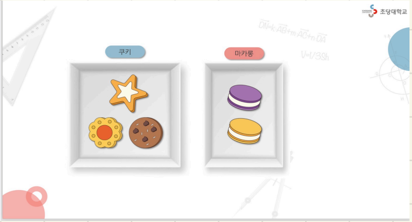
학습 목표) '경우의 수'

어떤 사건이 일어날 수 있는 가짓수

합의 법칙

두 사건 A,B가 동시에 일어나지 않을 때
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면
사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.
이것을 합의 법칙이라고 한다.



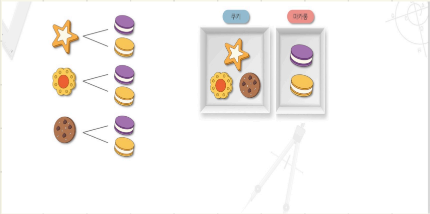
쿠키를 1개 선택하는 경우의 수
3가지(쿠키는 총 3개)

마카롱을 1개 선택하는 경우의 수
2가지(마카롱 2개)

마카롱 혹은 쿠키 중에서 1개 선택하는 경우의 수
5가지(쿠키 3개+마카롱 2개)

곱의 법칙

두 사건 A,B에 대하여
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각의 사건에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A,B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.
이것을 곱의 법칙이라고 한다. (※: 사건 A가 일어나는 m가지의 모든 경우마다 사건 B가 일어날 수 있는 경우가 n가지로 일정해야만 곱의 법칙이 사용 가능)



쿠키 중에서 하나와 마카롱 중에서 하나를 동시에 택하는 경우의 수
6가지(쿠키 3개×마카롱 2개)

순열

서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_nP_r$와 같이 나타낸다.

서로 다른 n개에서 $r(0<r\le n)$개를 택하여 일렬로 나열할 때
첫 번째 자리에 올 수 있는 것은 n가지
r번째 자리에 올 수 있는 것은 $n-(r-1)$가지, 즉 $(n-r+1)$가지이다.

$${}_nP_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}_{r개}$$

서로 다른 5개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수
=5개에서 3개를 택하는 순열
$={}_5P_3$

$${}_5P_3=5\times4\times3=60$$

서로 다른 n개에서 n개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1$
이다. 이 식의 우변과 같이 1부터 n까지의 모든 자연수의 곱을 n의 **계승**이라 하고, 이것을 기호로 $n!$과 같이 나타낸다.
(n 팩토리얼)

$${}_nP_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\times\cdots\times3\times2\times1}{(n-r)\times\cdots\times3\times2\times1}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

${}_nP_n=n!$, ${}_nP_0=1$, $0!=1$

조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_nC_r$와 같이 나타낸다.

서로 다른 것의 개수 택하는 것의 개수

조합 순열

$\{a,b,c\} \xrightarrow[\text{나열}]{\text{일렬로}}$ abc, acb, bac, bca, cab, cba

$\{a,b,d\} \xrightarrow[\text{나열}]{\text{일렬로}}$ abd, adb, bad, bda, dab, dba

$\{a,c,d\} \xrightarrow[\text{나열}]{\text{일렬로}}$ acd, adc, cad, cda, dac, dca

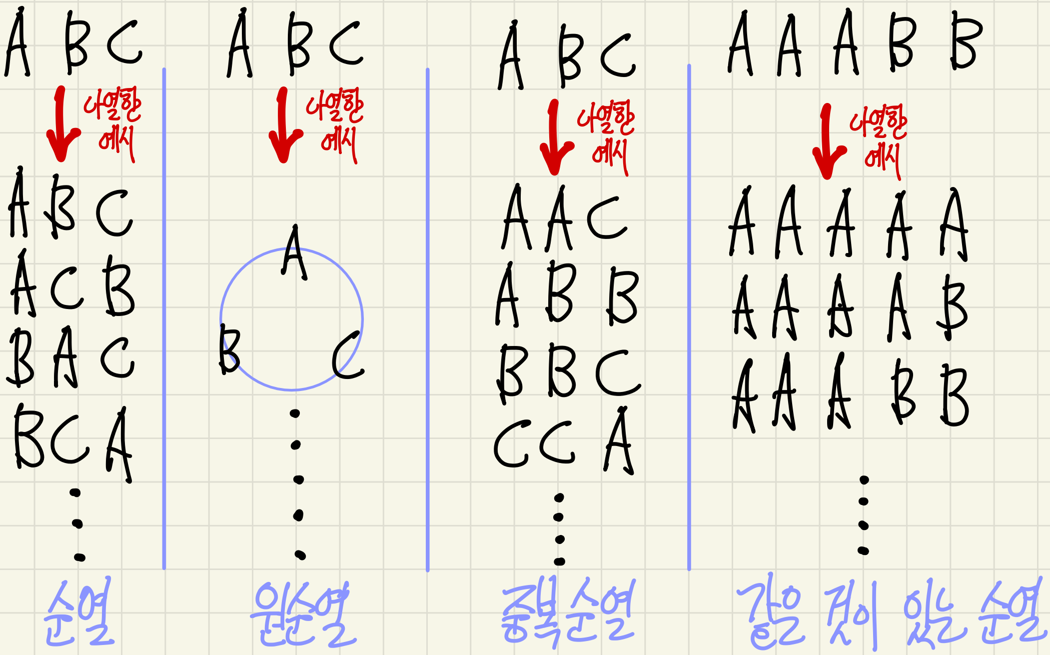
$\{b,c,d\} \xrightarrow[\text{나열}]{\text{일렬로}}$ bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

${}_4C_3$개 $3!$개

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } {}_nC_0 = 1)$$

학습 목표) 이항식의 거듭제곱 전개할 때, 계수들 사이에 관계

이항정리가 도와줌



원순열

일반적으로 서로 다른 n개씩 나열하는 경우의 수는 n!이지만, 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$\frac{n!}{n}=(n-1)!$ 이다. (회전해서 일치하는 경우는 모두 같은 경우로 간주)

중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복순열의 수를 기호로

$_n\Pi_r$ 와 같이 나타낸다.

$$_n\Pi_r = \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{개}} = n^r$$

$$_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

$$_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

같은 것이 있는 순열

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때

n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{n!}{p!\,q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

6개의 문자 a,a,a,a,b,b를 일렬로 나열하는 경우의 수

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

중복조합

중복을 허용하여 만든 조합을 **중복조합**이라고 하며,
서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수를 기호로
$_nH_r$와 같이 나타낸다.

서로 다른 것의 개수 중복하여 택하는 횟수

세 개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우의 수 $_3H_4$, 15가지

$$_5H_4 = {}_8C_4 = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}^{\,2}\cdot5}{\cancel{4\cdot3\cdot2}_{\,1}\cdot1} = 70$$

$$_3H_5 = {}_7C_5 = \frac{7\cdot6}{2\cdot1} = 21$$

$$_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

이항정리

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식: n개의 $(a+b)$ 중에서 각각 a 또는 b를 하나씩 택하여 곱한 항을 모두 더한 것

이때 $a^{n-r}b^r$은 n개의 $(a+b)$ 중 r개에서 b를 택하고, 남은 $(n-r)$개에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 **조합의 수**인 $_nC_r$와 같다.

n이 자연수일 때

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + \cdots\cdots + {}_nC_nb^n$$

또한, 각 항의 계수 $_nC_0, {}_nC_1, \cdots, {}_nC_n$을 **이항계수**라 하고

$_nC_ra^{n-r}b^r$을 $(a+b)$의 전개식의 **일반항**이라고 한다.

$$(a+b)^5 = {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b^1 + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

학습 목표) 확률의 의미를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

시행

같은 공간에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지는 실험이나 관찰

표본공간

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합

사건

표본공간의 부분집합

수학적 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 기호로 P(A)와 같이 나타낸다.
어떤 시행에서 표본공간 S에 대해서 각 원소가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때,
사건 A가 일어날 확률 P(A)를

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

사건 A의 원소의 개수
표본공간 S의 원소의 개수

로 정의하고, 이를 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나올 확률을 구하시오.

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n(S)=6$
짝수가 나오는 사건 $A=\{2,4,6\}$, $n(A)=3$
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

통계적 확률

일반적으로 같은 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라고 하면

n이 충분히 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워진다고 알려져 있다.

이때 p를 사건 A의 통계적 확률이라고 한다.

실제로 통계적 확률을 구할 때 n의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로

n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$으로 통계적 확률을 대신한다.

한편 n을 충분히 크게 하면 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 사건 A가 일어날 수학적 확률에

가까워진다는 사실이 알려져 있다.

표본공간 S인 어떤 시행에서

임의의 사건 A에 대하여 $0 \le P(A) \le 1$

반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $P(S) = 1$

절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $P(\varnothing) = 0$

확률의 덧셈정리

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

합사건

표본공간 S의 사건 A, B에 대하여
A 또는 B가 일어나는 사건을 $A \cup B$로 나타내고,
A와 B의 합사건이라고 한다.

곱사건

표본공간 S의 사건 A, B에 대하여
A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A \cap B$로 나타내고,
A와 B의 곱사건이라고 한다.

배반사건

사건 A, B 중에서 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때
즉, $A \cap B = \emptyset$일 때, A와 B는 서로 배반이라고 하고
이 두 사건을 서로 배반사건이라고 한다.

여사건

어떤사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라고 하고
기호로 A^c와 같이 나타낸다.
이때, $A \cap A^c = \emptyset$이므로 사건 A와 A^c는 서로 배반사건이다.

표본공간 S의 사건 A에 대하여 그 여사건 A^c의 확률을 구하는 방법

$P(A \cup A^c) = P(S) = 1$

$P(A) + P(A^c) = 1$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

학습 목표) 조건부 확률의 뜻과 사건의 독립, 종속의 의미를 알아보자

조건부 확률

일반적으로, 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 이것을 기호로

$P(B|A)$ 와 같이 나타낸다

표본공간

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$P(A) \neq 0$일 때, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 이므로 양변에 $P(A)$를 곱하면

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$가 성립한다

B B

B A|B

주머니 안에 흰 구슬 3개와 검은 구슬 5개가 들어있다.
이 주머니에서 임의로 구슬을 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 2개가 모두 흰 구슬일 확률을 구하시오 (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다)

첫 번째에 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 A라 하면 $P(A)=\frac{3}{8}$
두 번째에 꺼낸 구슬이 흰 구슬인 사건을 B라 하면
사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $P(B|A)=\frac{2}{7}$
따라서 2개가 모두 흰 구슬일 사건은 $A \cap B$ 이므로
구하는 확률은 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

독립(이 아니면 종속)

다른 것에 예속하거나 의존하지 아니하는 상태가 됨

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 것이 사건 B가 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때,
즉 $P(B|A)=P(B)$일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라고 한다.

두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 **독립**이면 확률의 곱셈정리에 의하여
$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$가 성립한다

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ (단, $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$)

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 홀수인 사건을 A, 4 이하인 사건을 B, 소수인 사건을 C라고 할 때, 다음에 답하시오

(1) 두 사건 A와 B는 서로 독립임을 보이시오. $P(A\cap B)=\frac{1}{3}=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}$ 독립 o
(2) 두 사건 A와 C는 서로 종속임을 보이시오. $P(A\cap B)=\frac{1}{3}\neq P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{4}$ 독립 x

$A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{2,3,5\}$
$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(C)=\frac{1}{2}$
$A\cap B=\{1,3\}$, $A\cap C=\{3,5\}$

독립시행

동일한 시행을 반복하는 경우에 각 시행에서
일어나는 사건이 서로 독립이면 이와 같은 시행을 **독립시행**이라고 한다.

독립시행의 확률

어떤시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p(0<p<1)$일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서
사건 A가 r회 일어날 확률은

$_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$ (단, $r=0,1,2,\cdots,n$)

어느 양궁 선수가 화살을 1번 쏠 때, 10점 영역을 맞힐 확률은 $\frac{1}{3}$이라고 한다
이 선수가 화살을 5번 쏠 때, 다음을 구하시오.(단, 화살을 쏘는 시행은 독립시행이다.)

(1) 10점 영역을 3번 맞힐 확률 $\frac{40}{243}$

(2) 적어도 2번은 10점 영역을 맞힐 확률 $\frac{131}{243}$

$_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

5번의 시행에서 10점 영역을 0번, 1번 맞힐 확률은 각각

$_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$, $_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

$1-\left(\frac{32}{243}+\frac{80}{243}\right)=\frac{131}{243}$