제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ 1 ④ 5 ⑤ 25

2. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(4) = 4$

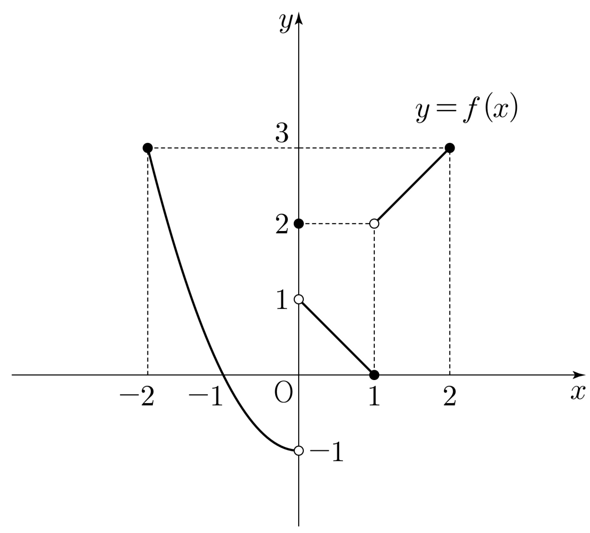
3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{6}(2a_k - 1) = 30$ 일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$ 의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

$2\sum a_k - 6 = 30$

$\therefore \sum a_k = 18$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-1 + 2 = 1$

5. 함수 $f(x)=(x^2+2)(x^2+x-3)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=2x(x^2+x-3)+(x^2+2)(2x+1)$

$f'(1)=-2+9=7$

6. $\cos(\theta-\pi)=\frac{3}{5}$이고 $\tan\theta<0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-\frac{3}{5}\\ \tan\theta<0\end{array}\right)$ 2사분면 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$

7. 곡선 $y=x^3-5x^2+6x$ 위의 점 $(3,0)$에서의 접선이 점 $(5,a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$y'=3x^2-10x+6$

$x=3 \rightarrow 27-30+6=3$

$\therefore y=3(x-3)=3x-9$

$(5,6)$

8. 두 양수 a, b가

$$\log_{\sqrt{2}} a + \log_2 b = 2, \quad \log_2 a + \log_2 b^2 = 7$$

을 만족시킬 때, $a \times b$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

$\log_2 a^2 b = 2$, $\log_2 ab^2 = 7$

$a^2 b = 4$, $ab^2 = 2^7$

곱 → $a^3 b^3 = 2^9$

$\therefore ab = 2^3 = 8$

9. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 함수 $2f(x)+1$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. $G(3) = 2F(3)$일 때, $G(5) - 2F(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2F(x) + x = G(x) + C$

$x=3 \to 2F(3) + 3 = G(3) + C$

$G(3) = 2F(3) \to C = 3$

$x=5 \to 2F(5) + 5 = G(5) + 3$

$\therefore G(5) - 2F(5) = 2$

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k = 21$$

일 때, $S_2 + S_7$의 값은? [4점]

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

$(-S_1 + S_2) + (-S_3 + S_4) + (-S_5 + S_6)$, $r > 0$

$= a_2 + a_4 + a_6$

$= 1 + r^2 + r^4 = 21$

$r^4 + r^2 - 20 = 0$

$(r^2+5)(r^2-4) = 0$ $\therefore r = 2$ $(\because r > 0)$

$a = \frac{1}{2}$

$S_2 + S_7 = 1(\frac{1}{2}+1) + \frac{\frac{1}{2}(2^7-1)}{2-1} = \frac{3}{2} + \frac{127}{2}$

$= 65$

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-10t+7$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

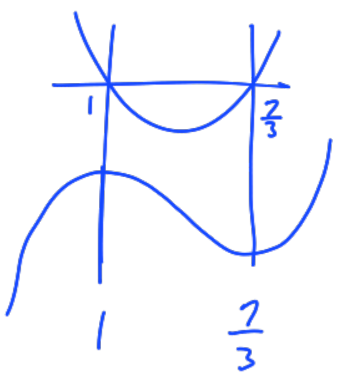
<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 3이다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$V(t)=(3t-7)(t-1)$

기$(t)=t^3-5t^2+7t$

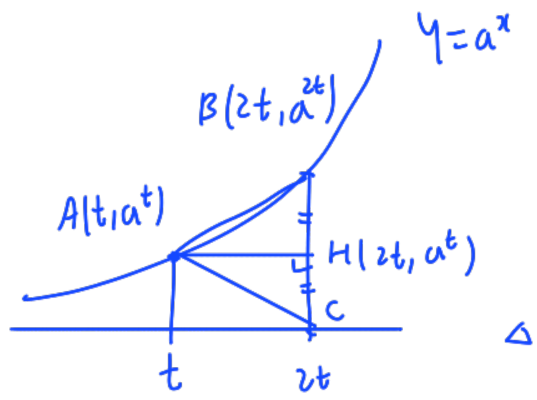


ㄴ. 기$(1)=3$

ㄷ. 기$(0)=0$
기$(1)=3$
기$(2)=2$
$\therefore 3+1=4$

12. 상수 $a\,(a>1)$과 양수 t에 대하여 곡선 $y=a^x$과 두 직선 $x=t$, $x=2t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 삼각형 ACB의 넓이가 8일 때, $a\times t$의 값은? [4점]

① $2^{\frac{9}{4}}$ ② $2^{\frac{23}{8}}$ ③ $2^{\frac{7}{2}}$
④ $2^{\frac{33}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{19}{4}}$



$a^{2t}=2\cdot a^t$

$a^t=2$

$\triangle ACB=\frac{1}{2}\cdot t\cdot 4=8$

$\therefore t=4$

$a=2^{\frac{1}{4}}$

$a\times t=2^{\frac{1}{4}}\times 2^2=2^{\frac{9}{4}}$

13. 함수 $f(x)=x^2+6x+12$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> 모든 실수 a에 대하여
>
> $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{\{f(x)\}^2-k(x+2)f(x)}$의 값이 존재한다.

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

$x^2+6x+12 \to D<0$　$f(a)>0$

$\lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{f(x)(f(x)-k(x+2))}=\dfrac{1}{f(a)}\times\lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{f(x)-k(x+2)}$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{(x^2+(6-k)x+12-2k)}$

i) $D=(k-6)^2-4(12-2k)<0$

$k^2-4k-12<0$

$-2<k<6 \to 7$개

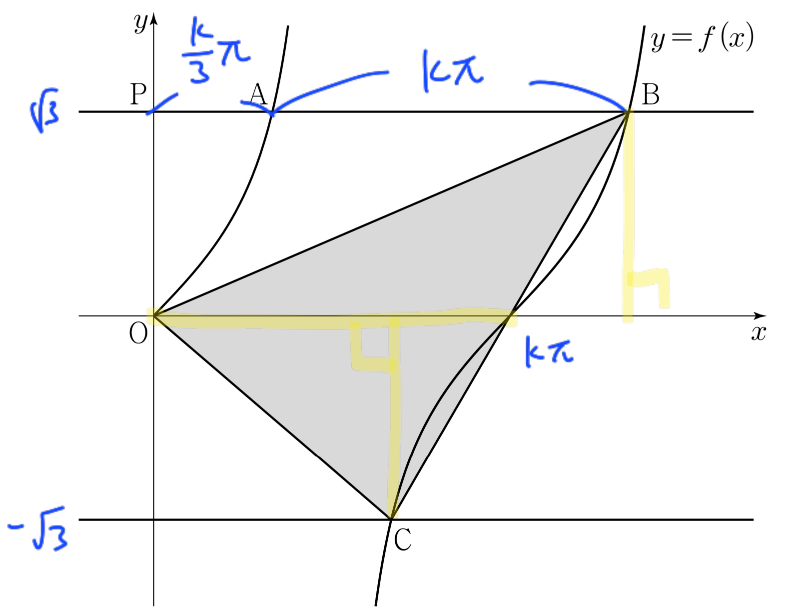
ii) $k=6 \to \lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ (ok)

∴ $7+1=8$개

14. 양수 k에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, 0\le x<\dfrac{3k\pi}{2},\ x\ne\dfrac{k\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\dfrac{x}{k}$가 있다. 점 $\mathrm{P}(0,\,p)\,(p>0)$을 지나며 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 A, B$(\overline{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{PB}})$라 하고, 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{PA}}$이고 삼각형 OCB의 넓이가 $\dfrac{5\pi}{3}$일 때, $k+p$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\dfrac{4\sqrt3}{3}$　② $\dfrac{13\sqrt3}{9}$　③ $\dfrac{14\sqrt3}{9}$　④ $\dfrac{5\sqrt3}{3}$　⑤ $\dfrac{16\sqrt3}{9}$

주기 $k\pi$



$A(\frac{k}{3}\pi,\sqrt3)$ ∴ $p=\sqrt3$

$\triangle OCB=\frac12\times k\pi\times2\sqrt3=\frac53\pi$ ∴ $k=\frac{5}{3\sqrt3}$

$k+p=\frac59\sqrt3+\sqrt3=\frac{14}{9}\sqrt3$

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (|f(t)|-|t|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=6$에서 극값을 갖는다.

$f(6)\times g(2)<0$일 때, $f(8)$의 값은? [4점]

① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

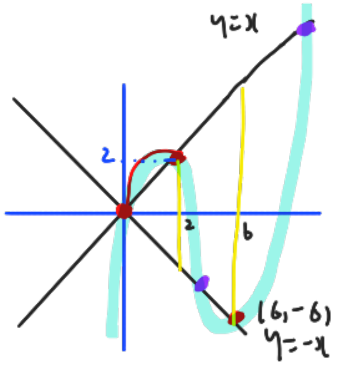
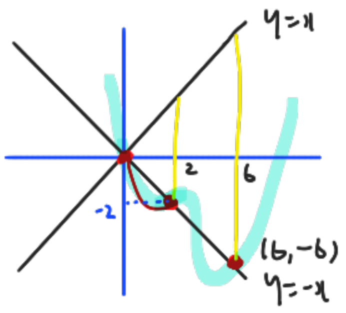
$g(0)=0$, $g'(x)=|f(x)|-|x|=0$

$f(0)=0$ $|f(x)|=|x|$ 서다실 4개

$g(2)=\int_0^2(|f(t)|-|t|)dt$ $f(x)=x$, $f(x)=-x$

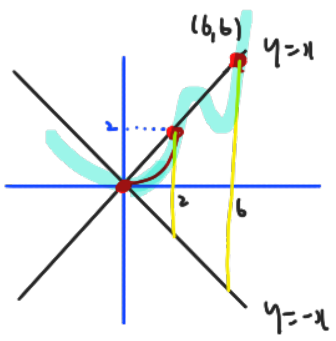
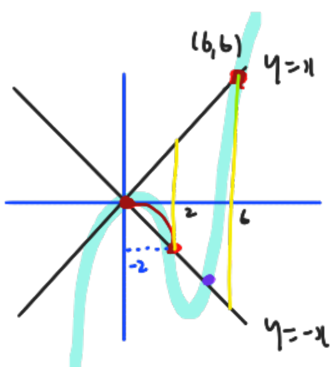
$g'(2)=0$, $g'(6)=0$ & 부호변화
접하면 X

$f(2)=2$ or -2
$f(6)=2$ or -2

i) $f(6)=-6$, $f(2)=2$, $g(2)>0$ 서다실 최소 5개 (X)

ii) $f(6)=-6$, $f(2)=-2$, $g(2)>0$ 3차 (X)

iii) $f(6)=6$, $f(2)=2$, $g(2)<0$ 3차 (X)

iv) $f(6)=6$, $f(2)=-2$, $g(2)<0$

$f(x)=px^2(x-6)+x$
$f(2)=-16p+2=-2$
$p=\frac{1}{4}$
$f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-6)+x$
$\therefore f(8)=40$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=na_n+2$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{8}$

$a_1=1$
$a_2=a_1+2=3$
$a_3=2a_2+2=8$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x+1$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{17}$

$f(x)=x^3+x^2+x+3$

$f(2)=8+4+2+3=17$

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=6,\quad 2a_5-a_4=15$$

일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{30}$

$a_5+(a_5-a_4)=15$

$(a_3+2d)+d=15$

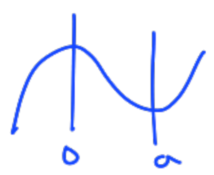
$6+3d=15,\ d=3$

$\therefore a_{11}=a_3+8d=6+24=30$

19. 함수 $f(x)=2x^3-3ax^2+5a$의 극솟값이 a일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$\boxed{10}$

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$



$a>0$

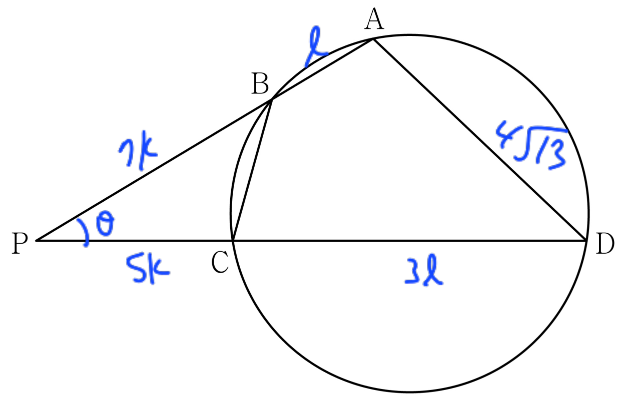
극솟값 $f(a)=-a^3+5a=a$

$a^3-4a=0,\ a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

극댓값 $f(0)=5a=10$

20. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$, $\overline{BC}<\overline{AD}$일 때, 직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 P라 하자.



다음은 $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이고 $\overline{AD}=4\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle BPC=\theta$라 할 때, $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이므로
> 삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{6}{7}$이다.
> $\overline{PB}:\overline{PC}=7:5$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k$,
> $\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$에서 $\overline{AB}=l$, $\overline{CD}=3l$이라 하자.
> 원의 성질에 의하여
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로 $5k(5k+3l)=7k(7k+l)$
> $\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$이고, $l=\boxed{(가)}\times k$이다. 3 $25k+15l=49k+7l$
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1:\boxed{(나)}$이므로 $l=3k$
> $PC:PA=1:2$ 2
> $\overline{BC}=\dfrac{1}{\boxed{(나)}}\times\overline{AD}$이다. 2
> 따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,
> 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여 $R=\boxed{(다)}$이다. 7

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{12}$

$\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AD}=2\sqrt{13}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{13}}{7}$

$\therefore \triangle BPC \Rightarrow 2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=14,\ R=7$

$p+q+r=3+2+7=12$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{296}$

> 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$$
>
> 이다.

$f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ | $f(2x)-f(0) = 8x^3+4ax^2+2bx$

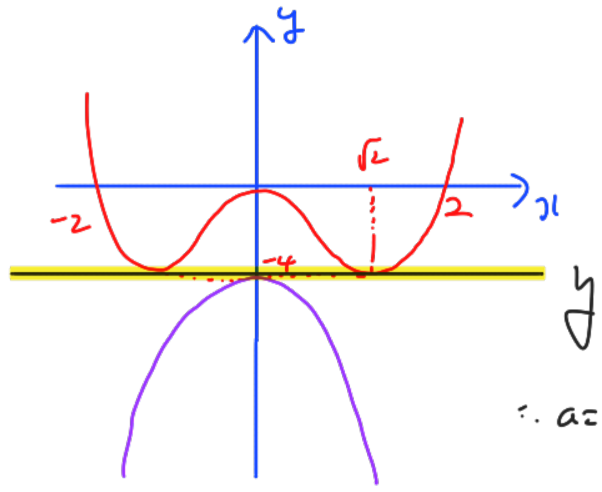
$f'(x) = 3x^2+2ax+b$

$\frac{5}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}-2 \le \underbrace{4x^2+2ax+b}_{①} \le \underbrace{x^4}_{②}$

① $ax+\frac{b}{2} \ge -\frac{3}{2}x^2-2 \Rightarrow 2ax+b \ge -3x^2-4$

② $2ax+b \le x^4-4x^2$

$\therefore \boxed{-3x^2-4} \le \boxed{2ax+b} \le \boxed{x^4-4x^2}$ $x^2(x^2-4)$



$y=2ax+b$

$\therefore a=0,\ b=-4$

$f'(x)=3x^2-4$

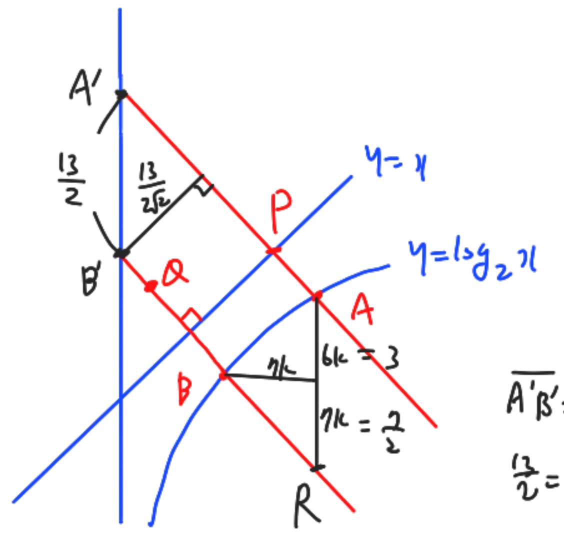
$f'(10)=296$

22. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) (직선 AP의 y절편) − (직선 BQ의 y절편) $= \frac{13}{2}$
>
> (나) 직선 AB의 기울기는 $\frac{6}{7}$이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{73}$



$\overline{A'B'}=\overline{AR}$

$\frac{13}{2}=13k \quad \therefore k=\frac{1}{2}$

$B(\alpha, \log_2\alpha),\ A(\alpha+\frac{7}{2}, \log_2(\alpha+\frac{7}{2}))$

$\log_2(\alpha+\frac{7}{2})-\log_2\alpha=3 \quad \therefore \alpha+\frac{7}{2}=8\alpha,\ \alpha=\frac{1}{2}$

$B(\frac{1}{2},-1),\ A(4,2),\ P(3,3),\ Q(-1,\frac{1}{2})$

$\square ABQP=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\times\frac{13}{2\sqrt{2}}=\frac{65}{8}=\frac{q}{p}$

$\therefore p+q=73$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 72 ② 75 ③ 78 ④ 81 ⑤ 84

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B)=\frac{5}{6}, \quad \mathrm{P}(A^{C} \cap B)=\frac{1}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^{C})$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$P(A)=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

$\therefore P(A^c)=\frac{5}{12}$

25. 1학년 학생 1명, 2학년 학생 3명, 3학년 학생 4명이 있다. 이 8명의 학생 중 임의로 5명의 학생을 선택할 때, 선택된 2학년 학생 수와 선택된 3학년 학생 수가 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{15}{56}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{17}{56}$ ⑤ $\frac{9}{28}$

1학년 2학년 3학년

1 2 2 $\rightarrow \frac{1 \times {}_3C_2 \times {}_4C_2}{{}_8C_5} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$

26. 평균이 m이고 표준편차가 $2\sqrt{2}$인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 128인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균의 값이 $\overline{x}$일 때, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\overline{x}-c \le m \le \overline{x}+c$이다. c의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.47 ② 0.49 ③ 0.51 ④ 0.53 ⑤ 0.55

$1.96 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{128}} = 1.96 \times \frac{1}{4} = 0.49$

27. 각 면에 숫자 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 서로 다른 상자 2개가 있다. 이 두 상자를 동시에 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수의 차를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$1 \to \frac{1}{4}$
$2 \to \frac{2}{4}$
$3 \to \frac{1}{4}$

X	0	1	2	
$P(X=x)$	$\frac{6}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{2}{16}$	1

$E(X) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$V(X) = \frac{8+8}{16} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

28. 빨간색 카드 1장, 파란색 카드 1장, 노란색 카드 3장, 보라색 카드 3장이 있다. 이 8장의 카드를 세 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 두 학생 A, B는 각각 1장 이상의 카드를 받고, 학생 C는 카드를 받지 못할 수 있다.
> (나) 학생 A가 받는 카드의 색의 가짓수는 3 이하이다.

① 730 ② 746 ③ 762 ④ 778 ⑤ 794

R
B
Y Y Y
P P P

$n(가 \wedge 나) = n(가) - n(가 \wedge 나^c)$

$n(가) = $ (전체경우) $-$ (A or B가 0장)

$= (3 \times 3 \times {}_3H_3 \times {}_3H_3) - ((2 \times 2 \times {}_2H_3 \times {}_2H_3) \times 2 - 1)$

$= 900 - 127 = 773$

$n(가 \wedge 나^c) \Rightarrow$ A가 4가지 색

A B C
R
B
Y
P

Y Y
P P

$\Rightarrow {}_3H_2 \times {}_3H_2 - {}_2H_2 \times {}_2H_2$

$= 36 - 9 = 27$

B가 0개인 경우

$\Rightarrow 773 - 27 = 746$

단답형

29. 두 집합 $A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3\}$에 대하여 다음 시행을 한다.

> 집합 A의 모든 부분집합 8개 중에서
> 임의로 한 개를 선택하고,
> 집합 B의 모든 부분집합 4개 중에서
> 임의로 한 개를 선택한다.
> 선택한 두 집합의 교집합의 원소의 개수를 기록한다.

$8\times4=32$

이 시행을 15360번 반복하여
기록한 수가 1인 횟수가
5880 이상일 확률을
오른쪽 표준정규분포표를 이용하여
구한 값이 k일 때,
$1000\times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494
3.0	0.499

$\boxed{23}$

B　A

$n(A\cap B)=1 \Rightarrow \{2\}$: $\{2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,3,4\}$ 4

$\{3\}$: $\{3\}$, $\{3,2\}$, $\{3,4\}$, $\{3,2,4\}$ 4

$\{2,3\}$: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$ 4

12가지

$p=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$

$X\sim B\left(15360,\ \frac{3}{8}\right)$　$E(X)=5760$　$V(X)=3600$

$X\sim N(5760,\ 60^2)$

$P(X\ge5880)=P(Z\ge2)=0.023=k$

$\therefore 1000k=23$

30. 학생 A는 숫자 1, 8이 각각 하나씩 적혀 있는 2장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 선택하여 선택한 카드에 적힌 수가 8일 때만 선택한 카드를 바닥에 내려놓고,
학생 B는 숫자 2, 3, 4, 5, 6, 7이 각각 하나씩 적혀 있는 6장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 선택하여
선택한 카드에 적힌 수가 자연수 n보다 작거나 같을 때만 선택한 카드를 바닥에 내려놓는다.
다음 규칙에 따라 학생 A가 귤을 받을 확률을 p,
학생 B가 귤을 받을 확률을 q라 하자.

> • 카드를 내려놓은 학생이 2명이면
> 더 큰 수가 적힌 카드를 내려놓은 학생만 귤을 받는다.
> • 카드를 내려놓은 학생이 1명이면
> 카드를 내려놓지 않은 학생만 귤을 받는다.
> • 카드를 내려놓은 학생이 없으면
> 어느 학생도 귤을 받지 못한다.

$p=q$일 때, $24(n+p)$의 값을 구하시오.
(단, n은 7 이하의 자연수이다.) [4점]

$\boxed{80}$

내려놓: O
안내려놓: X
$P(A)=\frac{1}{2}$
$P(B)=\frac{n-1}{6}$

A　B
O　O $\rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{n-1}{6} \rightarrow$ A
O　X $\rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{7-n}{6} \rightarrow$ B
X　O $\rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{n-1}{6} \rightarrow$ A
X　X

$p=\frac{n-1}{6}$, $q=\frac{7-n}{12}$

$p=q \Rightarrow 2n-2=7-n$　$\therefore n=3$
$p=\frac{1}{3}$

$24(n+p)=72+8=80$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

$\dfrac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}$

24. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$ 의 값은? [3점]

① $e-2$ ② $\dfrac{e-1}{2}$ ③ $\dfrac{e}{2}$ ④ $e-1$ ⑤ $\dfrac{e+1}{2}$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=dt$

$\displaystyle\int_0^1 e^t dt = e-1$

25. 두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \dfrac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}} = 6$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

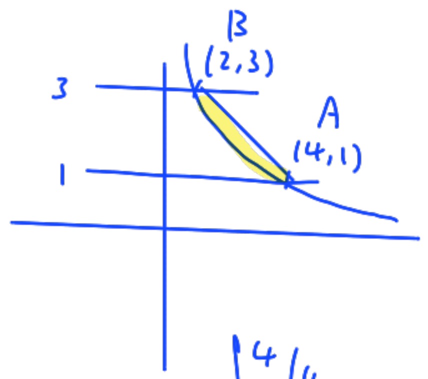
$\lim_{n \to \infty} \dfrac{an^b}{3n}\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)$

$b=-1$, $\dfrac{a}{3}(1+1)=6$, $a=9$

$a+b=8$

26. 곡선 $y=\dfrac{3}{x-1}$ $(x>1)$이 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\dfrac{3}{x-1}$ $(x>1)$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4-3\ln 3$　　② $3-3\ln 2$　　③ $4-2\ln 3$
④ $3+3\ln 2$　　⑤ $3+3\ln 3$



AB : $y=-x+5$

$\int_2^4 \left((5-x)-\dfrac{3}{x-1}\right)dx$

$= 5x-\dfrac{1}{2}x^2-3\ln|x-1| \Big|_2^4$

$= (20-8-3\ln 3)-(10-2) = 4-3\ln 3$

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
함수 $f(x^3+x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$이다. $g(1)+g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

$g(f(x^3+x)) = x$

$x=1 \to g(f(2))=1,\ g(1)=1$

미분 $\to g'(f(x^3+x))\cdot f'(x^3+x)\cdot(3x^2+1)=1$

$x=1 \to g'(1)\times f'(2)\times 4 = 1$

$f'(2)=8g'(1)-1$
$g'(1)=t$ $\to$ $t(8t-1)\times 4=1$
$32t^2-4t-1=0$
$8t\ \ \ 1$
$4t\ \ -1$
$t=g'(1)=\frac{1}{4}$

$f'(2)>0$
$\Downarrow$
$g'(1)>\frac{1}{8}$

$\therefore g(1)+g'(1)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

28. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times(g(0))^2$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$
(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow g(\pi)=n\pi$
$\Rightarrow \tan g(\pi)=0$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

$f(0)=g(0)-\tan g(0)=0,\ g(0)=\tan g(0)$

$f'(x)=g'(x)-\sec^2 g(x)\cdot g'(x)$
$=g'(x)(1-\sec^2 g(x))=-g'(x)\tan^2 g(x)$

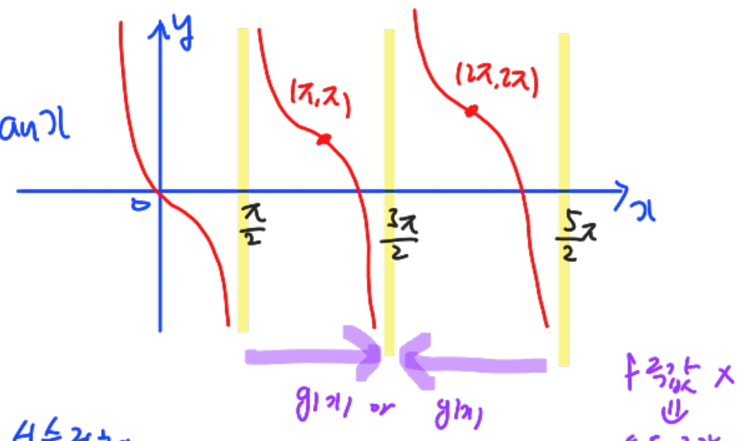
$f'(0)=-g'(0)\tan^2 g(0)=-g'(0)\times g(0)^2$ $\therefore$ ㉠: $-f'(0)$

$f'(\pi)=-g'(\pi)\tan^2 g(\pi)=0$ & $f''(\pi)=0$
$f(0)=0$ $\Rightarrow f(x)=a(x-\pi)^3+a\pi^3$

$f(x)=(x-\tan x)\circ g(x)$ / $(x-\tan x)'$
$\Downarrow$ $=1-\sec^2 x=-\tan^2 x\le 0$
$(n\pi, n\pi)$ 지남 $\Rightarrow x-\tan x$ 감소함수 & $x=\frac{2k-1}{2}$ 점근선

f는 극값 존재 X
f는 증가 or 감소

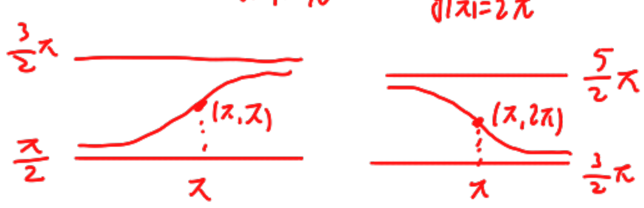
$y=x-\tan x$



f 극값 X
$\Downarrow$
g도 극값 X

f의 치역 실수전체
$\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3}{2}\pi$ $\Rightarrow$ $g(x)$의 치역 $(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$ or $(\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{2}\pi)$
$\Downarrow$ $g(\pi)=\pi$ $\Downarrow$ $g(\pi)=2\pi$

$y=g(x)$



$f(\pi)=g(\pi)-\tan g(\pi)=\pi$ or 2π
$f(0)=0$

$\therefore f(x)$는 증가함수 $\Rightarrow g$가 증가 $\to f(x)=(x-\tan x)\circ g(x)$는 감소 (X)

$\therefore g$는 감소 $\to g(\pi)=2\pi,\ f(\pi)=2\pi$

$f(x)=a(x-\pi)^3+a\pi^3$
$f(\pi)=a\pi^3=2\pi$ $\therefore a=\frac{2}{\pi^2}$

$f'(x)=\frac{6}{\pi^2}(x-\pi)^2,\ -f'(0)=-6$

단답형

29. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 + a_2 < 10$
> (나) 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고,
> 이 세 항의 곱은 216이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{91}$

$r = \frac{\beta}{\alpha}$, $|r|<1$,

a_k	a_{k+1}	a_{k+2}
b	$b\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$	$b\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$
정	유 $\Rightarrow$ 유	$\Rightarrow$ 유...

∴ 정수인 항 3개 ⇒ 연속한 세 항이 정수

a_n: 등비수열 $\Rightarrow a_k \times a_{k+1} \times a_{k+2} = a_{k+1}^3 = 216$ ∴ $a_{k+1} = 6$

	a_k	a_{k+1}	a_{k+2}
216	-36	6	-1
54	-18	6	-2
72	-12	6	-3
$\frac{27}{2}$	-9	6	-4

$|a_k| > |a_{k+1}| > |a_{k+2}|$

$r>0 \Rightarrow$ (가) X

∴ $-1<r<0$

∴ $a_1 = \frac{27}{2}$, $r = -\frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{27}{2}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{81}{6+4} = \frac{81}{10} = \frac{q}{p}$$

∴ $p+q = 91$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right) \qquad e^{f(x)} = \frac{g(x)}{1+xf'(x)}$$

를 만족시킨다. $f(1) = 4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx = 34, \quad \int_1^2 xg(x)\,dx = 53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{31}$

$e^{f(x)}(1+xf'(x)) = g(x)$

$e^{f(x)} + xf'(x)e^{f(x)} = g(x)$

∴ $(xe^{f(x)})' = g(x)$

$\int_1^2 g(x)dx = xe^{f(x)}\Big|_1^2 = 2e^{f(2)} - e^{f(1)} = 34$, $e^{f(1)} = e^{4\ln 2} = 16$

∴ $e^{f(2)} = 25$

$\int_1^2 xg(x)dx = x^2e^{f(x)}\Big|_1^2 - \int_1^2 xe^{f(x)}dx = 53$

$4e^{f(2)} - e^{f(1)} - \int_1^2 xe^{f(x)}dx = 53$

∴ $\int_1^2 xe^{f(x)}dx = 100-16-53 = 31$

> ∗ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 포물선 $y^2 = 8x$의 초점의 좌표가 $(p, 0)$일 때, p의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-1}{2} = y-4, \quad \frac{x+2}{8} = \frac{y+5}{a}$$

가 서로 평행할 때, 상수 a의 값은? (단, $a \neq 0$) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\vec{u_1} = (2, 1)$
$\vec{u_2} = (8, a)$

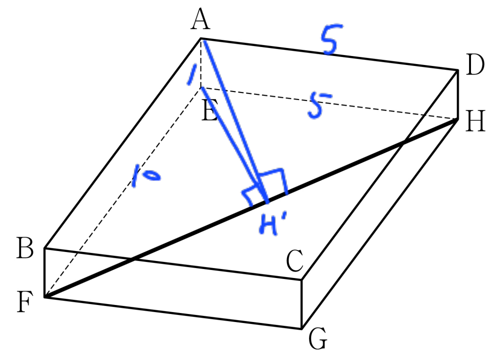
$a = 4$

25. 좌표공간의 점 A$(4,\ 3,\ -9)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

B(4,3,9)
C(-4,-3,9)
$\overline{BC} = \sqrt{64+36} = 10$

26. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 10$, $\overline{\mathrm{AD}} = 5$, $\overline{\mathrm{AE}} = 1$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 점 A와 직선 FH 사이의 거리는? [3점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

$\overline{FH} = 5\sqrt{5}$, $\overline{EH'} = 2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AH'} = \sqrt{21}$

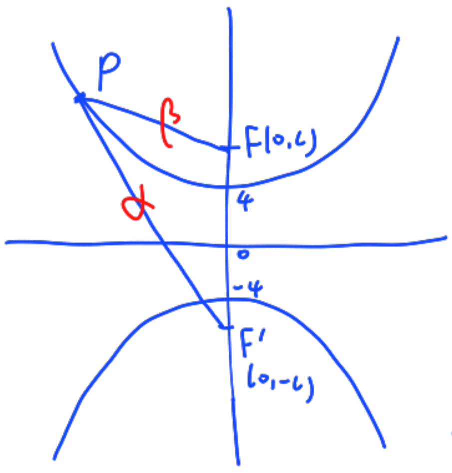
27. 두 초점이 F$(0,\ c)$, F$'(0,\ -c)(c>0)$인 쌍곡선

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다.

삼각형 PF$'$F의 둘레의 길이가 30일 때,

이 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{7\sqrt{3}}{9}$　② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　③ $-\frac{5\sqrt{3}}{9}$　④ $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$　⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



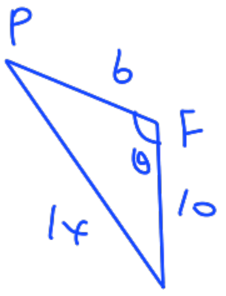
$c=5$

$\alpha-\beta=2a=8$

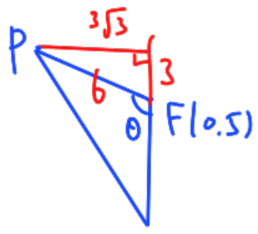
$\alpha+\beta+10=30$

$\alpha+\beta=20$

$\therefore\ \alpha=14,\ \beta=6$



$\cos\theta=\frac{36+100-196}{2\cdot6\cdot10}=-\frac{1}{2}$



$\therefore P(-3\sqrt{3},\ 8)$

$\frac{-3\sqrt{3}}{9}x-\frac{8y}{16}=-1$

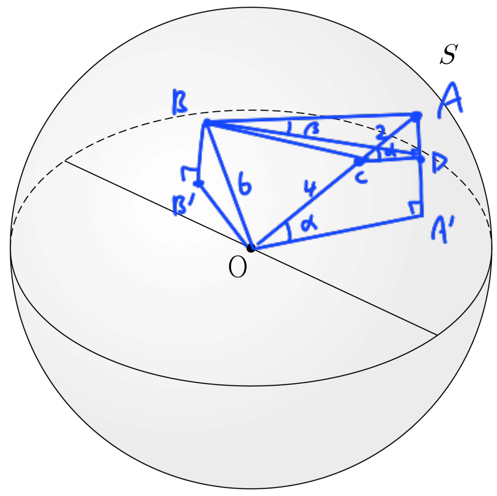
$y=-\frac{2}{3}\sqrt{3}x+2$

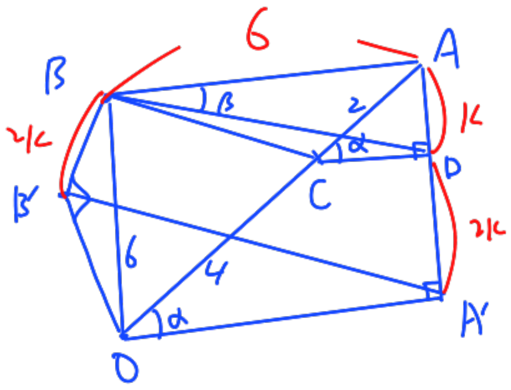
28. 좌표공간의 구 $S: x^2+y^2+z^2=36$ 위의 점 A에 대하여 구 S 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 OA 위의 $\overline{\mathrm{OC}}=4$인 점 C에 대하여 직선 BC와 xy평면이 서로 평행하다. (나) 두 직선 OA, AB와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\sin\alpha=3\sin\beta$이다.

삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영이 직각삼각형일 때, 평면 OAB와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 z좌표는 6이 아닌 양수이다.) [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{6}$　② $\frac{\sqrt{2}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$





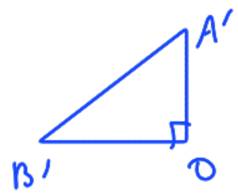
$\triangle BCD$: xy평면과 평행 　$\sin\alpha=3\sin\beta$

$\overline{AD}=\overline{AB}\sin\beta=2\sin\alpha=6\sin\beta$ $\therefore \overline{AB}=6$, $\triangle OAB$: 정삼각형

$\overline{AD}=k$, $\overline{DA'}=2k \rightarrow \overline{OA'}=\sqrt{36-9k^2}$

$\overline{OB'}=\sqrt{36-4k^2}$

$\overline{B'A'}=\overline{BD}=\sqrt{36-k^2}$



$\therefore \angle A'B'O=90^\circ$

$36-k^2=36-9k^2+36-4k^2$, $k^2=3$, $\overline{OA'}=3$, $\overline{OB'}=2\sqrt{6}$

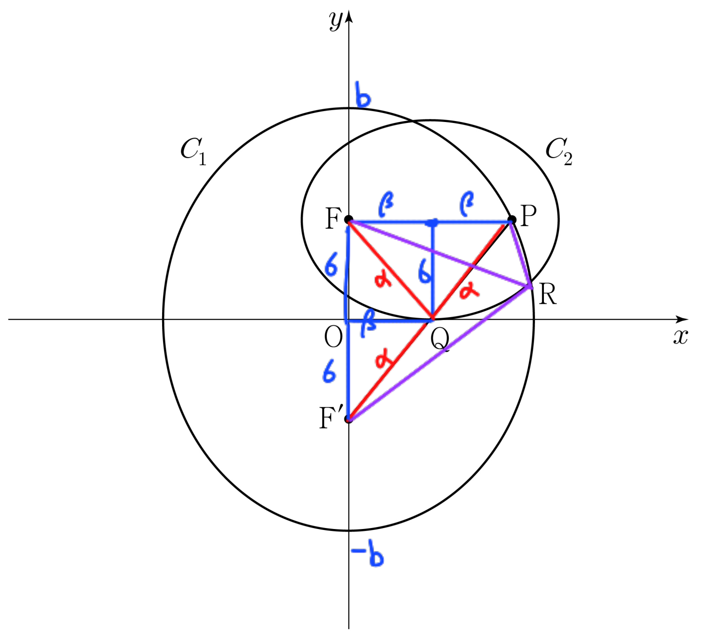
$\cos\theta=\frac{\triangle OA'B'}{\triangle OAB}=\frac{\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot3}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2}=\frac{3\sqrt{6}}{9\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

단답형

29. 두 점 F(0, 6), F′(0, −6)을 초점으로 하는 타원 C_1에 대하여 점 F를 지나고 x축과 평행한 직선이 타원 C_1과 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P, 선분 PF′과 x축이 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 P, F를 초점으로 하고 점 Q가 꼭짓점인 타원 C_2에 대하여 두 타원 C_1, C_2가 만나는 점 중 x축에 가까운 점을 R이라 하자. $\overline{\mathrm{F'R}}-\overline{\mathrm{PR}}=7\sqrt{2}$일 때, 두 타원 C_1, C_2의 장축의 길이의 곱을 구하시오. [4점]

$\boxed{396}$

$2b\times2\alpha$



$\overline{OQ}=\beta$, $\overline{F'Q}=\alpha$ $\alpha^2-\beta^2=36$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2b \Rightarrow 2\alpha+2\beta=2b$

$\overline{F'R}+\overline{FR}=2b$

$-\ \overline{PR}+\overline{FR}=2\alpha$

$\overline{F'R}-\overline{PR}=7\sqrt2=2b-2\alpha=2\beta$ $\therefore \beta=\frac{7}{2}\sqrt2$

$\alpha=\frac{11}{2}\sqrt2$

$b=9\sqrt2$

$\Rightarrow 2b\times2\alpha=4b\alpha=396$

30. 좌표평면에 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=8\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BC}}=16$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P, 선분 BC 위의 점 Q, 선분 CA 위의 점 R이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{RC}}+\overrightarrow{\mathrm{RQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2$

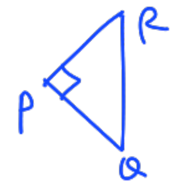
$|3\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$을 만족시키는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. (단, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|>0$) [4점]

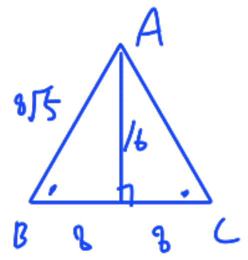
$\boxed{69}$

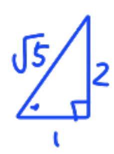
BQ 중점 M, CQ 중점 N (가) $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ $PM\perp BC$

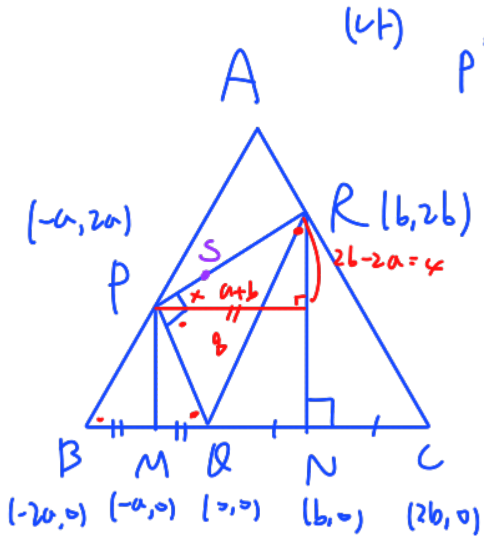
$\overrightarrow{RN}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ $RN\perp BC$

(나)









$a+b=8$

$b-a=2$

$\therefore b=5,\ a=3$

B(−6, 0), P(−3, 6), R(5, 10), $\overline{PR}=4\sqrt5$

$\left|\frac{3\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XR}}{3+1}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PR}}{4}\right|=\sqrt5$

$|\overrightarrow{XS}|$, S는 PR의 1:3 내분점

S(−1, 7), $|\overrightarrow{XS}|=\sqrt5$

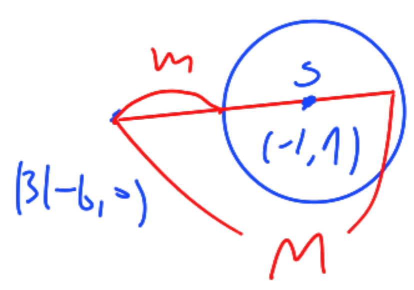
$(x+1)^2+(y-7)^2=5$ 위의 점 : X

$\overline{BS}=\sqrt{74}$

$M=\sqrt{74}+\sqrt5$

$m=\sqrt{74}-\sqrt5$

$\therefore M\times m=69$



＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.