

해설

공통 12.

정답 | ②

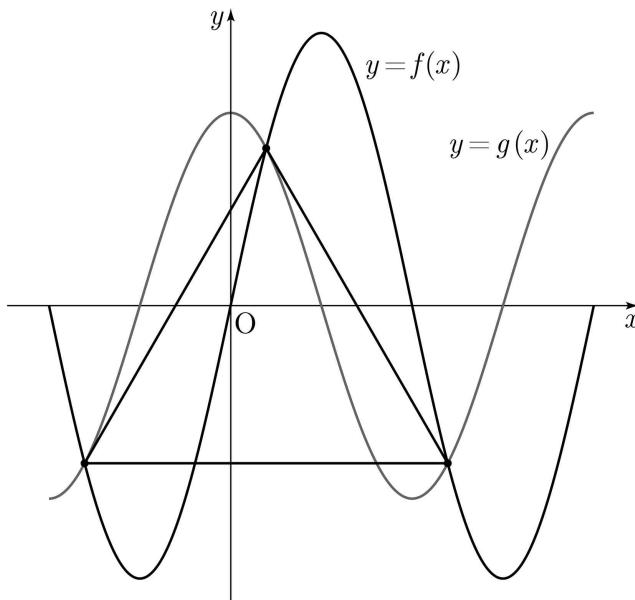
내용 영역 | 사인함수와 코사인함수의 그래프

행동 영역 | 문제 해결 능력 – 두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결하는 능력

등급대별 예상 정답률 | 1등급: 95% 이상 / 2등급: 80% / 3등급: 60%

[1단계] 그림을 그려 문제 상황을 파악하기

두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 를 좌표평면에 그리면 아래 그림과 같다.



[2단계] 정삼각형의 한 변의 길이 구하기

\Rightarrow 세 교점의 x 좌표는 $3 \sin \frac{\pi x}{2} = a \cos \frac{\pi x}{2}$ 를 만족시키는데, **[1단계]** 에서 그림을
그려 파악한 문제 상황으로는, 두 삼각함수의 주기가 같으므로 주기성과 대칭성에
의해 정삼각형의 한 변의 길이가 삼각함수의 주기와 같은 것임을 추측할 수 있다.

두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$3 \sin \frac{\pi x}{2} = a \cos \frac{\pi x}{2}$$

에서 $\tan \frac{\pi x}{2} = \frac{a}{3}$ 를 만족시킨다.

따라서 탄젠트함수 $\tan \frac{\pi x}{2}$ 의 주기성에 의해 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 세 교점의 x 좌표를 $x_0, x_0 + 2, x_0 + 4$ 로 놓을 수 있으므로, 세 교점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 한 변의 길이는 4이다. 따라서 $S = 4\sqrt{3}$ 이다.

[3단계] a 의 값 구하기

\Rightarrow **[2단계]** 에서 정삼각형의 한 변의 길이가 4임을 알았으므로 정삼각형의 높이의 길이를 알 수 있고, 이 높이는 곧 세 교점의 y 좌표와 관련이 있다. 여기서 다시 $3 \sin \frac{\pi x}{2} = a \cos \frac{\pi x}{2}$ 관계를 이용하여 a 의 값을 구한다.

세 교점의 y 좌표의 절댓값은 모두 $|3 \sin \frac{\pi x_0}{2}|$ 으로 같으므로

$y_0 = \left| 3 \sin \frac{\pi x_0}{2} \right|$ 라 하자. 그러면 $2y_0$ 는 정삼각형의 높이이고,

정삼각형의 한 변의 길이가 4이므로 높이의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

곧, $2y_0 = 2\sqrt{3}$ 에서 $y_0 = \sqrt{3}$ 이다.

$$\left| 3 \sin \frac{\pi x_0}{2} \right| = \sqrt{3} \text{ 일 때}$$

$$\left| \sin \frac{\pi x_0}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \left| \cos \frac{\pi x_0}{2} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이 고,

$$\left| a \cos \frac{\pi x_0}{2} \right| = y_0 = \sqrt{3}$$

이므로 $a = \sqrt{3} \times \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 이다.

$$\therefore a \times S = \frac{3}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{3} = 6\sqrt{6}$$