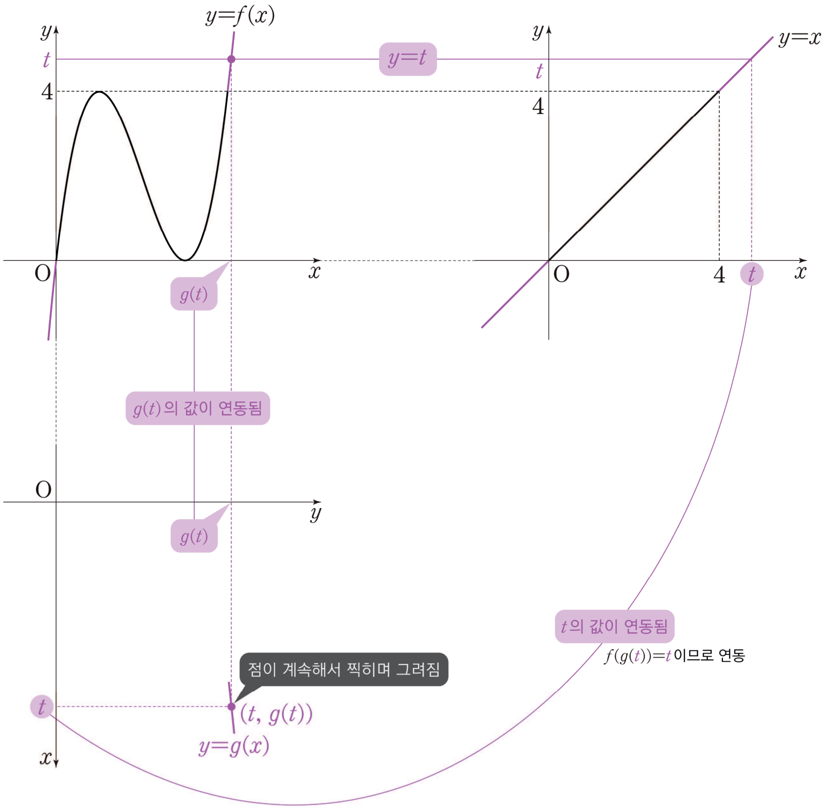
1) 다른 경우가 왜 조건을 만족시킬 수 없는지 스스로 확인해보도록 하자. $h(1)$ 의 값이 함수 $g(x)=x^2+2x$ 의 극솟값보다 커지거나 작아진다면 어떤 모순이 생기는지 확인하면 된다.

2. x 좌표 해석의 시각화

2-1. $f(g(x))=x$ 에서의 시각화

앞에서는 속함수의 움직임을 x 축에만 나타내었는데, 이를 **좌표평면 위에 시각화**하여 그래프를 그려낼 수도 있다. 매우 복잡하므로 차근차근히 보도록 하자.

$f(g(x))=x$ 에서 $f(x)=x(x-3)^2$ 일 때, $g(x)$ 의 그래프를 그려 보자. 직선 $y=t$ 의 기준을 잡기 위해 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 오른쪽에 직선 $y=x$ 를 그려놓고 시작하면 된다.



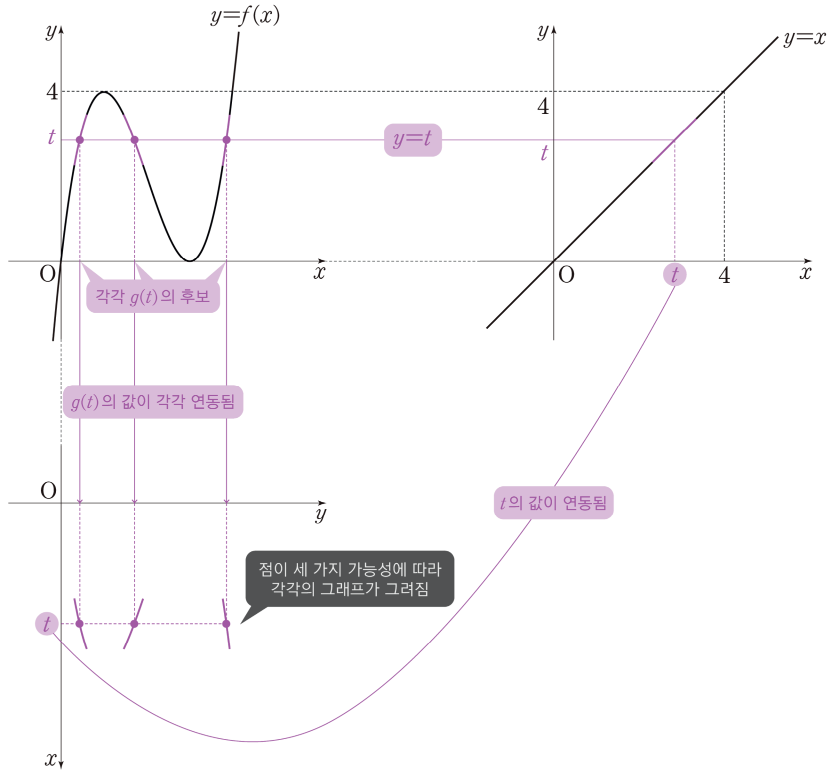
먼저 $t>4$ 일 때부터 생각해 보자. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 x 좌표가 $g(t)$ 이므로 위 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 의 아래에 시계방향으로 90° 만큼 회전한 좌표평면을 그린 후

직선 $y=x$ 를 그린 좌표평면의 x 축의 t,

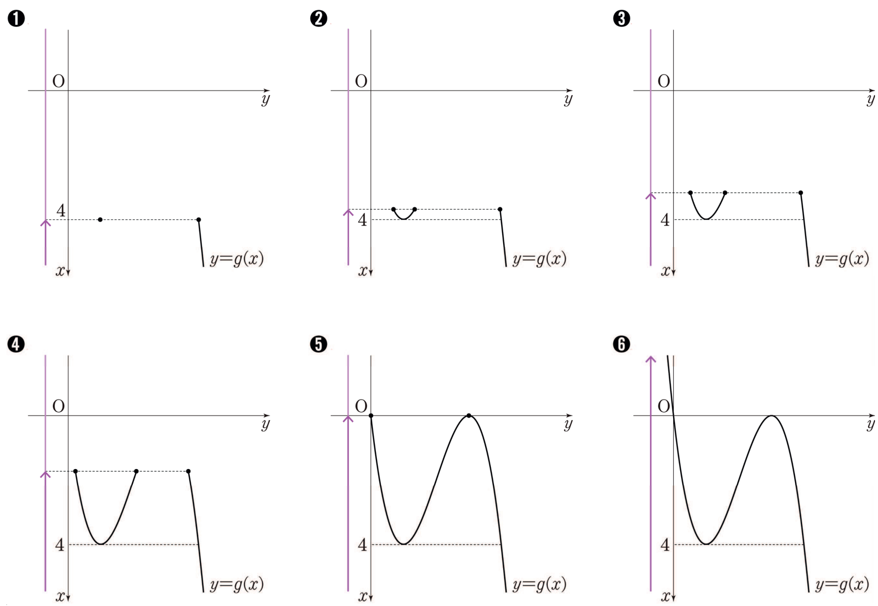
곡선 $y=f(x)$ 를 그린 좌표평면의 x 축의 $g(t)$

를 연동하여 점 $(t, g(t))$ 를 찍는 식으로 곡선 $y=g(x)$ 를 시각화할 수 있다.

다른 경우에도 비슷하게 그려진다. $0 \le t \le 4$ 인 경우에 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 여러 점에서 만나더라도 그냥 그 점을 모두 그린다고 생각하면서 그리면 된다.

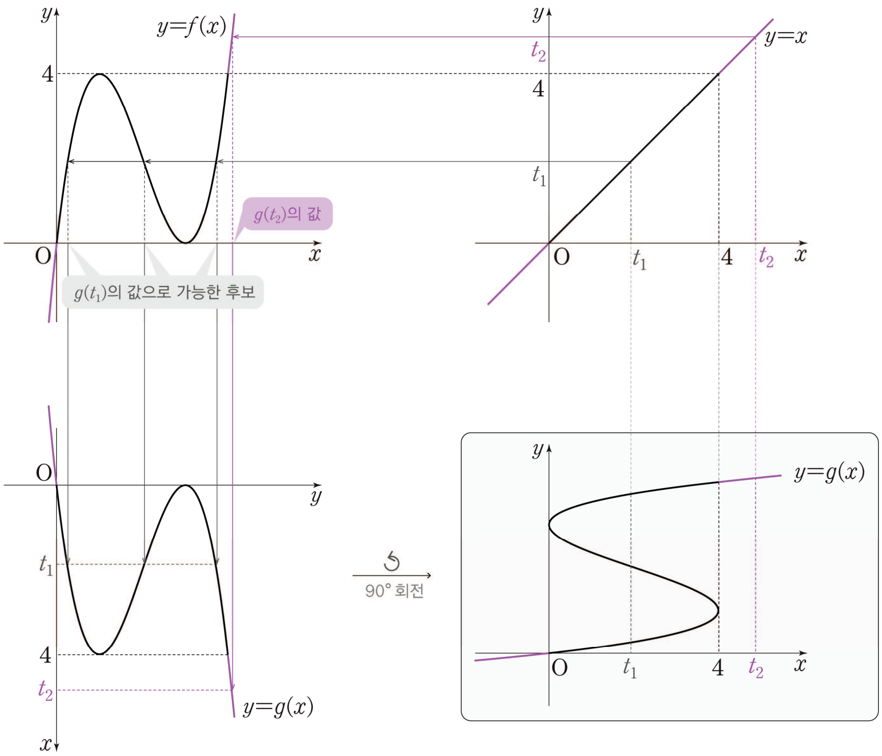


이처럼 t 의 값을 변화시켜가며 x 축 위에 나타낸 $g(t)$ 의 값을 시각화하는 것을 한눈에 보면 다음과 같다.

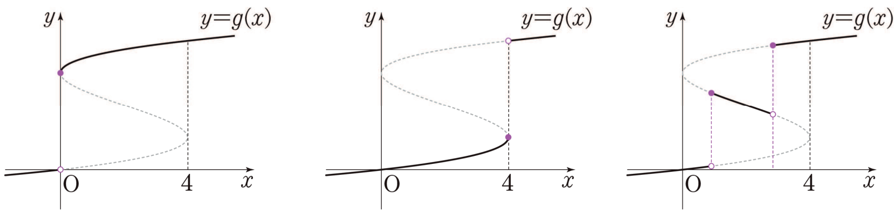


❶~❻의 순으로, 프린터처럼 출력해낸다고 상상하며 보면 이해가 한 층 더 편할 것이다.

이러한 과정으로 그린 그래프를 보기 편하도록 다시 시계반대방향으로 90° 만큼 회전하여 그리면 다음 그림과 같다.



[x **좌표 해석**]에서 나온 $g(t)$ 의 후보를 모두 그렸기 때문에, 이 그림에는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 될 가능성이 있는 것들이 모두 겹쳐서 그려져 있다. 따라서 실제 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 많은 예시가 가능하다.



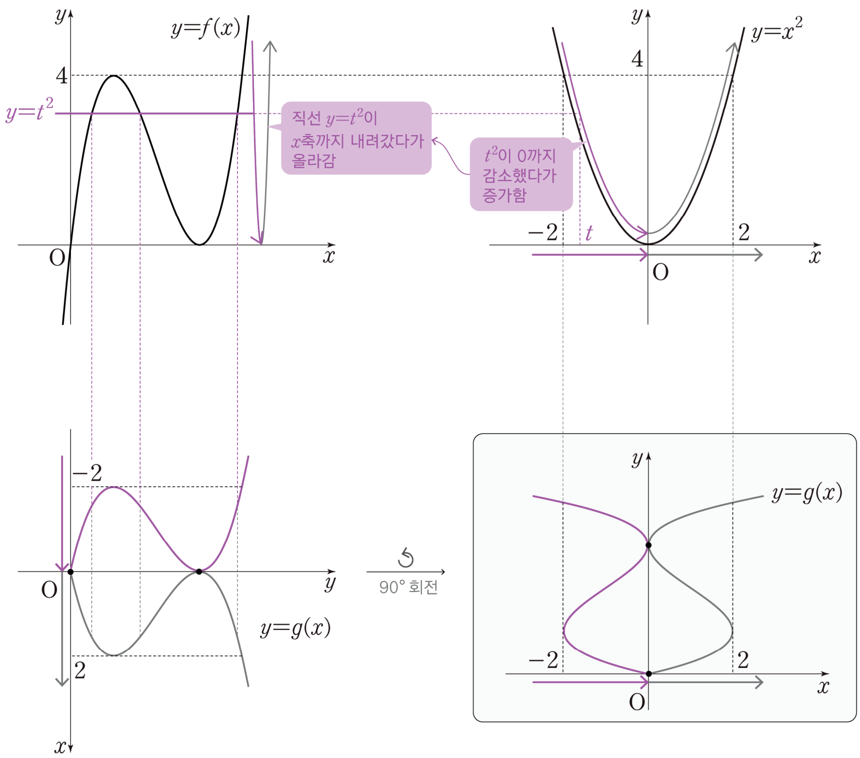
각각의 x 의 값에 대하여 $g(x)$ 의 값을 하나만 선택해서 남긴 것이다. 따라서 이러한 가능성들 중 문제의 조건을 만족시키는 상황을 찾으면 된다.

2-2. $f(g(x))=h(x)$ 에서의 시각화

$f(g(x))=h(x)$ 에서 $f(x)=x(x-3)^2$, $h(x)=x^2$ 인 예시를 생각하자.

이 경우 역시 x 축에 나타낸 $g(t)$ 의 값을 다음과 같은 과정으로 **좌표평면 위에 시각화**하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려낼 수 있다.

직선 $y=h(t)$ 의 기준을 잡기 위하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 오른쪽에 함수 $h(x)=x^2$ 의 그래프를 그려놓고 시작하자.

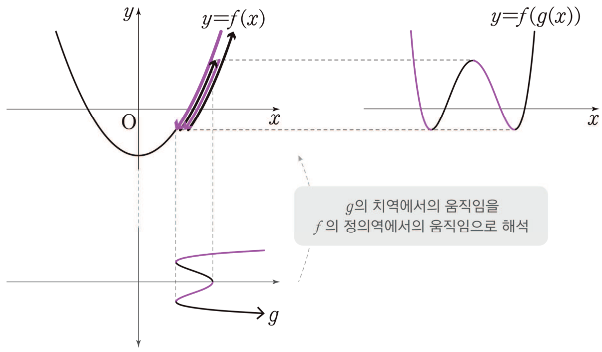


앞에서 했던 것과 마찬가지로, t 의 값을 변화시켜가며 점 $(t, g(t))$ 를 찍고 보기 편하도록 시계반대방향으로 90° 만큼 회전시킨 것을 그려주면 위 그림을 얻어낼 수 있다. 그림을 천천히 뜯어보며 확실하게 이해하도록 하자.

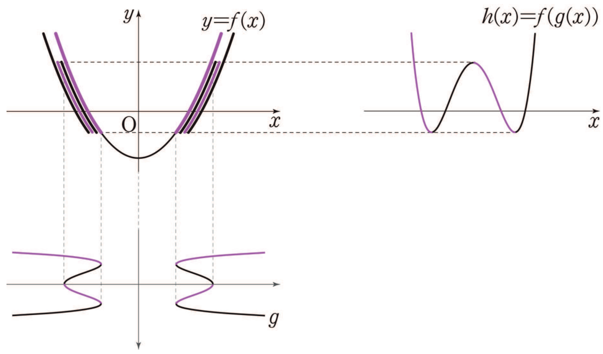
이때 그림을 그리는 과정을 잘 생각해보면, **「N축」**의 역방향과 똑같음을 깨달을 수 있을 것이다. 다시 말해, **「x 좌표 해석」**과 **「N축」**은 서로 방향만 다른 접근인 것이다.

— Sample Case

❶ 「N축」 예시

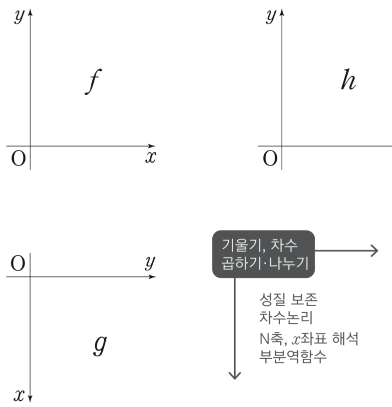


❷ 「x 좌표 해석」 예시



Sample Case ❶은 f와 g를 알 때 $y=f(g(x))$의 그래프를 그리는 **「N축」**의 예시이고, Sample Case ❷는 f와 h를 알 때 $h(x)=f(g(x))$를 만족시키는 $g(x)$의 후보를 모두 그리는 **「x 좌표 해석」**의 예시이다. 둘을 비교해 보며 두 과정이 역방향이라는 것을 잘 이해할 수 있으면 된다.

이처럼 특강 ❶의 **「성질 보존」**, 특강 ❷의 **「차수논리」**, 특강 ❸의 **「x 좌표 해석」**은 모두 '세 함수의 그래프'를 그려놓은 그림으로부터 모든 것을 파악할 수 있다. 즉, '합성함수' 자체가 이 그림을 통해서 많은 것을 해석할 수 있는 것이다. 앞으로 남은 특강 ❹❺에서도 계속 등장할 그림이니 많은 예시를 그려 보며 숙달시켜 두도록 하자.



KEY04 스스로 풀어본 후 다음 내용을 보세요. | 2024.6·미적 28번 |

두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$이다.
(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

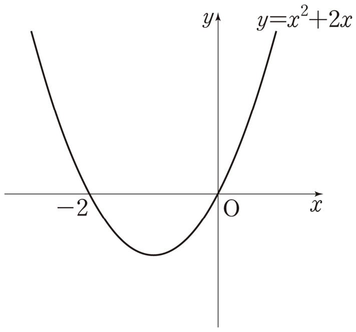
| 한완기 평수능 미적분 E8·22 |

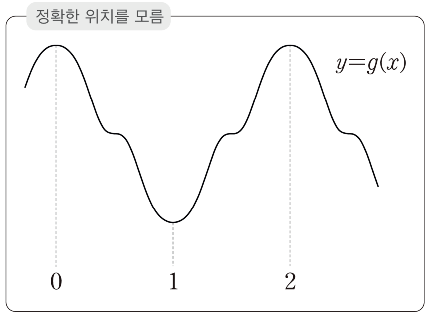
먼저 (나)조건의 $f(0)=f(2)+1$ 으로부터 $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$ 임을 얻을 수 있다.

(가)조건의 좌변을 **x^2+2x 에 $f(x)$ 를 합성한 것**으로 보고 **x 좌표 해석**을 하자. 즉,

곡선 $y=x^2+2x$와 직선 $y=a\cos^3\pi t\times e^{\sin^2\pi t}+b$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$

이고, 곡선 $y=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$는 주기가 2이고 $\cdots$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $\cdots$ 에서 극값을 가지므로[1] 다음과 같이 그림을 그릴 수 있다. 편의상 $g(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$라 하자.



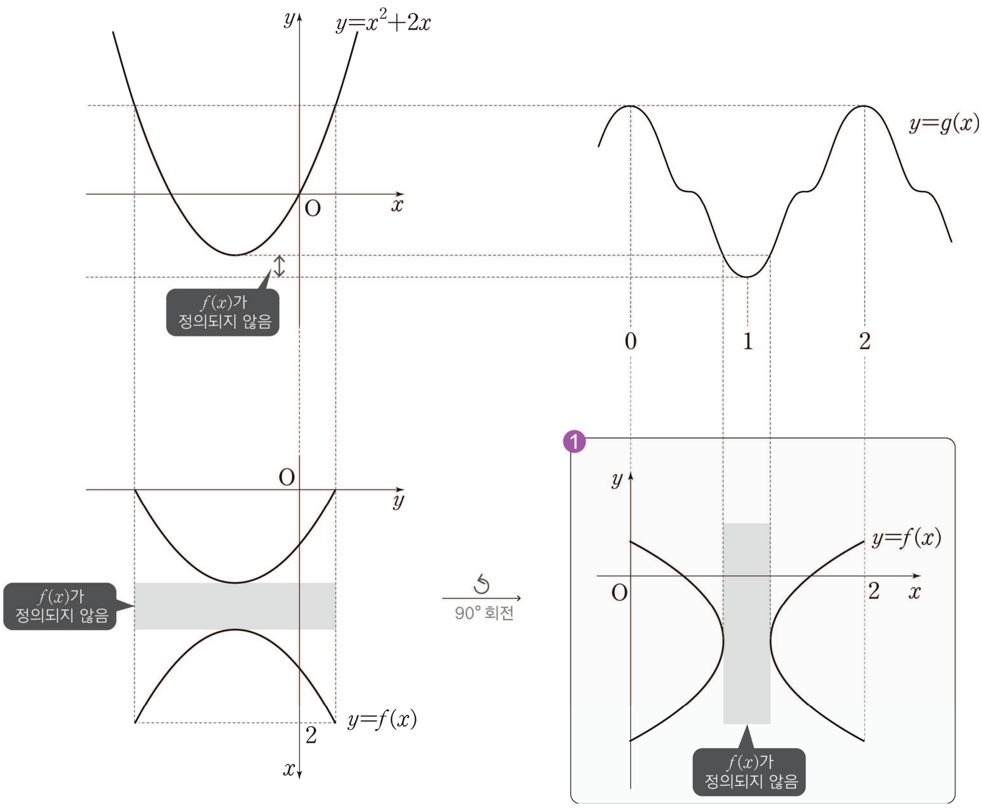


변곡점 등 모든 디테일을 살려서 그렸는데, 실제 문제를 풀 때에는 함수의 증감만 정확히 표시하면 된다.

a, b의 값을 모르므로 함수 $g(x)$ 의 극값을 확정지을 수 없다. 따라서 극값에 따라 경우를 나누어 **[x 좌표 해석]** 그림을 그려 보면 다음과 같다.

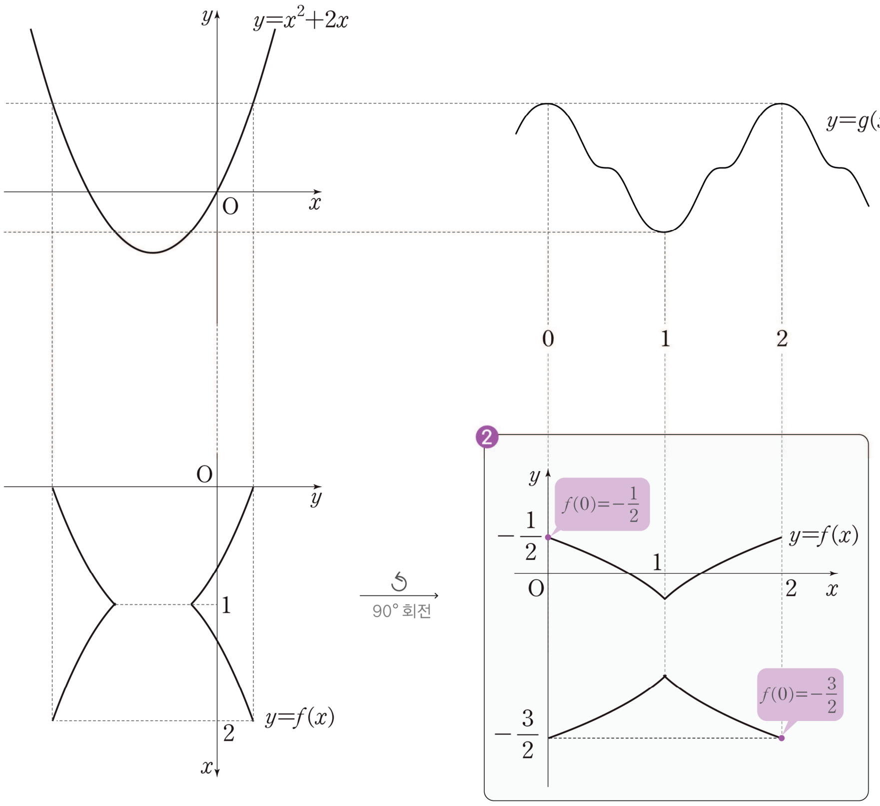
각주

1) 미분해보면 쉽게 알 수 있다.



먼저 함수 $g(x)$ 의 극솟값이 함수 $y=x^2+2x$ 의 극솟값인 -1 보다 작은 경우에는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 후보들이 ❶과 같이 그려진다.

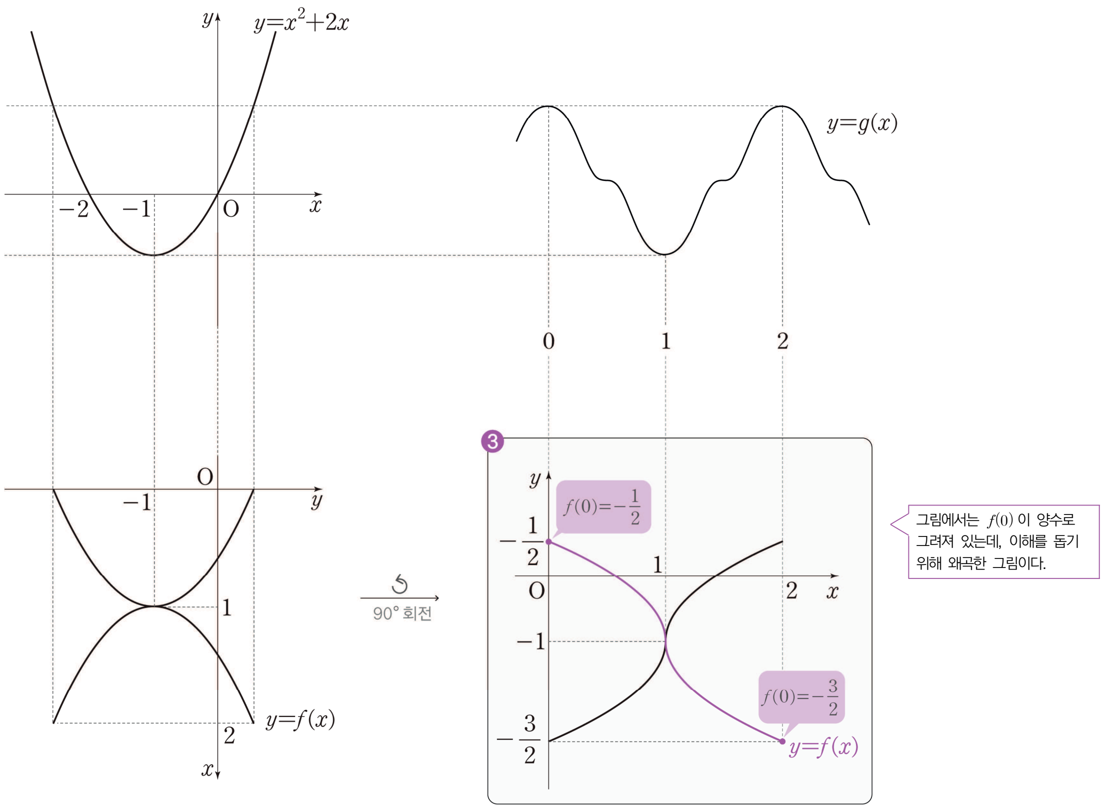
그런데 이때에는 함수 $f(x)$ 가 정의가 되지 않는 구간이 생긴다. 이는 모순이므로 원하는 상황이 아님을 알 수 있다.



그림에서는 $f(0)$ 이 양수로 그려져 있는데, 이해를 돕기 위해 왜곡한 그림이다.

함수 $g(x)$ 의 극솟값이 함수 $y=x^2+2x$ 의 극솟값인 -1 보다 큰 경우에는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 후보들이 ❷와 같이 그려진다.

그림으로부터 $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$ 이면서 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 존재할 수 없으므로 역시 원하는 상황이 아님을 알 수 있다.



따라서 함수 $g(x)$ 의 극솟값은 함수 $y=x^2+2x$ 의 극솟값인 -1과 같아야 하고, 그러면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 후보들은 ❸과 같이 그려진다.

이때 $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$ 이면서 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 ❸의 색칠된 곡선과 같음을 알 수 있다.

즉, $f(1)=-1$, $f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 (가)조건으로 계산하면 a, b의 값을 모두 구할 수 있다.

저자's LECTURE

합성함수 항등식 해석법

항등식 $f(g(x))=h(x)$ 를 해석하는 법은 여러 가지가 있습니다. 이번 특강에서는 x **좌표 해석** 관점을 다루었는데, 이 밖에도 **N축**과 특강 ❹편에서 다룰 **부분역함수** 등이 있습니다. 모든 해석법은 결국 합성함수의 그래프 그리기라는 본질에서 파생된 것들입니다. 실제로, 모든 방법을 아는 분들은

거의 같은 것에 이름만 다르게 붙어 있는 거야.

라고 생각하는 경우가 많습니다. 이름을 서로 다르게 한 이유는, 해석의 방향에 미미한 차이가 있기 때문입니다. 이는 물리에서 [거·속·시]의 관계를

① 거리=속력×시간, ② 속력=거리/시간, ③ 시간=거리/속력

으로 정리해두고 구하는 것에 따라 ①②③ 중 선택하여 활용하는 것에 비유할 수 있겠습니다.

요약하면, 이름에 휘둘리지 말고 모두 같은 뿌리에서 나온 방법임을 기억하면서 문제 조건에 맞는 해석법을 선택하는 것에 초점을 맞추어 학습하면 됩니다.