수학I

1. 38	2. ②	3. ②	4. 148	5. ②
6. ①	7. ③	8. 375	9. 121	10. ②
11. ②	12. ②	13. ⑤	14. ③	15. 4
16. ①	17. ⑤	18. ②	19. ③	20. 51
21. ③	22. ③	23. ③	24. ⑤	25. 60
26. ②	27. ④	28. ④	29. ④	30. 96
31. ④	32. ③	33. ③	34. 82	35. ③
36. ②	37. ①	38. ②	39. ⑤	40. ③

수학II

41. ④	42. 2	43. ②	44. ③	45. ③
46. ⑤	47. ①	48. ④	49. ⑤	50. ①
51. 287	52. 91	53. ①	54. 14	55. 6
56. 2	57. 6	58. 40	59. ②	60. ③
61. ①	62. 9	63. 120	64. 54	65. ③
66. ④	67. 30	68. 13	69. 24	70. ③
71. 9	72. 25	73. 84	74. ②	75. ①
76. ③	77. ①	78. ②	79. 40	80. 2

미적분

81. ②	82. 1	83. ②	84. 19	85. 8
86. ⑤	87. ②	88. 340	89. 81	90. ③
91. 25	92. ②	93. ④	94. ③	95. ④
96. ①	97. ⑤	98. 4	99. ①	100. ④
101. ②	102. ①	103. ①	104. 30	105. 24
106. 100	107. ③	108. 50	109. ②	110. 7
111. 19	112. ②	113. ①	114. 69	115. ④
116. ②	117. ⑤	118. 16	119. ③	120. ④
121. 11	122. 110	123. 192	124. ①	125. ②
126. ①	127. ②	128. 36	129. ⑤	130. ①
131. 14				

※ 빠른 정답에 빨간색으로 표시한 번호는 지면해설이 제공되지 않습니다. 요청하시면 손해설/지면해설 둘 중 적어도 하나의 형태로 제공해드립니다. (추후에 지면해설에 추가될 수도 있음)

※ 지면해설의 '그림'은 충분히 스스로 그려볼 수 있는 정도라고 생각합니다. 물론 요청하시면 그려드리겠습니다.

수학I

1. 38 / 2025 응애모 2회 20번

[성취기준] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
예상 정답률 : 미적 30%, 확통 10% 이하

$n<10$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $\log\frac{n}{10}<0$ 이다.

$\therefore n=2,\ 4,\ 6,\ 8$ 일 때, $f(n)=0$

$n=10$ 일 때, $\log\frac{10}{10}=0$ 이므로 $f(10)=1$ 이다.

$n>10$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $\log\frac{n}{10}>0$ 이다.

$\therefore n=12,\ 14,\ 16,\ \cdots$ 일 때, $f(n)=2$

또한, $n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)=1$ 이다.

따라서 $\sum_{n=2}^{m} f(n)$ 을 나열하면 다음과 같다.

$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,$

$6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 17,\ 18,\ 20,\ \cdots$

$\therefore m=2,\ 3,\ 16,\ 17$ 일 때 $\sum_{n=2}^{m} f(n)=m-2$, $\sum_{n=2}^{18} f(n)=17$ 이고,

$m>18$ 인 자연수 m 에 대하여 $f(m)=1$ 또는 $f(m)=2$ 이므로

$\sum_{n=2}^{m} f(n)=m-2$ 를 만족시키는 18 이상의 자연수 m 은 존재하지 않는다.

따라서 모든 자연수 m 의 값의 합은 $2+3+16+17=38$ 이다.

2. ② / 2024 응애모 2회 13번 변형

[성취기준] 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
예상 정답률 : 미적 40%, 확통 25%

$n=3,\ 5,\ 7,\ 9$ 일 때 $f(n)=1$ 이므로 조건에 의하여

$f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=7$

이다.

함수 $y=|a-x|(b-x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

그림

자연수 n 에 대하여 $n\le b$ 일 때 $|a-n|(b-n)\ge 0$ 이고
$n>b$ 일 때 $|a-n|(b-n)<0$ 이므로 다음의 경우가 가능하다.

i) $f(2)=1,\ f(4)=f(6)=f(8)=2,\ f(10)=0$; $a=2,\ b=9$

ii) $f(4)=1,\ f(2)=f(6)=f(8)=2,\ f(10)=0$; $a=4,\ b=9$

iii) $f(6)=1,\ f(2)=f(4)=f(8)=2,\ f(10)=0$; $a=6,\ b=9$

iv) $f(8)=1,\ f(2)=f(4)=f(6)=2,\ f(10)=0$;
a 는 8 이하의 홀수, $b=8$ 또는 a 는 8 이하의 짝수, $b=9$

i) ~ iv) 에서 b 의 값은 8 또는 9 이고, 그 곱은 72 이다.

[comment] 1번과 2번 같은 거듭제곱근 문제는 다음을 기억하자.

실수 a에 대하여
1) a의 (홀수)제곱근 중 실수인 것의 개수는 항상 1
2) a의 (짝수)제곱근 중 실수인 것의 개수는 a의 부호에 따라 0, 1, 2

+ : <2106가12>, <25사관12>

3. ② / 2024 응애모 1회 7번
[성취기준] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

$6^a=5$에서 $5^{\frac{1}{a}}=6$, $3^b=5$에서 $5^{\frac{1}{b}}=3$이다.

$$\therefore 25^{\frac{b-a}{ab}}=5^{\frac{2}{a}-\frac{2}{b}}=\frac{6^2}{3^2}=4$$

4. 148 / 2025 응애모 3회 21번
[성취기준] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

상수 a에 대하여 $f(x)=x^2+ax+4$로 놓자.
$\log_2 \frac{1}{f(x)}=-\log_2 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 $f(x)$의 값은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\cdots$이다.
조건 (나)에 의하여 세 방정식

$$f(x)=\frac{1}{2},\ f(x)=\frac{1}{4},\ f(x)=\frac{1}{8}$$

의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 방정식 $f(x)=\frac{1}{16}$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

그림

즉, 함수

$$f(x)=x^2+ax+4=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+4-\frac{a^2}{4}$$

의 최솟값이 $\frac{1}{16}$이므로
$a^2=\frac{63}{16}$, $a=\frac{3}{4}\sqrt{7}$ 또는 $a=-\frac{3}{4}\sqrt{7}$이다.
따라서 $f(4)=20+4a$의 값의 곱은
$(20+3\sqrt{7})(20-3\sqrt{7})=148$이다.

[comment] 로그의 성질을 적절히 이용하여 보기 편한 대로 바꾸자.
+ : <1503A29>, <2111가27>

5. ②
[성취기준] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
예상 정답률 : 미적 50%, 확통 30% 이하

실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|4^x-2|+2=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$, $|2^{-x}-2|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하면 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<2)\\ 1 & (t=2)\\ 2 & (2<t<4)\\ 1 & (t\ge 4)\end{cases},\quad h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0)\\ 2 & (0<t<2)\\ 1 & (t\ge 2)\end{cases}$$

그림 그림

i) $0<t<2$일 때 ; x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

$$|2^{b-a}-2|\ge 2,\quad b\ge a+2$$

이어야 한다.

그림

ii) $t=2$일 때 ; 방정식 $|4^x-2|+2=2$의 실근이 $x=\frac{1}{2}$이므로 모든 자연수 a에 대하여 $x<a$에서 x에 대한 방정식 $f(x)=2$는 한 실근을 갖는다.
따라서 $x\ge a$에서 방정식 $f(x)=2$는 한 실근을 가져야 하고, i)과 마찬가지로 $b\ge a+2$를 얻는다.

그림

iii) $2<t<4$일 때 ; 모든 자연수 a에 대하여, $x<a$에서 x에 대한 방정식 $f(x)=t$는 서로 다른 두 실근을 가지므로 $x\ge a$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나지 않아야 한다.

그림

$$\therefore |2^{b-a}-2|\le 2,\quad b\le a+2$$

i), ii), iii)에서 $b=a+2$이고 $a+b$의 최솟값은 4

+ : <231121>, <240513>

6. ① / 2025 응애모 2회 12번 변형
[성취기준] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

두 함수

$$y=(\sqrt{2})^{x+a}+a\,(x<0),\quad y=(\sqrt{2})^{-x+a}-a\,(x\ge 0)$$

의 치역은 각각

$\{y \mid a < y < (\sqrt{2})^a + a\}$, $\{y \mid -a < y \le (\sqrt{2})^a - a\}$

이다. a가 자연수이므로 $a > (\sqrt{2})^a - a$일 때 함수 $f(x)$의 치역은

$\{y \mid -a < y \le (\sqrt{2})^a - a\} \cup \{y \mid a < y < (\sqrt{2})^a + a\}$

이고, $a \le (\sqrt{2})^a - a$일 때 함수 $f(x)$의 치역은

$\{y \mid -a < y < (\sqrt{2})^a + a\}$

이다. $a=1$부터 자연수를 차례대로 대입해보면서

$a=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$일 때 $a > (\sqrt{2})^a - a$,

$a=8,\ 9,\ \cdots$일 때 $a \le (\sqrt{2})^a - a$

임을 알 수 있다.

i) $a=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$일 때 ; a가 짝수인 경우, 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 집합은

$\{-a+1, \cdots, (\sqrt{2})^a - a\} \cup \{a+1, \cdots, (\sqrt{2})^a + a - 1\}$

이다. 따라서 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 개수는

$[\{(\sqrt{2})^a - a\} - (-a)] + [\{(\sqrt{2})^a + a - 1\} - a]$

$= 2 \times (\sqrt{2})^a - 1$

이다.

$4 \le 2 \times (\sqrt{2})^a - 1 \le 60$, $\therefore a = 4,\ 6$

a가 홀수인 경우, 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 집합은 $m < (\sqrt{2})^a < m+1$인 정수 m에 대하여

$\{-a+1, \cdots, m-a\} \cup \{a+1, \cdots, m+a\}$

이다. 따라서 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 개수는

$(m)+(m) = 2m$

이다.

$4 \le 2m \le 60$, $2 \le m \le 30$

$a=1$일 때, $m < \sqrt{2} < m+1$에서 $m=1$이다.

$a=3$일 때, $m < 2\sqrt{2} < m+1$에서 $m=2$이다.

$a=5$일 때, $m < 4\sqrt{2} < m+1$에서 $m=5$이다.

$a=7$일 때, $m < 8\sqrt{2} < m+1$에서 $m=11$이다.

$\therefore a = 3,\ 5,\ 7$

ii) $a=8,\ 9,\ \cdots$일 때 ; a가 짝수인 경우, 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 집합은

$\{-a+1, \cdots, (\sqrt{2})^a + a - 1\}$

이다. 따라서 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 개수는

$\{(\sqrt{2})^a + a - 1\} - (-a) = (\sqrt{2})^a + 2a - 1$

이고, a가 증가하면 이 값은 증가한다.

$a=8$일 때, $(\sqrt{2})^8 + 16 - 1 = 31$이다.

$a=10$일 때, $(\sqrt{2})^{10} + 20 - 1 = 51$이다.

$a=12$일 때, $(\sqrt{2})^{12} + 24 - 1 = 87$이다.

$\therefore a = 8,\ 10$

a가 홀수인 경우, 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 집합은 $m < (\sqrt{2})^a < m+1$인 정수 m에 대하여

$\{-a+1, \cdots, m+a\}$

이다. 따라서 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수인 것의 개수는

$(m+a) - (-a) = m + 2a$

이고, a의 값이 증가하면 이 값은 증가한다.

$a=9$일 때, $22 < 2 \times 8\sqrt{2} < 24$에서 $4 \le m + 2a \le 60$이다.

$a=11$일 때, $44 < 4 \times 8\sqrt{2} < 48$에서 $m + 2a > 60$이다.

$\therefore a = 9$

i), ii)에서 조건을 만족시키는 a는 $3,\ 4,\ \cdots,\ 10$이고,
그 개수는 8이다.

[comment] $f(x)$의 $x<0$, $x \ge 0$ 각각에서의 치역이 겹치는 경우와 겹치지 않는 경우를 나누어서 치역의 원소 중 정수인 것의 개수를 세어야 한다. 경우를 나누지 않으면 $a=10$을 빼먹을지도.
원본 문제는 경우를 나누지 않더라도 틀리지 않게끔 냈고, 이 문제는 경우를 나누지 못했더라도 선지를 보고 다시 점검할 수 있게끔 했다.
+ : <210313>, <240914>

7. ③ / 2025 응애모 3회 9번

[성취기준] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

두 곡선이 점 $(1, 4)$에서만 만나므로 방정식 $4^x = 2^{x+a} - b$의 실근은 $x=1$뿐이다.

$2^x = t\ (t>0)$라 하면 방정식

$t^2 - 2^a t + b = 0 \quad \cdots\ (*)$

은 t에 대한 이차방정식이고, 이 방정식의 실근 중 $t=2$가 존재하며 양수인 다른 근은 존재하지 않는다.

$(*)$의 (두 근의 곱)$=b>0$이므로 방정식 $t^2 - 2^a t + b = 0$은 중근 $t=2$를 갖는다.

$\therefore 2^a = 4$, $a=2$, $b=4$

$a+b=6$

[comment] 지수함수의 그래프 및 지수함수를 평행이동시킨 곡선끼리 한 점에서 만난다...?
+ : <22사관13>, <220321>

8. 375

[성취기준] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

그림

두 점 A, B의 좌표는

$A(1-b,\ 0)$, $B(0,\ \log_a b)$

이다. 두 직선 AB, BC가 수직이고 $\overline{OC}=4\times\overline{OA}=4(b-1)$이므로 점 C의 좌표는

$C(4(b-1),\ 0)$

이고, 두 삼각형 AOB, OBC가 닮음이므로

$\overline{OA} : \overline{OB}=\overline{OB} : \overline{OC}\quad \therefore \overline{OB}=\log_a b=2(b-1)$

점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 OAB, HCD는 닮음이므로 점 D의 좌표는

$D(4(b-1)+2(b-1),\ 4(b-1))$

이다. 점 D가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\log_a\{(6(b-1)+b\}=\log_a(7b-6)=4(b-1)$

이다.

$\therefore 2\times\overline{OB}=\overline{DH}$; $2\log_a b=\log_a(7b-6)$, $b=6\ (\because b>1)$

세 점 A, B, C의 좌표는

$A(-5,\ 0)$, $B(0,\ 10)$, $C(20,\ 0)$

이고,

(삼각형 BCD의 넓이)$=2\times$(삼각형 ABC의 넓이)

이므로 사각형 BACD의 넓이는

$3\times\left\{\frac{1}{2}\times25\times10\right\}=375$이다.

그림

[comment] 도형의 넓이를 어떻게 계산하는 게 좋을지 잘 생각해보자.
삼각형 BCD가 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형을 발견하는 것도 좋다.
+ : <220921>, <2007가27>

9. 121

[성취기준] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 35%, 확통 15% 이하

부등식 $\log_2 f(x)\ge 0$의 해가 $1\le x\le 2$이므로 0보다 작은 상수 a에 대하여

$f(x)=a(x-1)(x-2)+1$

로 놓을 수 있다.
부등식 $\log_2 f(x)\ge\log_2(x-1)$의 해는

$x>1$, $f(x)>0$이고 $f(x)\ge x-1$

$\Rightarrow x>1$, $f(x)>0$이고 $a(x-1)(x-2)+1\ge x-1$

$\Rightarrow x>1$, $f(x)>0$이고 $(x-2)\{a(x-1)-1\}\ge 0$

이때, $1<x\le 2$에서 $f(x)>0$이고, 방정식 $(x-2)\{a(x-1)-1\}=0$의 해가 $x=2$ 또는 $x=1+\frac{1}{a}$에서 $1+\frac{1}{a}<1$이므로, 부등식 $\log_2 f(x)\ge\log_2(x-1)$의 해는

$x>1$, $f(x)>0$, $1+\frac{1}{a}\le x\le 2$에서 $1<x\le 2$이다.

그림

$\therefore \alpha=1$

방정식 $f(x)=-x+3$의 해는 $x=2$ 또는 $x=1-\frac{1}{a}$이므로
부등식 $\log_2 f(x)\ge\log_2(-x+3)$의 해는

$a<-1$일 때 ; $1<1-\frac{1}{a}<2$이고

$x<3$, $f(x)>0$, $1-\frac{1}{a}\le x\le 2$에서 $1-\frac{1}{a}\le x\le 2$

$-1\le a<-\frac{1}{2}$일 때 ; $2\le 1-\frac{1}{a}<3$이고

$x<3$, $f(x)>0$, $2\le x\le 1-\frac{1}{a}$에서 $2\le x\le 1-\frac{1}{a}$

$-\frac{1}{2}\le a<0$일 때 ; $1-\frac{1}{a}\ge 3$이고

$x<3$, $f(x)>0$, $2\le x\le 1-\frac{1}{a}$에서 $2\le x<3$

이다.

$\therefore a<-1$이고 $\beta=1-\frac{1}{a}$

$\alpha+\beta=2-\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$이므로 $a=-2$이고

$f(x)=-2(x-1)(x-2)+1$이다.

$\therefore \{f(4)\}^2=121$

[comment] 진수조건은 제일 먼저 체크하기...?
+ : <2006가25>, <250614>

10. ②, 해설 제공 ×

11. ②

[성취기준] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 45%, 확통 30% 이하

두 점 A, B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A′, B′이라 하면 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 두 점 A′, B′에서 만나고, $\overline{AB}=\overline{A'B'}$이다.
두 점 A′, B′을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼

평행이동한 점을 각각 A$''$, B$''$이라 하면 곡선 $y=g(x-p)+q$와 직선 $y=\frac{1}{2}(x-p)+q$는 두 점 A$''$, B$''$에서 만나고,

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A''B''}}$이다.

$\frac{q}{p}>\frac{1}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A''B''}}<\overline{\mathrm{CD}}$이고,

$\frac{q}{p}<\frac{1}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A''B''}}>\overline{\mathrm{CD}}$이다.

$\frac{q}{p}=\frac{1}{2}$일 때, 점 A$''$과 점 C가 일치하고, 점 B$''$과 점 D가 일치하므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A''B''}}=\overline{\mathrm{CD}}$이다.

$\frac{q}{p}>\frac{1}{2}$일 때 다음의 그림을 참고하자.

그림

점 A의 x좌표를 α라 하면 점 A의 좌표는 $(\alpha, 2\alpha)$이다.

점 C는 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이고, 점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로

$\mathrm{C}(4\alpha, 2\alpha)$, $\mathrm{D}(8\alpha, 4\alpha)$

이다.

점 B는 $y=2x$ 위의 점이고, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{5}\alpha$이므로

$\mathrm{B}(6\alpha, 3\alpha)$

이다.

점 A, B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$a^{\alpha}=2\alpha,\ a^{3\alpha}=6\alpha\ ;\ \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ a=3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

점 C는 점 A$'(2\alpha, \alpha)$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점이므로

$$p=2\alpha=\sqrt{3},\ q=\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

$$\therefore p\times a^{q}=\sqrt{3}\times 3^{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=3$$

[comment] '평행이동의 기준선'을 따라 평행이동!
+ : <1703가27>, <EBSi 220080051>

12. ②/2025 응애모 1회 13번

[성취기준] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 40%, 확통 25%

sol 1>

그림

양수 p에 대하여 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(p, 2^{-p})$로 놓자.

삼각형 ABP의 무게중심 $\mathrm{G}\left(\frac{p+1}{3}, \frac{2^{-p}+1}{3}\right)$이 곡선 $y=2^{-x}$ 위의 점이므로

$$2^{-\frac{p+1}{3}}=\frac{2^{-p}+1}{3}\quad\cdots\ (*)$$

이다.

$2^{-\frac{p+1}{3}}=t$라 하면 $2^{-(p+1)}=t^3$이고, 점 P의 y좌표는 $2^{-p}=2t^3\left(0<2t^3<1\right)$이다.

$$(*)\ ;\ t=\frac{2t^3+1}{3}$$

$$2t^3-3t+1=(t-1)(2t^2+2t-1)=0$$

$$t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

이때,

$$2t^3=3t-1=3\sqrt{3}-5<1$$

이다.

따라서 두 점 P와 G의 y좌표의 차는

$$\left|2^{-p}-2^{-\frac{3p+1}{2}}\right|=\left|2t^3-t\right|$$
$$=\left|(3t-1)-t\right|=\left|1-2t\right|$$
$$=\left|2-\sqrt{3}\right|$$
$$=2-\sqrt{3}$$

sol 2>

그림

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

점 G의 좌표를 $\mathrm{G}\left(\alpha, 2^{-\alpha}\right)$라 하면 점 G는 선분 PM을 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(3\alpha-1, 2^{-(3\alpha-1)}\right)\left(\alpha>\frac{1}{3}\right)$$

이다.

$$\therefore \frac{1+2^{-(3\alpha-1)}}{3}=2^{-\alpha}\quad\cdots\ (**)$$

$2^{-\alpha}=t\left(0<t<2^{-\frac{1}{3}}\right)$라 하면 …

[comment] 치환할 때 범위 주의하기.
점 G의 y좌표를 세제곱해서 점 P의 y좌표를 구하려 한 사람이 분명 있을 텐데... 그럴 필요가 없다.
+ : <고1 210914>, <24사관15>

13. ⑤, 해설 제공 ×/2024 응애모 1회 15번 변형

14. ③

[성취기준] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

$\sin^2\theta = t\,(0 < t < 1)$라 하면

$$t + \frac{1}{1-t} = 2\left\{(1-t) + \frac{1}{t}\right\}$$

$$\frac{-t^2+t+1}{1-t} = 2 \times \frac{-t^2+t+1}{t}$$

$$t = 2(1-t)$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

[comment] 통분이 나을까? 분모에 있는 식을 전부 곱하는 게 나을까?

+ : <250612>

15. 4

[성취기준] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 $k^2 - |4k-3|$이다.

$k < \frac{3}{4}$ 일 때

; $k^2 + (4k-3) = -1$

$$k^2 + 4k - 2 = 0$$

$$k = -2 \pm \sqrt{6}$$

이때, $\left(2+\frac{3}{4}\right)^2 > 6$ 이므로 $-2+\sqrt{6} < \frac{3}{4}$ 이다.

$k \geq \frac{3}{4}$ 일 때 ; $k^2 - (4k-3) = -1,\ k = 2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $a = (-4) + 2 = -2$이고, $a^2 = 4$

[comment] 절댓값붙이기!

$y = x^2 - |4x-3|$ 의 그래프를 이용해도 좋다.

+ : <고2 1906나29>

16. ①/2025 응애모 2회 10번

[성취기준] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

(가)에서

$$f(x+4\pi) = f(x)$$

; $\sin(ax + 4a\pi) = \sin ax \quad \Rightarrow \quad 4a\pi = 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \cdots$

$\therefore a = \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \cdots$

함수 $f(x)$는 $x = \frac{\pi}{2a},\ \frac{5\pi}{2a},\ \frac{9\pi}{2a},\ \cdots$에서 최댓값 1을 가지므로

(나)에서

$$0 < \frac{\pi}{2a} \leq \frac{2}{n}\pi,\ a \geq \frac{n}{4}$$

또는 $0 < \frac{5\pi}{2a} \leq \frac{2}{n}\pi,\ a \geq \frac{5}{4}n$

또는 $0 < \frac{9\pi}{2a} \leq \frac{2}{n}\pi,\ a \geq \frac{9}{4}n$

$\vdots$

$\therefore a \geq \frac{n}{4}$

$n=2$ 일 때 ; $a \geq \frac{1}{2},\quad \therefore a_2 = \frac{1}{2}$

$n=7$ 일 때 ; $a \geq \frac{7}{4},\quad \therefore a_7 = 2$

따라서 $a_2 + a_7 = \frac{5}{2}$이다.

[comment] 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p) = f(x)$를 만족시키는 **가장 작은 양수** p를 함수 f의 주기라 한다.

(가)만으로 함수 f의 '주기'가 4π임을 끌어낼 수는 없다.

(주기)×(자연수)=4π임에 주의하자.

함수 f의 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이고 이 값이 집합 $\left\{\frac{4\pi}{k}\,\middle|\,k\text{는 자연수}\right\}$의 원소라고 이해해도 좋다.

+ : <2004나15>, <EBSi 240080085>, <251110>

17. ⑤/2025 응애모 1회 12번

[성취기준] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

양수 k에 대하여 두 함수

$$y = \cos x\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{9}\right),\quad y = \sin(kx)$$

의 그래프는 그림과 같다.

그림

$\cos\frac{\pi}{9} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \sin\frac{7}{18}\pi$이고, $x \geq 0$에서 방정식

$\sin(kx) = \sin\frac{7}{18}\pi$의 근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$$x = \frac{7}{18k}\pi,\ 2\times\frac{\pi}{2k} - \frac{7}{18k}\pi = \frac{11}{18k}\pi,\ \frac{2}{k}\pi + \frac{7}{18k}\pi = \frac{43}{18k}\pi,\ \cdots$$

이다.

그림과 같이 $\frac{11}{18k}\pi \le \frac{\pi}{9}$이고 $\frac{43}{18k}\pi > \frac{\pi}{9}$일 때, 방정식 $\cos x = \sin(kx)$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

그림

$$\therefore \frac{11}{18k}\pi \le \frac{\pi}{9} < \frac{43}{18k}\pi,\quad \frac{11}{2} \le k < \frac{43}{2}$$

$$\alpha = \frac{11}{2},\quad \beta = \frac{43}{2}$$

$$\therefore \beta - \alpha = 16$$

+ : <240909>, <22경찰대19>

18. ②

[성취기준] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
예상 정답률 : 미적 50%, 확통 30% 이하

$0 < x < \frac{\pi}{2}$에서 방정식 $|\tan x| = \cos x$의 실근을 α라 할 때,

$$|\tan\alpha| = \cos\alpha\ ;\ \sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0,\quad \sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

이다.

$$\therefore \left(\frac{S_2}{S_1}+1\right)^2 = \left\{\frac{\frac{1}{2}\times 2\alpha\times(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\times 2\alpha\times\cos\alpha}+1\right\}^2$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\qquad (\because \sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0)$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[comment] 처음에 문제를 공개했을 때, 생각했던 것보다 정답률이 낮아서 놀랐다. 함정을 판 건 아닌데 실제 답을 제곱한 값을 정답이라 한 사람이 꽤 있었다.
$\cos\alpha$를 이용하여 풀이를 전개했지만, 그 대신 $|\tan\alpha|$를 써도 좋다.

19. ③

[성취기준] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
예상 정답률 : 미적 50%, 확통 30% 이하

sol 1>

선분 OP의 중점을 $\mathrm{M}\left(0,\ \frac{a}{2}\sin b\right)$라 하자.

두 삼각형 PAB와 OAB의 외접원은 선분 AB를 지름으로 하고, 점 M을 지나고 y축에 수직인 직선과 선분 AB가 만나는 점을 중심으로 하는 원이다.

그림

점 M의 y좌표와 두 점 A, B의 중점의 y좌표가 같으므로

$$\frac{a}{2}\sin b = \frac{a+\left(-\frac{a}{2}\right)}{2}\ ;\ \sin b = \frac{1}{2},\ b = \frac{\pi}{6}$$

두 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3}, a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{a}{2}\right)$에 대하여 두 직선 OA, OB가 수직이므로

$$\frac{a}{\frac{\pi}{3}}\times\frac{-\frac{a}{2}}{\frac{5}{3}\pi} = -1\ ;\ a^2 = \frac{10}{9}\pi^2$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 40$$

sol 2>

조건에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2\ ;\ \frac{16}{9}\pi^2 + \frac{9}{4}a^2 = \left(\frac{\pi^2}{9}+a^2\right)+\left(\frac{25}{9}\pi^2+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\therefore a^2 = \frac{10}{9}\pi^2$$

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2$$

$$;\ \frac{16}{9}\pi^2 + \frac{9}{4}a^2 = \left\{\frac{\pi^2}{9}+a^2(1-\sin b)^2\right\}+\left\{\frac{25}{9}\pi^2+a^2\left(\frac{1}{2}+\sin b\right)^2\right\}$$

$$a^2(1+\sin b - 2\sin^2 b) = \frac{10}{9}\pi^2(1+\sin b-2\sin^2 b) = \frac{10}{9}\pi^2$$

$$\sin b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b = \frac{\pi}{6}$$

따라서 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 40$이다.

[comment] 현의 수직이등분선이 원의 중심을 지남을 이용해도 좋고, 식으로 밀어도 좋다.
+ : <230413>, <24사관21>, <2103미적29>

20. 51 / 2024 응애모 1회 21번

[성취기준] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

두 정수 n, m에 대하여 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=\dfrac{\pi}{3}+n\pi$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=\dfrac{m}{k}\pi$에 대하여 대칭이다.
따라서 (가)에 의하여 k는 3의 배수이다.
함수 $f(x)$의 주기가 2π이므로 $f\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$의 값은 k를 4로 나눈 나머지에 따라 달라진다.
정수 n에 대하여

$k=4n$일 때, $f\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

$k=4n+1$일 때, $f\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$k=4n+2$일 때, $f\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi+\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$이다.

$k=4n+3$일 때, $f\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi+\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

또한,

k가 짝수일 때 $g\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{k^2\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이고,

k가 홀수일 때 $g\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{k^2\pi}{2}\right)=0$이므로 4의 배수가 아닌 k에 대하여 (나)가 성립한다.

$\therefore k=3,\ 6,\ 9,\ 15,\ 18$이고 그 합은 51이다.

[comment] 삼각함수가 포함된 방정식은 '주기성'과 '대칭성'을 고려하자.
+ : <220615>, <2109가21>(도전!)

21. ③

[성취기준] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

그림

삼각형 AMP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{MP}}^2-2\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MP}}\times\cos(\angle\mathrm{AMP})$$

이다. 삼각형 PMN이 정삼각형이고 $\angle\mathrm{AMP}=\angle\mathrm{BNM}$이므로,
삼각형 BMN에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{MP}}=\sqrt{7},\quad \cos(\angle\mathrm{BNM})=\cos(\angle\mathrm{AMP})=\frac{\sqrt{7}}{14}$$

이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{13}$$

22. ③ / 2024 응애모 1회 11번

[성취기준] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

그림

조건에 의하여 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EB}}=1$이다.
$\angle\mathrm{DEC}+\angle\mathrm{BEC}=\pi$이므로 사인법칙에 의하여

$$S_1 : S_2=\left\{\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{DEC})}\right\}^2 : \left\{\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BEC})}\right\}^2$$

$$=\overline{\mathrm{CD}}^2 : \overline{\mathrm{BC}}^2$$

$$=5:9$$

상수 $k(k>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=3k$, $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{5}k$로 두면
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=5k^2+9k^2-2\times\sqrt{5}k\times3k\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=2k^2=4$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{3}{2}\times(\text{삼각형 BCD의 넓이})=\frac{3}{2}\times\left\{\frac{1}{2}\times\sqrt{5}k\times3k\times\sin(\angle\mathrm{BCD})\right\}$$

$$=\frac{3}{4}k^2$$

$$=\frac{9}{2}$$

이다.

[comment] 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

로부터 다음 두 가지를 알 수 있다.

1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$; (변 길이 비)=(사인값 비)

2) $\dfrac{a}{\sin A}=2R$; 외접원의 (반)지름의 길이

+ : <21사관나19>, <250610>

23. ③

[성취기준] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 50% 이상, 확통 30% 이하

조건 (가)를 만족시키는 점 P의 자취는 그림과 같이 선분 AO를 지름으로 하는 반원의 호에서 점 A와 점 O를 제외한 곡선 C이다.

그림

조건 (나)를 만족시키는 점 P의 자취는 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 반원의 호에서 지름의 양 끝점을 제외한 곡선 C' 이다.

그림

따라서 점 P는 두 곡선 C와 C' 의 교점이고,

$\cos(\angle \mathrm{AOP}) = \frac{1}{4}$ 이다.

그림

삼각형 BOP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BP}}^2 = 16+1+2\times4\times1\times\frac{1}{4}$$

$$=19$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{19}$$

[comment] 고1수학!!! 251114에서 넓이의 최댓값을 못 구하는 사람이 은근 많다.
+ : <251114>

24. ⑤, 해설 제공 ×

25. 60 / 2025 응애모 1회 21번
[성취기준] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 20%, 확통 10% 이하

조건에 의하여 세 점 B, C, D는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원 위의 점이다.

그림

$\overline{\mathrm{AB}} = r\,(r>0)$이라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{BAC}) = 1-\frac{2}{r^2}$$

이고, 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\angle \mathrm{BDC})} = 2r$$

(점 A에서 선분 BC에 수선의 발을 내려도 좋다.)

$$\therefore\ \frac{\cos(\angle \mathrm{BAC})}{\sin(\angle \mathrm{BDC})} = r-\frac{2}{r} = \frac{7}{2}$$

$$2r^2-7r-4=(2r+1)(r-4)=0$$

$$r=4$$

$\angle \mathrm{BDC} = \theta$라 하면 선분 AB와 선분 CD가 평행하므로

$$\angle \mathrm{BCD} = \pi - \angle \mathrm{ABC} = \pi - \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\theta$$

이다.

그림

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = 8$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}^2 = \left(8\times\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 60$$

[comment] 1) 원의 성질을 이용하여 원을 발견할 수 있을까?
+ : <고2 090319>, <230521>

2) 평행선을 이용하여 여각 표시하기.
+ : <210321>

26. ② / 2025 응애모 3회 13번
[성취기준] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 40% 이하, 확통 25%

sol 1>
삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BDC})} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BCD})} = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle \mathrm{DBC})} = 4\sqrt{2}$$

이다.

$$\therefore\ \sin(\angle \mathrm{BDC}) = \sin(\angle \mathrm{DBC}) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos(\angle \mathrm{BDC}) = \cos(\angle \mathrm{DBC}) = \frac{\sqrt{14}}{4} \quad (\because\ \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}})$$

$\overline{\mathrm{BD}} = x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2+4-2\times x\times2\times\frac{\sqrt{14}}{4} = 4\ ;\ x=\sqrt{14}$$

$\angle \mathrm{ABD} = \theta$라 하면 조건에 의하여 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{AD}} = 4\sin\theta$이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$16\sin^2\theta = 2+14-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{14}\times\cos\theta$$

$$;\ \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4},\ \sin\theta = \frac{3}{4}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

(삼각형 ABD의 넓이)+(삼각형 BCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}\times\sqrt{14}\times\frac{3}{4}+2\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{7}$$

sol 2>

그림

삼각형 BCD의 외접원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, $\angle \mathrm{OCH}=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{14}}{4},\quad \overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{7}$$

이다.
점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overline{\mathrm{BH'}}=2\sin\alpha=\frac{\sqrt{14}}{2},\quad \overline{\mathrm{CH'}}=2\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\overline{\mathrm{BD}}=2\times\overline{\mathrm{BH'}}=\sqrt{14}$$

이다.
원에 내접하는 사각형의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{BAD}=\pi-\alpha$이다.
$\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2+2-2\times x\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=14\ ;\ x=3$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

(삼각형 ABD의 넓이)+(삼각형 BCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{14}}{4}+\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{4}\sqrt{7}$$

[comment] 중학교 도형 내용을 최대한 배제하고 사인법칙 & 코사인법칙만으로 풀기!
+ : <220912>, <240920>, <241113>

27. ④ / 2025 응애모 3회 11번
[성취기준] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

(가)에서, a_1, a_2가 둘 다 양수거나 둘 다 음수이다.
(나)에서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=5a_3=10$$
$$\Rightarrow a_3=2$$

이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 자연수)라 하면

$$a_1=2-2d,\quad a_2=2-d,\quad a_{10}=2+7d$$

로 둘 수 있다.

sol 1>
$d=1$일 때, $a_2=0$이므로 (가)에 모순이다.
$d=2$일 때, $a_1=0$이므로 (가)에 모순이다.
$d\geq3$일 때, $a_1<0$, $a_2<0$이므로 (가)를 만족시킨다.
$\therefore a_{10}=2+7d\geq23$

sol 2>

$$a_1\times a_2=(2-2d)(2-d)>0$$
$$\Rightarrow\ d<1\ \text{또는}\ d>2$$

따라서 자연수 d의 최솟값은 3이고 a_{10}의 최솟값은 23이다.

28. ④ / 2024 응애모 2회 10번
[성취기준] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

$S_n=\dfrac{n\{180+(n-1)d\}}{2}$가 n에 대한 이차식이므로 조건에 의하여

$$S_6\geq S_5,\quad S_6\geq S_7$$

만 확인해도 충분하다.
$S_6\geq S_5$; $S_6-S_5=a_6=90+5d\geq0$, $d\geq-18$
$S_6\geq S_7$; $S_7-S_6=a_7=90+6d\leq0$, $d\leq-15$
따라서 조건을 만족시키는 모든 d의 값은

$$-18,\ -17,\ -16,\ -15$$

이고 그 합은 -66이다.

[comment] 이차함수는 최댓값/최솟값을 여러 번 갖지 않는다...
$n=6$ 앞뒤만 확인해줘도 충분.
$S_n-S_{n-1}=a_n$을 평균변화율로 이해하고 그래프를 이용해도 좋다.
+ : <1303A30>, <EBSi 220080145>

29. ④
[성취기준] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

(가)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$|b_n|\geq1$이고, $b_n=|a_n|+1$ 또는 $b_n=-(|a_n|+1)$

이므로 (나)에서

$$b_4<0,\ b_6>0\quad\text{또는}\quad b_4>0,\ b_6<0$$

이어야 한다.
따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_4=d-1,\quad a_6=3d-1$$

이고 $b_4+b_6=0$에서

$$(|a_4|+1)-(|a_6|+1)=0$$

$\Rightarrow \ |a_4| = |a_6|$

$\Rightarrow \ |d-1| = |3d-1|$

$\Rightarrow \ d = \frac{1}{2} \ (\because d \neq 0)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{8} b_k = (b_1+b_2+b_3+b_5+b_7+b_8)+(b_4+b_6)$$
$$= b_1+b_2+b_3+b_5+b_7+b_8$$
$$\leq |b_1|+|b_2|+|b_3|+|b_5|+|b_7|+|b_8|$$
$$= (|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_5|+|a_7|+|a_8|)+6$$
$$= \left(2+\frac{3}{2}+1\right)+\left(0+1+\frac{3}{2}\right)+6 = 13$$

따라서 $\sum_{k=1}^{8} b_k$의 최댓값은 13이다.

+ : <230612>

30. 96

[성취기준] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 30% 이하, 확통 10% 이하

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
(가)에서

$a_1 + a_4 = 2a + 3d = 12$

이고, (나)에서

$(a_4)^2 = a_k \times a_{9-k}$

$\Rightarrow \ (a+3d)^2 = \{a+(k-1)d\} \times \{a+(8-k)d\}$

$\Rightarrow \ d = \frac{a}{9-(k-1)(8-k)}$

이다.
$k=1$ 또는 $k=8$일 때
; $d = \frac{a}{9}$이고, $\frac{7}{3}a = 12$이므로 d는 자연수가 아니다.
$k=2$ 또는 $k=7$일 때
; $d = \frac{a}{3}$이고, $3a = 12$이므로 d는 자연수가 아니다.
$k=3$ 또는 $k=6$일 때
; $d = -a$이고, $-a = 12$이므로 $d = 12$이다.
$k=4$ 또는 $k=5$일 때
; $d = -\frac{a}{3}$이고, $a = 12$이므로 d는 자연수가 아니다.

(이미 a_4, a_4, a_5 또는 a_5, a_5, a_4가 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.)
따라서 $a_n = -12 + 12(n-1)$이고, $a_{10} = 96$이다.

+ : <210721>

31. ④ / 2024 응애모 2회 8번

[성취기준] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

0이 아닌 두 상수 a, r에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$a_n = ar^{n-1}$

로 놓자. (가)에서

$a_{n+2} + \frac{1}{4}a_n = a_{n+1}$

$\Rightarrow ar^{n+1} + \frac{1}{4}ar^{n-1} = ar^n$

$\Rightarrow r^2 - r + \frac{1}{4} = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow r = \frac{1}{2}$

(나)에서

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)a_1$$
$$= \frac{31}{16}a_1 = 31$$

$\therefore a_1 = 16$

따라서 구하는 값은

$a_1 + a_2 = 16 + 8$
$= 24$

32. ③

[성취기준] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

(가)에서 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$
$$= (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n)$$
$$= a_{n+2} - a_n$$

즉, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = 2a_n$이고,

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a_2이고 공비가 2인 등비수열,
수열 $\{a_{2n+1}\}$은 첫째항이 a_3이고 공비가 2인 등비수열이다.
또한 (나)에서 $n=1$일 때 $a_3+a_2=2$이고,

$$S_{10}=a_1+(a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$$
$$=2+15a_3+31a_2=40$$
$$\Rightarrow 15a_3+31a_2=38$$

이므로 둘을 연립하면

$$a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{3}{2}$$

이다.

sol 1> $\therefore \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}a_k$
$$=a_1+(a_3+a_5+a_7+a_9)-(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$$
$$=2+15a_3-31a_2$$
$$=2+\frac{45}{2}-\frac{31}{2}$$
$$=9$$

sol 2> $\therefore \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}a_k$
$$=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+(a_7-a_6)+(a_9-a_8)-a_{10}$$
$$=2+(1+2+4+8)-8$$
$$=9$$

[comment] S_n-S_{n-1}에서 $n\geq 2$이고,
'수열 $\{a_{2n-1}\}$'이 아니라 '수열 $\{a_{2n+1}\}$'임에 주의하자.
주제가 '귀납적으로 정의된 수열'이 아니라 '등비수열'이다... + 문제 중 학평 문제의 해설을 참고하면 좋을 것 같다.
답을 구할 때는 여러 가지 방법이 있겠지만 sol 1에서는 홀수번째 항과 짝수번째 항을 구분해서 각각 더했고, sol 2에서는 $\{a_{2n+1}-a_{2n}\}$이 등비수열임을 이용했다.
+ : <240509>, <250912>, <2109가27>

33. ③ / 2025 응애모 1회 9번
[성취기준] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

조건에 의하여 $1\leq n\leq 4$인 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_n)^2+(a_{10-n})^2=(a_n+a_{10-n})^2-2a_n\times a_{10-n}$$
$$=100-(-1)^{n-1}\times 2n^2$$

이고, $a_5=5$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{9}(a_n)^2=(a_5)^2+\sum_{k=1}^{4}\{(a_k)^2+(a_{10-k})^2\}$$
$$=25+\sum_{k=1}^{4}\{100-(-1)^{k-1}\times 2k^2\}$$
$$=25+400-2\times(1-4+9-16)$$
$$=445$$

34. 82, 해설 제공 ×

35. ③
[성취기준] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

sol 1>
(가)에 의하여

$$a_{12}=a_6-2$$
$$=a_3-4$$

이고, (나)에 의하여

$$a_{15}=-a_7+7$$
$$=-(-a_3+7)+7$$
$$=a_3$$

이다.
조건에 의하여

$$(a_3-4)+a_3=0\ ;\ a_3=2$$
$$\therefore a_1=7-a_3$$
$$=5$$

sol 2>
(가), (나)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}+a_{2n+1}=5,\quad a_{4n+3}=a_n$$

이고, $n=3$일 때 $a_6+a_7=5$이다.
조건에 의하여

$$a_{12}+a_{15}=(a_6-2)+(7-a_7)$$
$$=a_6-a_7+5=0$$

이다.

$$\therefore a_6=0,\ a_7=5\ \Rightarrow\ a_1=5$$

[comment] 주어진 대로 차근차근 하나씩 필요한 가지를 찾아가는 것도 좋고, 주어진 조건 간의 관계를 파악하거나 주기를 찾아내는 것도 좋다.
+ : <2111가21>

36. ②/2024 응애모 1회 13번
[성취기준] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

$$\left(3a_{n+1}-a_n\right)\left(a_{n+1}-a_n-4\right)=0 \quad \cdots \ (*)$$

(*)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n \text{ 또는 } a_{n+1}=a_n+4$$

이다. 모든 자연수 k에 대하여 $\frac{1}{3}k<k+4$임에 주목하자.
a_1+a_2의 값은 $a_2=21$, $a_1=63$일 때 최댓값 84,
$a_2=3$, $a_1=9$일 때 최솟값 12를 갖는다. 따라서

$$\begin{aligned} M&=(63+21)+7+(11+15+19+23+27+31) \\ &=217 \end{aligned}$$

이다. 또한 $\sum_{k=1}^{9}a_k$가 최솟값을 가지려면 a_n이 3의 배수일 때 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$이어야 함에 주목하여 m을 구하자.
$a_3=7$이므로 $a_4=11$이고, $a_5=15 \Rightarrow a_6=5$이다.
$a_6=5$이므로 $a_7=9 \Rightarrow a_8=3 \Rightarrow a_9=1$이다.

$$\begin{aligned} \therefore m&=(9+3)+7+(11+15+5+9+3+1) \\ &=63 \end{aligned}$$

이고 $M-m=154$

[comment] 모든 자연수 k에 대하여 $\frac{1}{3}k<k+4$임을 파악했다면...
+ : <22예시15>, <250922>, <260612>

37. ①/2025 응애모 1회 15번
[성취기준] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_1\times a_n+8 & (a_n\le 0) \\ a_n-2a_1 & (a_n>0) \end{cases} \quad \cdots \ (*)$$

$a_1>0$이므로 (*)에 $n=1$을 대입하면

$$a_2=a_1-2a_1=-a_1$$

이고, $a_2<0$이므로 (*)에 $n=2$를 대입하면

$$a_3=a_1\times a_2+8=8-\left(a_1\right)^2$$

이다. $a_3>0$인 경우에 대하여 (*)에 $n=3$을 대입하면

$$a_4=a_3-2a_1=-\left(a_1\right)^2-2a_1+8$$

이다.
$a_4\le 0$일 때,

$$\begin{aligned} a_5+2a_4&=\left(a_1\times a_4+8\right)+2a_4 \\ &=\left(a_1+2\right)a_4+8 \\ &=\left(a_1+2\right)\left\{-\left(a_1\right)^2-2a_1+8\right\}+8=8 \end{aligned}$$

에서 $a_1=-4$ 또는 $a_1=-2$ 또는 $a_1=2$이다.
$a_4>0$일 때,

$$\begin{aligned} a_5+2a_4&=\left(a_4-2a_1\right)+2a_4 \\ &=3a_4-2a_1 \\ &=-3\left(a_1\right)^2-8a_1+24=8 \end{aligned}$$

에서 $a_1=-4$ 또는 $a_1=\frac{4}{3}$이다.
$a_1=-4$ 또는 $a_1=-2$인 경우, 조건을 만족시키지 않는다.
$a_1=2$인 경우,

$$a_3=8-4=4>0, \quad a_4=0$$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
$a_1=\frac{4}{3}$인 경우,

$$a_3=8-\frac{16}{9}=\frac{56}{9}>0, \quad a_4=\frac{56}{9}-\frac{8}{3}=\frac{32}{9}>0$$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
따라서 모든 a_1의 값은 2, $\frac{4}{3}$이고 그 합은 $\frac{10}{3}$이다.

[comment] 풀이에서는 구한 값이 주어진 조건을 만족하는지 마지막에 확인했는데, 먼저 a_1에 대한 조건을 찾고 a_1이 그 조건을 만족시키는지 확인하는 것도 좋다.
$a_1>0$만으로도 안되는 경우가 전부 걸러지는 게 좀 아쉬운 부분.
(숫자 몇십개 돌려봤는데 예쁜 값을 못찾음...)
'역추적' 풀이를 여기서 쓰진 않았다. 굳이 쓸 필요 없게끔 만들었고, 다른 문제들에서도 굳이 수록하지는 않았다.
2025 응애모 1회의 손풀이를 참고하면 좋을 것 같다.
+ : <240622>, <250622>

38. ②/2025 응애모 3회 15번
[성취기준] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
예상 정답률 : 미적 45%, 확통 30%

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & \left(a_{n+1}<2a_n\right) \\ a_{n+1}-3a_n & \left(a_{n+1}\ge 2a_n\right) \end{cases} \quad \cdots \ (*)$$

(*)에 $n=4$를 대입하면

$$a_6=2=\begin{cases} a_5+1 & \left(a_5<2\right) \\ a_5-3 & \left(a_5\ge 2\right) \end{cases}$$

에서 $a_5=1$ 또는 $a_5=5$이다.

$a_5=1$인 경우, $a_6-2a_5=0$이므로 (*)에 $n=5$를 대입하면

$$a_7=a_6-3a_5=-1$$

이다.
$a_5=5$인 경우, $a_6-2a_5=-8<0$이므로 (*)에 $n=5$를 대입하면

$$a_7=5+2=7$$

이다.
두 양수 x, y에 대하여

$$a_1=x,\quad a_2=y$$

라 하자. (*)에 $n=1$을 대입하면

$$a_3=\begin{cases} x+y & (y<2x) \\ y-3x & (y\ge 2x) \end{cases}$$

이다.
i) $a_5=1$인 경우 ; $a_3<0$이라 가정하면 $a_4-2a_3>0$이므로,
(*)에 $n=3$을 대입하면

$$a_5=a_4-3a_3>a_4=1$$

이다. (모순)
또한 $a_3>0$이라 가정하고 (*)에 $n=3$을 대입하면

$$a_5=1+a_3>1 \text{ 또는 } a_5=1-2a_3<1$$

이다. (모순)

$$\therefore a_3=0=y-3x,\quad y\ge 2x$$

이때

$$a_3-2a_2=(y-3x)-2y<0$$

이므로 (*)에 $n=2$를 대입하면

$$1=0+y \ \Rightarrow\ y=1,\ x=\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은

$$\{a_n\}: \frac{1}{3},\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ -1,\cdots$$

이다.
ii) $a_5=5$인 경우 ; $a_3<0$이라 가정하면 $a_3=y-3x$이고,
$a_4-2a_3>0$이므로 (*)에 $n=3$을 대입하면

$$5=1-3a_3 \Rightarrow a_3=-\frac{4}{3}$$

이다.

$$\therefore y-3x=-\frac{4}{3},\quad y\ge 2x$$

이때 $a_3-2a_2<0$이므로 (*)에 $n=2$를 대입하면

$$1=-\frac{4}{3}+y \ \Rightarrow\ y=\frac{7}{3},\quad x=\frac{11}{9}$$

이고 $y<2x$이다. ($y\ge 2x$와 모순)

$a_3>0$이라 가정하고 (*)에 $n=3$을 대입하면

$$1+a_3=5 \text{ 또는 } 1-3a_3=5$$

에서 $a_3=4$이다.
$y<2x$라 가정하면

$$a_3=x+y=4$$

이고,

$$a_3-2a_2=(x+y)-2y$$
$$=x-y$$

에서 $x<y$인 경우 (*)에 $n=2$를 대입하면

$$1=4+y \ \Rightarrow\ y=-3$$

이다. ($y>0$과 모순)
$x\ge y$인 경우 (*)에 $n=2$를 대입하면

$$1=4-3y \ \Rightarrow\ y=1,\quad x=3$$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은

$$\{a_n\}: 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 7,\cdots$$

이다.
$y\ge 2x$라 가정하면

$$a_3=y-3x=4$$

이고, $a_3-2a_2<0$이므로 (*)에 $n=2$를 대입하면

$$1=4+y \ \Rightarrow\ y=-3$$

이다. ($y>0$과 모순)
$a_3=0$이라 가정하고 (*)에 $n=3$을 대입하면 $5=1$이다. (모순)
i), ii)에서 모든 $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값은 $\frac{13}{3}$, 23이고 그 합은 $\frac{82}{3}$이다.

[comment] 가정과 모순발견의 연속... '역추적'이 더 빠를 수도?
2025 응애모 3회의 손풀이를 참고하자.
+ : <2109나21>, <230315>

39. ⑤
[성취기준] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 40%, 확통 30% 이하

(나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n+1}=a_{n+1}+2n$$

이고, (가)와 (나)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}+a_{2n+1}=2(a_{n+1}+n)$$

이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 모든

자연수 n에 대하여

$$S_{2n+1}-a_1=2(S_{n+1}-a_1)+n^2+n \quad \cdots \ (*)$$

이다. 또한 (가)에 $n=17$을 대입하면

$$a_{34}=4$$

이고, (가) 또는 (나)에 적절한 자연수를 차례대로 대입하여

$$a_{18}=a_{10}=a_6=a_4=a_3=a_2+2 \quad \Rightarrow \quad a_2=2$$

임을 알 수 있다.

sol 1>
(*)에 $n=2$부터 적절한 자연수를 차례대로 대입하면

$$S_3-a_1=2(S_2-a_1)+(1^2+1)=6$$

$$S_5-a_1=2(S_3-a_1)+(2^2+2)=18$$

$$S_9-a_1=2(S_5-a_1)+(4^2+4)=56$$

$$S_{17}-a_1=2(S_9-a_1)+(8^2+8)=184$$

$$S_{33}-a_1=2(S_{17}-a_1)+(16^2+16)=640$$

이다.

$$\therefore \sum_{n=2}^{34}a_n=S_{34}-a_1=(S_{33}-a_1)+a_{34}$$

$$=644$$

sol 2>
(*)에 $n=16$부터 적절한 자연수를 차례대로 대입하여

$$S_{33}-a_1=2(S_{17}-a_1)+(16^2+16)$$

$$S_{17}-a_1=2(S_9-a_1)+(8^2+8)$$

$$S_9-a_1=2(S_5-a_1)+(4^2+4)$$

$$S_5-a_1=2(S_3-a_1)+(2^2+2)$$

$$S_3-a_1=2(S_2-a_1)+(1^2+1)$$

임을 알 수 있다.

$$\therefore \sum_{n=2}^{34}a_n=S_{34}-a_1$$

$$=(S_{33}-a_1)+a_{34}$$

$$=32(S_2-a_1)+\sum_{k=1}^{5}\{2^{5-k}\times(2^{2(k-1)}+2^{k-1})\}+a_{34}$$

$$=32\times2+16\times(1+2+4+8+16)+5\times16+4$$

$$=644$$

+ : <2011나21>

40. ③
[성취기준] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

(가) ; $a=\dfrac{(1-2)^2}{2^1}=\dfrac{1}{2}$

(나) ; 양변에 $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+1}\frac{(k-2)^2}{2^k}=\frac{(m-1)^2}{2^{m+1}}$ 을 더했다.

$\therefore f(m)=\dfrac{(m-1)^2}{2^{m+1}}, \quad a\times f(5)=\dfrac{1}{8}$

수학Ⅱ

41. ④ / 2024 응애모 1회 6번

[성취기준] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
함수의 연속의 뜻을 안다.

주어진 식 각각의 양변에 $f(0)$을 빼서

$$\lim_{x\to0+} g(x)=3-f(0),\quad \lim_{x\to0-} g(x)=f(0)-1$$

를 얻는다.

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to0}\{g(h)+g(-h)\} &= \lim_{h\to0+} g(h)+\lim_{h\to0-} g(h)\\ &=\{3-f(0)\}+\{f(0)-1\}\\ &=2\end{aligned}$$

[comment] 식을 변형하지 않고 주어진 그대로 앞 식에서 뒤 식을 빼도 좋다.
+ : <1809나17>

42. 2 / 2025 응애모 1회 19번

[성취기준] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 40% 이상, 확통 20% 이하

$a\neq0$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하고,

$\lim\limits_{x\to0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

$f(x)=0$; $x=-1,\ 1,\ 4$

$f(x)=t$라 하면

i) $a=0$; $x\to0-$ 일 때, $t\to-1+$ 이므로

$\lim\limits_{x\to0-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to-1+} f(t)=0$이다.

$x\to0+$ 일 때, $t\to1-$ 이므로 $\lim\limits_{x\to0+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to1-} f(t)=0$이다.

$$\therefore \lim_{x\to0} f(f(x))=0$$

ii) $a=-1$; $x\to-1-$ 일 때, $t\to0-$ 이므로

$\lim\limits_{x\to-1-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to0-} f(t)=1$이다.

$x\to-1+$ 일 때, $t\to0+$ 이므로

$\lim\limits_{x\to-1+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to0+} f(t)=-1$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to-1} f(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

iii) $a=1$; $x\to1-$ 일 때와 $x\to1+$ 일 때 모두 $t\to0-$ 이다.

$$\therefore \lim_{x\to1} f(f(x))=\lim_{t\to0-} f(t)=1$$

iv) $a=4$; $x\to4-$ 일 때, $t\to0-$ 이므로

$\lim\limits_{x\to4-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to0-} f(t)=1$이다.

$x\to4+$ 일 때, $t\to0+$ 이므로

$\lim\limits_{x\to4+} f(f(x))=\lim\limits_{t\to0+} f(t)=-1$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to4} f(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

i) ~ iv)에 의하여 $\lim\limits_{x\to a} f(f(x))$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 a의 개수는 2이다.

[comment] 함수 $f(f(x))$의 연속성이 아니라 극한값이 존재하는지 묻고 있다. 주의!
+ : <2003가08>, <1106가07>

43. ②

[성취기준] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

직선 $y=tx-1$의 x절편은 $\dfrac{1}{t}$이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$이다.

x에 대한 방정식 $x^2+(tx-1)^2=1$의 두 실근이 $x=0$,

$\dfrac{2t}{t^2+1}$이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2t}{t^2+1},\ \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$이다.

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{QH}}\\ &=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{t}\right)\times\frac{t^2-1}{t^2+1}\\ &=(t-1)^2\times\frac{t+1}{2t(t^2+1)}\end{aligned}$$

이다.

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{(t-1)^2}&=\lim_{t\to1+}\frac{t+1}{2t(t^2+1)}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

[comment] 인수 끄집어내기!
240611에서 인수를 못 끄집어내는 사람이 은근 많다.
+ : <240611>

44. ③ / 2024 응애모 2회 12번

[성취기준] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

$g(x)=ax+b\,(a\neq 0,\ a,\ b$는 상수)라 하면
함수 $(f\circ g)(x)$는 최고차항의 계수가 a^2인 이차함수이고,
함수 $(g\circ f)(x)$는 최고차항의 계수가 a인 이차함수이다.

$\therefore a=1$

$f(1)\neq 0$이면 $\lim\limits_{x\to}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하므로
$\lim\limits_{x\to 1}\left\{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}$의 값이 존재하지 않는다.

$\therefore f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x-\alpha)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{-\alpha-b}{(x-1)(x-\alpha)}$$

의 값이 존재하므로 $\alpha+b=0$이다.

$\therefore g(x)=x-\alpha$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$

$$;\ \{(x-\alpha)-1\}\{(x-\alpha)-\alpha\}=x^2-(3\alpha+1)x+\left(2\alpha^2+\alpha\right)$$
$$=(x-1)(x-\alpha)-\alpha$$
$$=x^2-(\alpha+1)x$$

따라서 $\alpha=0$이고,

$f(x)=x(x-1)$, $g(x)=x$

이므로 $f(4)g(4)=48$이다.

[comment] 다항식과 관련된 항등식을? 어떻게? 풀까?
+ : <EBSi 220540107>, <1611B30>

45. ③ / 2025 응애모 3회 14번
[성취기준] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 50% 이하, 확통 30% 이하

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$이고 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-f(x)}{(x-1)^2}$의 값이 존재하므로
$\lim\limits_{x\to 1}\left\{\sqrt{f(x)}-f(x)\right\}=0$이다.

$\therefore f(1)=0$ 또는 $f(1)=1$

i) $f(1)=0$일 때 ; $g(1)\neq 0$인 다항함수 $g(x)$에 대하여
$f(x)=(x-1)^n g(x)$라 하자. $(n=1,\ 2,\ 3)$
$n=1$또는 $n=3$일 때, $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{f(x)}$의 값(좌극한 또는 우극한)이 존재하지 않는다.
$n=2$일 때,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{|x-1|}{x-1}\times g(x)\right\}$$

의 값이 존재하지 않는다.

ii) $f(1)=1$일 때 ;

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left[\sqrt{f(x)}\times\frac{1-f(x)}{(x-1)^2\times\left\{1+\sqrt{f(x)}\right\}}\right]$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\sqrt{f(x)}}{1+\sqrt{f(x)}}\times\frac{1-f(x)}{(x-1)^2}\right\}$$

의 값이 존재하므로

$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+1$ $(a\neq 0,\ a,\ b$는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}}{1+\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

이고

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}-\frac{(x-1)^2(ax+b)}{(x-1)^2}$$
$$=-(a+b)$$

이므로 조건에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\sqrt{f(x)}}{1+\sqrt{f(x)}}\times\frac{1-f(x)}{(x-1)^2}\right\}=-\frac{1}{2}(a+b)$$
$$=b+1$$

이다.

$\therefore a+3b=-2$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}\times\left(\frac{1}{3}a+b\right)+1$$
$$=\left(-\frac{8}{27}\right)+1$$
$$=\frac{19}{27}$$

[comment] '극한값이 존재하는지' 확인해도 좋고, '인수의 개수'를 따져도 좋다.
주어진 조건만으로 f가 결정되지는 않지만 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$의 값은 구할 수 있다.
+ : <1710나17>, <230622>(도전!), <1009가24>

46. ⑤ / 2025 응애모 2회 13번
[성취기준] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 40%, 확통 25%

$\lim\limits_{x\to 1}\left\{f(x)-\dfrac{1}{x}\right\}\neq 0$일 때, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{f(1)-1}$이다.

$\therefore f(1)=1$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x}{xf(x)-1}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$g(1)\neq0$ 인 다항함수 $g(x)$ 에 대하여

$xf(x)-1=(x-1)^n g(x)\quad\cdots\ (*)\ (n=1,\ 2,\ 3)$

로 놓을 수 있다.

$n=1$ 또는 $n=3$ 일 때, $x=1$ 의 좌우에서 $(x-1)^n$ 의 부호가 바뀌므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{x}{xf(x)-1}=\infty,\quad \lim_{x\to1+}\frac{x}{xf(x)-1}=-\infty$$

또는

$$\lim_{x\to1-}\frac{x}{xf(x)-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+}\frac{x}{xf(x)-1}=\infty$$

이다.

$\therefore n=2$, 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수

$(*)$에 $x=0$ 을 대입하면 $g(0)=-1$이고,

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{xf(x)-1}=\lim_{x\to1}\frac{x}{(x-1)^2g(x)}=\infty$$

이므로 $g(1)>0$ 이다.

$xf(x)=(x-1)^2(x^2+ax-1)+1$ (a는 $a>0$ 인 상수),

$f(x)=x^3+(a-2)x^2-2ax+a+2$

$f(x)$ 의 모든 계수가 정수이므로 a는 0보다 큰 정수이다.

$\therefore f(3)=4a+11\geq15$

[comment] 어떻게 해야 좌극한과 우극한이 '모두' 양의 무한대로 발산할까?

+ : <EBSi 230541102>, <25경찰대18>, <230622>(도전!)

47. ① / 2025 응애모 3회 10번

[성취기준] 함수의 연속의 뜻을 안다.

sol 1>

$x<a$, $x\geq a$ 각각에서 함수 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$ 이 연속이 되기 위해서는

$x<a$ 에서 $\frac{1}{2}x-3\neq0$, $x\geq a$ 에서 $x\neq0$ 이어야 한다.

$\therefore 0<a\leq6$

함수 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$ 이 $x=a$ 에서 연속이 되기 위해서는

$$\lim_{x\to a-}\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\lim_{x\to a+}\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\left|\frac{1}{f(a)}\right|$$

에서

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{2}a-3}\right|=\left|\frac{1}{a}\right|\ ;\ a=2 \text{ 또는 } a=-6$$

이어야 한다.

$\therefore a=2$

sol 2>

함수

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{\left|\frac{1}{2}x-3\right|} & (x<a)\\ \dfrac{1}{|x|} & (x\geq a)\end{cases}$$

가 $x=a$ 에서 연속이 되기 위해서는 $\left|\frac{1}{2}a-3\right|=|a|$ 이어야 한다.

$\therefore a=2$ 또는 $a=-6$

$a=-6$ 일 때, 함수 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다.

$a=2$ 일 때, $x<2$ 에서 $\frac{1}{2}x-3<0$ 이고 $x\geq2$ 에서 $x>0$ 이므로

함수 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\therefore a=2$

[comment] $x=a$ 에서의 연속성 외에도 $x<a$, $x>a$ 에서의 연속성도 확인해야 한다.

48. ④

[성취기준] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

예상 정답률 : 미적 50% 이상, 확통 30%

함수 $f(x)$ 는 $x\neq0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이고,

함수 $f(x+2)$ 는 $x\neq-2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

i) $x=0$ 에서 함수 $f(x)f(x+2)$ 의 연속성

; $\lim_{x\to0-}f(x)f(x+2)=a^2(3a+6)$

$\lim_{x\to0+}f(x)f(x+2)=(3a+4)(3a+6)$

$f(0)f(2)=(3a+4)(3a+6)$

함수 $f(x)f(x+2)$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되기 위해서는

$a^2(3a+6)=(3a+4)(3a+6)$

이어야 한다.

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=4$

ii) $x=-2$ 에서 함수 $f(x)f(x+2)$ 의 연속성

; $\lim_{x \to -2-} f(x)f(x+2) = (a^2-4)a^2$

$\lim_{x \to -2+} f(x)f(x+2) = (a^2-4)(3a+4)$

$f(-2)f(0) = (a^2-4)(3a+4)$

함수 $f(x)f(x+2)$가 $x=-2$에서 연속이 되기 위해서는

$(a^2-4)a^2 = (a^2-4)(3a+4)$

이어야 한다.

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$

i), ii)에 의하여 함수 $f(x)f(x+2)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값은 -2, -1, 4이고 그 합은 1이다.

[comment] (불연속)×(불연속)의 연속성!
+ : <1507A19>, <2006나15>, <240722>(도전!)

49. ⑤ / 2024 응애모 1회 14번 변형
[성취기준] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x<0) \\ -x+2 & (0 \le x < 1) \\ x & (x \ge 1) \end{cases}$$

이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 각각 그림과 같다.

그림 그림

ㄱ. 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$은 세 점에서 만나므로 $g(1)=3$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서의 관찰을 바탕으로 함수 $g(t)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

그림

따라서 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 개수는 3이다. (참)

ㄷ. 먼저 함수 $g(t)$는 $t \ne 0, 1, 2$인 모든 실수 t에서 연속이고,

$2+\lim_{t \to 0-} g(t) = 1+g(0) = \lim_{t \to 0+} g(t)$,

$2+\lim_{t \to 1-} g(t) = 1+g(1) = \lim_{t \to 1+} g(t) \quad \cdots (*)$

임에 주목하자.

$k=0$이면 함수 $y=g(t)-g(t-0)=0$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k \ne 0$이면 함수 $y=g(t)-g(t-k)$는 $t \ne 0, 1, 2, k, k+1, k+2$인 모든 실수 t에서 연속이다.

두 집합

$\{0, 1, 2\}$, $\{k, k+1, k+2\}$

에 대하여 집합 $\{0, 1, 2\} \cap \{k, k+1, k+2\}$의 원소의 개수에 따라 경우를 나눠보자. 1일 때와 2일 때만 보면 충분하다.

집합 $\{0, 1, 2\} \cap \{k, k+1, k+2\}$의 원소의 개수가 1일 때
; $k=2$ 또는 $k=-2$이다.

$k=2$일 때, 함수 $g(t)-g(t-2)$는 $t=0, 1, 3, 4$**에서 불연속**이다. (더 확인할 필요는 없지만 $t=2$에서도 불연속이다.)

$k=-2$일 때, 함수 $g(t)-g(t+2)$는 $t=1, 2, -2, -1$**에서 불연속**이다. (이때도 마찬가지로 $t=0$에서 불연속)

따라서 $k=2$ 또는 $k=-2$일 때, 함수 $g(t)-g(t-k)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 개수는 3이 아니다.

집합 $\{0, 1, 2\} \cap \{k, k+1, k+2\}$의 원소의 개수가 2일 때
; $k=1$ 또는 $k=-1$이다.

$k=1$일 때, 함수 $g(t)-g(t-1)$은 $t \ne 0, 1, 2, 3$**인 모든 실수 t에서 연속**이다.

또한

$\lim_{t \to 2-} \{g(t)-g(t-1)\} = 2$, $g(2)-g(1)=0$,

$\lim_{t \to 2+} \{g(t)-g(t-1)\} = -2$

과 $(*)$에서 함수 $g(t)-g(t-1)$은 $t=1$에서 연속이고 $t=2$에서 불연속임을 알 수 있다.

(조건을 만족시키는 k가 **존재함**을 확인했으니 여기서 풀이를 끝내도 굿.)

$k=-1$일 때도 마찬가지로 함수 $g(t)-g(t+1)$은 $t=0$에서 연속이고 $t=-1, 1, 2$에서 불연속이다.

따라서 $k=1$ 또는 $k=-1$일 때, 함수 $g(t)-g(t-k)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 개수가 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[comment] '평행이동'을 발견하고 함수 $g(t)$가 불연속인 t 근처에서 함수 $g(t)-g(t-k)$가 상수함수가 됨을 이용해도 좋다.
ㄱㄴㄷ 문제라 예상 정답률을 적기는 좀 그런데 ㄷ이 꽤 어려운 게 맞다.
+의 수능특강 문제를 직접연계했다.
+ : <EBSi 220090122>, <250521>, <1111가08>

50. ①
[성취기준] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 50% 이상, 확통 30% 이하

$\lim_{x \to t}\{x-f(t)\}=t-f(t)$ 이고 $\lim_{x \to t}\{f(x)-t\}=f(t)-t$ 이므로

$f(t)-t \neq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$g(t)=\lim_{x \to t}\frac{f(x)-t}{x-f(t)}=-1$$

이고, $f(t)=t$ 인 실수 t 에 대하여

$$\begin{aligned} g(t)&=\lim_{x \to t}\frac{f(x)-t}{x-f(t)} \\ &=\lim_{x \to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \\ &=f'(t) \end{aligned}$$

이다.

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-a)\left(x-\frac{3}{2}\right)+x$$

이때

$$f'(-1)=\frac{5}{2}(a+1)+1>0,\quad f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)+1>0$$

이므로

$$f'(a)=(a+1)\left(a-\frac{3}{2}\right)+1=0,\quad a=-\frac{1}{2}\ \text{또는}\ a=1$$

이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 집합

$$\begin{aligned} \{g(t)\,|\,t\text{는 실수}\}&=\left\{-1,\,0,\,f'(-1),\,f'\left(\frac{3}{2}\right)\right\} \\ &=\left\{-1,\,0,\,\frac{9}{4},\,6\right\} \end{aligned}$$

의 모든 원소의 합은 $\frac{29}{4}$ 이다.

그림 그림

[comment] $f'(-1)$ 과 $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값이 모두 -1 과 0 이 아니므로 $(a+1)+\left(\frac{3}{2}-a\right)$ 의 값이 일정함을 확인하고

$$\begin{aligned} f'(-1)+f'\left(\frac{3}{2}\right)&=\left\{\frac{5}{2}(a+1)+1\right\}+\left\{\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)+1\right\} \\ &=\frac{33}{4} \end{aligned}$$

으로 계산해도 좋다.

51. 287 / 2024 웅애모 2회 22번

[성취기준] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 20% 이상, 확통 10% 이하

두 함수 $g(t)$, $h(t)$ 는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (f(t)<|mt|) \\ |mt| & (f(t)\geq|mt|) \end{cases},\quad h(t)=\begin{cases} |mt| & (f(t)<|mt|) \\ f(t) & (f(t)\geq|mt|) \end{cases}$$

sol 1>

$m=0$ 일 때, 함수 $h(t)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 1이다.

그림

$x>0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|mx|$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 함수 $h(t)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 3 이상이다.

그림

$a>0$ 인 어떤 상수 a 에 대하여 $|m|=a$ 일 때, 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=|mx|$ 의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나고, 함수 $h(t)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2이다.

$|m|>a$ 일 때, 함수 $h(t)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2이다.

그림

$x>0$ 에서 x 에 대한 방정식 $-x^3+6x^2=ax$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 x 에 대한 방정식 $x^2-6x+a=0$ 은 중근을 갖는다.

$$\therefore a=9,\quad |m|\geq 9$$

$$\begin{aligned} 4\times\int_0^3\{g(t)+h(t)\}dt&=4\times\int_0^3\{f(t)+|mt|\}dt \\ &=4\times\left(\frac{9}{2}|m|-\frac{81}{4}+54\right) \\ &\geq 287 \end{aligned}$$

따라서 $4\times\int_0^3\{g(t)+h(t)\}dt$ 의 최솟값은 287이다.

sol 2>

함수 $h(t)$ 는 $f(t)\neq|mt|$ 이고 $t\neq 0$ 인 모든 실수 t 에서 미분가능하다.

i) $m=0$ 일 때 ; 함수 $h(t)$ 는

$$h(t)=\begin{cases} -t^3+6t^2 & (t<6) \\ 0 & (t\geq 6) \end{cases}$$

이므로 $t\neq 6$ 인 모든 실수 t 에서 미분가능하다.

$\lim_{t \to 6-}\frac{h(t)-h(6)}{t-6}=\lim_{t \to 6-}(-t^2)=-36$ 이고

$\lim_{t \to 6+}\frac{h(t)-h(6)}{t-6}=0$ 이므로 함수 $h(t)$ 는 $t=6$ 에서만 미분가능하지 않다.

ii) $0<|m|<9$ 일 때 ;

$f(0)=|m\times 0|=0$ 이고,

$x<0$ 에서 x 에 대한 방정식 $-x^2+6x=-|m|$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1,
$x>0$ 에서 x 에 대한 방정식 $-x^2+6x=|m|$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.
$x\neq 0$ 에서 x 에 대한 방정식 $f(x)=|mx|$ 의 서로 다른 실근을 작은 것부터 차례대로

$\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<0<\beta<3<\gamma)$

라 하자. $\cdots$ (*)
함수 $h(t)$ 는

$$h(t)=\begin{cases}-t^3+6t^2 & (t\le\alpha \text{ 또는 } \beta\le t\le\gamma)\\ |mt| & (\alpha<t<\beta \text{ 또는 } t>\gamma)\end{cases}$$

이고, $t\neq 0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ 인 모든 실수 t 에서 미분가능하며, $t=0$ 에서 미분가능하지 않다.
$t=\alpha$ 에서 함수 $h(t)$ 의 미분가능성 ;

$$\lim_{t\to\alpha-}\frac{h(t)-h(\alpha)}{t-\alpha}=-3\alpha^2+12\alpha,\quad \lim_{t\to\alpha+}\frac{h(t)-h(\alpha)}{t-\alpha}=-|m|$$

이고 (*)에 의하여

$$\begin{aligned}(-3\alpha^2+12\alpha)-(-|m|)&=(-3\alpha^2+12\alpha)-(-\alpha^2+6\alpha)\\&=-2\alpha^2+6\alpha<0\end{aligned}$$

이므로 함수 $h(t)$ 는 $t=\alpha$ 에서 미분가능하지 않다.
$t=\beta$ 에서 함수 $h(t)$ 의 미분가능성 ;

$$\lim_{t\to\beta-}\frac{h(t)-h(\beta)}{t-\beta}=|m|,\quad \lim_{t\to\beta+}\frac{h(t)-h(\beta)}{t-\beta}=-3\beta^2+12\beta$$

이고 (*)에 의하여

$$\begin{aligned}(-3\beta^2+12\beta)-|m|&=(-3\beta^2+12\beta)-(-\beta^2+6\beta)\\&=-2\beta^2+6\beta>0\end{aligned}$$

이므로 함수 $h(t)$ 는 $t=\beta$ 에서 미분가능하지 않다.
같은 방법으로 함수 $h(t)$ 가 $t=\gamma$ 에서 미분가능하지 않음을 보일 수 있고, 따라서 함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 4 이다.
iii) $|m|\ge 9$ 일 때 ;
함수 $h(t)$ 는

$$h(t)=\begin{cases}-t^3+6t^2 & (t<\alpha)\\ |mt| & (t\ge\alpha)\end{cases}$$

이고, $t\neq 0,\ \alpha$ 인 모든 실수 t 에서 미분가능하며, $t=0$ 에서 미분가능하지 않다.
ii)와 같은 방법으로 함수 $h(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 미분가능하지 않음을 보일 수 있고, 따라서 함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2 이다.
i), ii), iii)에 의하여 $|m|\ge 9$ 이고, ...

[comment] 그래프로 간단히 미분가능성을 확인하는 풀이(sol 1)와 $h(t)$ 를 나타내고 미분가능성을 식으로 직접 확인하는 풀이(sol 2), 두 가지 방향으로 풀이를 써두었다.
$g(t)+h(t)=f(t)+|mt|$ 임을 파악하는 것도 포인트.
+ : <1306가21>, <1311가21>

52. 91 / 2025 응애모 1회 22번
[성취기준] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
예상 정답률 : 미적 15% 이하, 확통 5% 이하

$f(0)=1$ 이므로 $g(0)=1$ 이고, $x=0$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하므로 다음과 같이 경우를 나눠보자.

$x=0$ 근처에서 $f(x)-(-x+1)$ 의 부호가 바뀔 때
; $x=0$ 근처에서 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases}2-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}\quad \text{또는}\quad g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<0)\\ 2-f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이므로 $-f'(0)=f'(0)$ 에서 $f'(0)=0$ 이다.

$x=0$ 근처에서 $f(x)-(-x+1)$ 의 부호가 바뀌지 않을 때
; $x=0$ 근처에서

$f(x)-(-x+1)\ge 0$ 또는 $f(x)-(-x+1)\le 0$

이므로 $f'(0)=-1$ 이고, 이는 주어진 조건에 모순이다.

따라서 함수 $f(x)$ 를

$f(x)=ax^3+bx^2+1$ (a 는 0 이 아닌 실수, b 는 실수)

로 쓸 수 있다. 이때 $a<0$ 이면 적당히 큰 양수 x 에 대하여 $f(x)<0$ 이므로 주어진 조건에 모순이다.

$\therefore a>0$

두 함수 $y=f(x)$, $y=-x+1$ 의 교점의 x 좌표에서만 $g(x)$ 가 $f(x)$ 에서 $2-f(x)$ 로(또는 그 반대) '갈아탐'에 주목하자.
또한 그 x 좌표로 나누어진 각 열린구간에서 함수 $g(x)$ 는 미분가능하다.

방정식 $f(x)=-x+1$ 의 실근이 $x=0$ 뿐일 때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
방정식 $f(x)=-x+1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 일 때, 0 이 아닌 한 실근을 α 라 하면 $f(\alpha)=-\alpha+1\neq 1$ 이고 $f(\alpha)\neq 2-f(\alpha)$ 이므로 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 실수 x 의 개수는 2 이다.
따라서

$f(x)-(-x+1)=ax(x-\alpha)^2$ (α 는 0 이 아닌 실수)

로 쓸 수 있다.
이때 $\alpha<0$ 이면 $x=\alpha$ 근처에서 $f(x)\le -x+1$ 이므로 $g(x)=2-f(x)$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서

미분가능하다.
$\alpha>0$이면 α를 제외한 $x=\alpha$ 근처에서 $f(x)>-x+1$이므로
함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} 2-f(\alpha) & (x=\alpha) \\ f(x) & (x\neq\alpha) \end{cases}$$

이므로 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않고, $k=\alpha$이다.

그림 그림

$$f(x)=ax^3+bx^2+1=ax(x-k)^2+(-x+1)$$

에서 계수비교법을 통해 $a=\dfrac{1}{k^2}$, $b=-\dfrac{2}{k}$를 얻고, 함수

$f(x)=\dfrac{x^3}{k^2}-\dfrac{2}{k}x^2+1$은 $x=\dfrac{4}{3}k$에서 극솟값 $1-\dfrac{32}{27}k$를 갖는다.

$1-\dfrac{32}{27}k\geq 0$에서 $k\leq\dfrac{27}{32}$이고, 따라서

$$g(k)=2-f(k)=k+1$$

의 최댓값은 $\dfrac{59}{32}$이다.

$\therefore p+q=91$

+ : <20사관나20>, <1709나21>(도전!)

53. ①, 해설 제공 ×/2024 응애모 2회 14번

54. 14
[성취기준] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
함수의 극한의 뜻을 안다.

$x\neq 0$일 때, 함수 $g(x)$는

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\frac{1}{x^2+h^2}\right\}=\frac{f'(x)}{x^2}$$

이고,

$$g(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h^3}$$

의 값이 존재하므로 사차식 $f(x)-f(0)$은 x^3을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x)-f(0)=x^4+ax^3,\quad g(x)=\begin{cases} 4x+3a & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

(단, a는 상수)

$$\lim_{x\to 0}g(x)=3a=a-4$$

에서 $a=-2$이다.

$\therefore g(5)=14$

[comment] g를 직접 나타내면 된다... 이중극한 같은 얘기 나올까봐.
23학년도 수능 14번도 마찬가지로!
+ : <231114>

55. 6
[성취기준] 접선의 방정식을 구할 수 있다.

모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|+|g(x)|\geq 0$이고, 방정식
$|f(x)|+|g(x)|=0$의 실근이 존재하므로 $g(-1)=0$이다.

$\therefore g(x)=k(x+1)$ (k는 0이 아닌 상수)

(나)에서 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, a^3+1)
$(a\neq -1)$에서의 접선임을 알 수 있다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, a^3+1)에서의 접선은
$y=3a^2(x-a)+a^3+1$이므로

$$3a^2=-2a^3+1=k$$

에서 $a=\dfrac{1}{2}$, $k=\dfrac{3}{4}$이다.

$\therefore g(7)=8k=6$

56. 2/2025 응애모 2회 21번
[성취기준] 접선의 방정식을 구할 수 있다.

(가)에서 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 같고,
(나)에서 일차항의 계수와 상수항이 같음을 알 수 있다.

$$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ g(x)=ax^3+b'x^2+cx+d$$

(단, 계수는 전부 상수이고 $a\neq 0$)
$f(x)-g(x)=(b-b')x^2$, $g'(x)=3ax^2+2b'x+c$에서

$$b=3a,\quad b'=c=0$$

이다.
따라서 방정식

$$\{f(x)-g(0)\}\times\{g(x)-f(0)\}=(ax^3+3ax^2)\times(ax^3)=0$$

의 실근은 $x=-3$, 0이고, 주어진 집합의 원소의 개수는 2이다.

57. 6, 해설 제공 ×/2025 응애모 3회 22번

58. 40
[성취기준] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

sol 1>
함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-tx^2$이라 하면

$h'(a)=f'(a)-2ta=0$, $f'(a)=2ta$

이고, $x=a$의 좌우에서 함수 $h'(x)$의 부호가 바뀐다.

i) $f'(a)\neq 0$일 때 ;

$f'(0)<0$이면 모든 실수 t에 대하여 두 함수 $y=f'(x)$, $y=2tx$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.

그림

$f'(0)>0$이면 집합 $\{t\mid g(t)\neq 2\}$는 무한집합이다.

그림

ii) $f'(0)=0$일 때 ;

$f'(x)=3x^2+px$ (p는 상수)로 놓으면 두 함수 $y=f'(x)$, $y=2tx$의 그래프는 $t=\frac{p}{2}$일 때 원점에서만 만나고, $t\neq\frac{p}{2}$일 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

그림 그림

$\therefore p=-2$, $f'(4)=40$

sol 2>

함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ (p, q, r은 상수)로 놓으면 x에 대한 방정식

$3x^2+(p-2t)x+q=0$

은 $t=-1$일 때만 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다.

이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=(p-2t)^2-4q$에서 $t=-1$일 때 $D\le 0$, $t\neq -1$일 때 $D>0$이다.

$\therefore q=0$, $p=-2$

59. ②

[성취기준] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

(가)에 의하여

$g(1)=f(2)+1=f(1)$

이고, 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 미분가능하므로

(나)에 의하여

$g(1)=1$이고,

$x=1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 변화함을 알 수 있다.

$\therefore f(1)=1$, $f(2)=0$, $f'(1)\le 0$, $f'(2)\ge 0$

실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)+(-x+2)$

로 놓으면

$f'(1)\le 0 \Rightarrow a\le 2$

$f'(2)\ge 0 \Rightarrow a\le 1$

에서 $a\le 1$이다. 따라서

$$\begin{aligned}f(4)&=3\times 2\times(4-a)+(-4+2)\\&=22-6a\\&\ge 16\end{aligned}$$

에서 $f(4)$의 최솟값은 16이다.

[comment] $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간의 모든 x에 대하여 $f(x)\ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

즉, $x=1$에서 함수 $g(x)$가 미분가능할 필요가 없다는 뜻이다. 연속일 필요도 없고...

$f(1)=1$, $f(2)=0$, $f'(2)\le 0$을 얻고 답을 구할 때, $f(4)$가 '최소'가 되려면 '최대한 천천히' 함수가 증가해야겠다 하는 것도 좋은 관찰.

+ : <1406A21>, <220914>

60. ③ / 2024 응애모 1회 12번

[성취기준] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

예상 정답률 : 미적 50% 이상, 확통 25%

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$과 $x=3$에서만 원 $x^2+y^2=25$와 만나고, $x\neq 0$, $x\neq 3$일 때 곡선 $x^2+y^2=25$와 만나지 않는다.

$\therefore f(0)=5$, $f'(0)=0$, $f(3)=4$, $f'(3)=-\frac{3}{4}$ $\cdots$ (*)

또는

$f(0)=-5$, $f'(0)=0$, $f(3)=-4$, $f'(3)=\frac{3}{4}$ $\cdots$ (**)

이다. ($f(0)\times f(3)<0$이면 원 내부에 그려지는 부분이 있다...)

그림

i) (*) ; $f(x)=-\frac{1}{108}x^2(x+9)+5$이다.

ii) (**) ; $f(x)=\frac{1}{108}x^2(x+9)+5$이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이다.

i), ii)에서 $f(x)=-\frac{1}{108}x^2(x+9)+5$이고, $f(6)=0$이다.

[comment] 원을 떠올릴 수 있을까?

+ : <21경찰대16>

61. ①

[성취기준] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

접선의 방정식을 구할 수 있다.

(가)에서 두 상수 $a\,(a\neq 0)$, b에 대하여

$$f(x)=ax^2(x-b)+(-x+2)$$

로 놓을 수 있다.

$f(2)=0$이므로 $b=2$이고, $f'(2)=4a-1=0$이므로 $a=\frac{1}{4}$이다.

$f(x)=t$로 두면 방정식 $f(t)=2-t$의 서로 다른 모든 실근은 $t=0$, $t=2$이다.

$t=0$일 때, 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-2)-(-x+2)=0$의 서로 다른 모든 실근은 $x=2$, $x=-2$이다.

$t=2$일 때, 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-2)-(-x+2)=2$의 서로 다른 모든 실근은 $x=0$과 방정식 $x^2-2x-4=0$의 서로 다른 두 실근이다.

따라서 주어진 집합의 모든 원소의 합은

$$2+(-2)+0+2=2$$

이다.

+ : <260620>

62. 9, 해설 제공 ×

63. 120, 해설 제공 ×

64. 54, 해설 제공 × / 2024 응애모 1회 22번

65. ③ / 2024 응애모 2회 9번

[성취기준] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

$f(x)=x(x-3)(x-\alpha)$에서 $v(4)=f'(4)=0$이므로

$$f'(4)=(4-\alpha)+4(4-\alpha)+4=0 \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{24}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=3x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha\\&=3(x-4)\left(x-\frac{\alpha}{4}\right)\\&=3(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)\end{aligned}$$

따라서 점 P의 가속도가 0이 되는 시각 t의 값은

$\dfrac{4+\frac{6}{5}}{2}=\dfrac{13}{5}$이다.

66. ④, 해설 제공 ×

67. 30 / 2025 응애모 1회 14번 변형

[성취기준] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

예상 정답률 : 미적 30%, 확통 10% 이하

$x_{\mathrm{P}}(t_1)=x_{\mathrm{Q}}(t_1)$에서 $(t_1)^3-(t_1)^2=a(t_1)^3+b(t_1)^2$이고,

$t_1>0$이므로 $(1-a)t_1=b+1$ $\cdots$ (*)을 얻는다.

$a=1$일 때, $b\neq -1$이면 (*)을 만족시키는 실수 t_1이 존재하지 않으므로 두 점 P와 Q는 만나지 않고, $b=-1$이면 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$이므로 두 점 P와 Q가 만나는 시각 t_1의 값이 무수히 많다.

$$\therefore a\neq 1,\quad t_1=\frac{b+1}{1-a}$$

점 Q의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도를 $v_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$v_{\mathrm{Q}}(t_1)=3a(t_1)^2+2bt_1=0$이고, $t>0$에서 $v_{\mathrm{Q}}(t)$의 부호가 바뀌는 t의 값은 t_1뿐이다.

$$\therefore t_1=-\frac{2b}{3a},\quad ab<0 \;\Rightarrow\; ab+3a+2b=0 \;\cdots\; (**)$$

sol 1>

(**)의 양변에 6을 더하여

$ab+3a+2b+6=(a+2)(b+3)=6$을 얻는다.

이때 $a+2$, $b+3$이 정수이므로 다음과 같은 경우를 생각하자.

$a+2=6$일 때 ; $a=4$, $b+3=1 \;\Rightarrow\; b=-2$

$a+2=3$일 때 ; $a=1$이다.

$a+2=2$일 때 ; $a=0$이므로 $ab=0$이다.

$a+2=1$일 때 ; $a=-1$, $b+3=6 \;\Rightarrow\; b=3$

$a+2<0$일 때 ; $b+3<0$이고 $ab>0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는

$$(4, -2),\ (-1, 3)$$

이고, a^2+b^2의 값의 합은 30이다.

sol 2>

$$ab+3a+2b=0 \;\Rightarrow\; b=-\frac{3a}{a+2}=\frac{6}{a+2}-3$$

곡선 $y=\frac{6}{x+2}-3$ 위의 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점 중 $xy<0$을 만족시키는 점이 (a, b)이다. 모두 나열하면

$$(-1, 3),\ (1, -1),\ (4, -2)$$

이고, 이때 $(1, -1)$은 모순임을 sol 1 이전의 풀이에서 확인했다.

그림

[comment] 원본은 $a+b$의 값을 구하는 거였는데, 이게 더 나은 듯.
'정수 조건의 부정방정식'에서 sol 1과 같이 상수를 더해서
인수분해하도록 하는 기출이 있는지 모르겠다. 또한 sol 2 같은 해석은

요즘 '격자점/개수세기' 유형을 대부분 거르다보니 이것도 잘 모를 듯.
둘 다 챙겨가기!
+ : <220913>, <241114>

68. 13 / 2025 응애모 1회 20번
[성취기준] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 미적 30%, 확통 10% 이하

sol 1>
함수 $f(x)$를
$f(x)=3x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)
로 두면 두 함수 $F(x)$, $G(x)$는 모든 실수 x에 대하여
$$F(x)=x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx+C_1,\quad G(x)=x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx+C_2$$
(단, C_1, C_2는 적분상수)
이다.
$$F(x)G(x)=\left(x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx+C_1\right)\left(x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx+C_2\right)$$
$$=(x^4-2x^2+1)(x^2-4)$$
에서 계수비교법을 통해
$a=0$, $b=-3$, $C_1+C_2=0$, $C_1\times C_2=-4$
를 얻는다.
$\therefore \{f(0)\}^2+|F(0)-G(0)|=9+\{2-(-2)\}=13$

sol 2>
두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분이므로
$F'(x)=G'(x)=f(x)$에서
$$F'(x)=0 \iff G'(x)=0 \iff f(x)=0$$
임을 이용하자.
함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 두 함수 $F(x)$, $G(x)$는 각각 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 주어진 식의 우변의 인수를 적절히 분배하여
두 함수 $(x-1)^2(x+2)$, $(x+1)^2(x-2)$ 모두
$x=-1$, $x=1$에서 극값을 가짐
을 알 수 있다.
$\therefore |F(0)-G(0)|=4$, $f(x)=3x^2-3$

+ : <1809나29>

69. 24 / 2024 응애모 2회 20번
[성취기준] 정적분의 뜻을 안다.
예상 정답률 : 미적 50%, 확통 15%

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_{2a}^{x}f(t)\,dt}{(x-a)^2}=\lim_{x\to 2a}\frac{\int_{a}^{x}f(t)\,dt}{(x-2a)^2}=2+f'\left(\frac{3}{2}a\right)\quad\cdots\ (*)$$

$x\to a$일 때 $(x-a)^2\to 0$이고, $\lim_{x\to a}\frac{\int_{2a}^{x}f(t)\,dt}{(x-a)^2}$의 값이 존재하므로
$\int_{2a}^{a}f(t)\,dt=0$이고, 다항식 $\int_{2a}^{x}f(t)\,dt$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.
마찬가지로 다항식 $\int_{a}^{x}f(t)\,dt$는 $(x-2a)^2$을 인수로 갖고,
$$\int_{a}^{x}f(t)\,dt=\int_{2a}^{x}f(t)\,dt=\frac{1}{4}(x-a)^2(x-2a)^2,$$
$$f(x)=(x-a)(x-2a)\left(x-\frac{3}{2}a\right)$$
이다.
$(*)$; $\lim_{x\to a}\frac{\int_{2a}^{x}f(t)\,dt}{(x-a)^2}=\frac{1}{4}a^2$, $\quad 2+f'\left(\frac{3}{2}a\right)=2-\frac{1}{4}a^2$
$\therefore a=2$이고 $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$
$f(3a)=f(6)=24$

+ : <20사관나27>, <220413>

70. ③ / 2025 응애모 1회 10번
[성취기준] 정적분의 뜻을 안다.

주어진 식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=a$이고, 주어진 식을 미분하여 모든 실수 x에 대하여
$$f'(x)=x^2+a+f(x)\quad\cdots\ (*)$$
가 성립함을 알 수 있다.
$(*)$에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=2a$이다.
함수 $f(x)$가 상수함수이거나 차수가 1 이하이면 $(*)$을 만족시키지 않는다.
함수 $f(x)$의 차수가 2이면 $(*)$의 양변에서 x^2의 계수가 같아야 하므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 -1이고, $f(x)=-x^2+2ax+a$이다.
또한 $(*)$에서 양변의 x의 계수가 같아야 하므로
$$-2=2a$$
에서 $a=-1$이다.
함수 $f(x)$의 차수가 3 이상이면 $(*)$을 만족시키지 않는다.
따라서 $f(x)=-x^2-2x-1$이고 $f(-1)=0$이다.

71. 9, 해설 제공 ×

72. 25, 해설 제공 ×/2024 응애모 1회 20번

73. 84, 해설 제공 ×/2025 응애모 3회 20번

74. ②
[성취기준] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면 함수 $f(x+1)$의 부정적분은 $F(x+1)$이고, 함수 $f(x+1)-f(x)$의 부정적분은 $F(x+1)-F(x)$이다.
이때 정적분의 정의에 의하여

$$F(x+1)-F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{3}x^3+C$$

이다. (단, C는 적분상수)
$x=1$을 대입하면

$$\int_1^2 f(t)\,dt=\frac{1}{3}+C=2$$

이므로 $C=\frac{5}{3}$이다.

$$\therefore \int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx+\int_4^5 f(x)\,dx$$
$$=\frac{8}{3}+9+\frac{64}{3}+3C$$
$$=38$$

[comment] 수학II에서의 정적분의 정의를 그대로 쓰면 된다.
+ : <1911나17>, <21사관나28>

75. ①, 해설 제공 ×/2025 응애모 3회 12번

76. ③, 해설 제공 ×/2025 응애모 2회 15번

77. ①/2024 응애모 1회 8번
[성취기준] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

두 곡선 $y=-x^2+x$와 $y=-x^2+13x-36$이 만나는 점의 x좌표는 3이다.
곡선 $y=-x^2$과 곡선 $y=-(x-6)^2$은 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로, 곡선 $y=-x^2+x$와 두 직선 $y=x$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=-x^2+13x-36$과 두 직선 $y=x$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하면 $A=B$이다.
따라서 주어진 부분의 넓이는

$$2\times\int_0^3 |x-(-x^2+x)|\,dx=18$$

이다.

[comment] (선대칭)+(일차함수), {(선대칭)+(일차함수)}−(일차함수)를 생각해보면 좋겠다.
+ : <221108>, <2009나30>

78. ②
[성취기준] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

$0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$,
$1<x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$$A=\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx,$$
$$B=\int_1^a |f(x)|\,dx=\int_1^a \{-f(x)\}\,dx$$

이다.

$$\therefore A-B=\int_0^a f(x)\,dx$$
$$=\int_0^a (x^3-ax^2-x+a)\,dx$$
$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}$$

$$a^2=3+\sqrt{3}$$

$f(0)=a$, $f'(0)=-1$이므로 직선 $y=-x+a$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, a)$에서의 접선이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+a$는 두 점 Q, R에서 만난다.
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+a$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}a^2-A+B=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

[comment] 엥? 넓이공식이요?
풀이과정에 숨어있긴 한데...
+ : <240610>

79. 40
[성취기준] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_1(t)|\,dt = \int_0^2 |(t-1)(t-2)|\,dt = 1$$

이므로,

$$\int_0^2 |v_2(t)|\,dt = 2a = 1$$

에서 $a = \frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore 120k = 120 \times \left| \int_0^2 \{v_1(t) - v_2(t)\}\,dt \right|$$

$$= 120 \times \left| \int_0^2 \left(t^2 - \frac{7}{2}t + 2\right) dt \right|$$

$$= 40$$

[comment] 조건을 $\int_0^2 |v_1(t) - v_2(t)|\,dt = 0$ 으로 해석하거나 구하는 값을 $120 \times \int_0^2 |v_1(t) - v_2(t)|\,dt$ 로 해석하면 곤란하다... 설마?

80. 2

[성취기준] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면 $0 < t < 4$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 < 0$

이므로, $k > 4$ 인 어떤 실수 k 에 대하여 $x(k) = v(k) = 0$ 이다.
$v(k) = 0$ 에서 $a(k-4) = -4$ 이고,

$$x(k) = \int_0^4 v(t)\,dt + \int_4^k v(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}a(k-4)^2 + 4(k-4) - \frac{8}{3} = 0$$

에서 $a(k-4)^2 + 8(k-4) = \frac{16}{3}$ 이다.

$$\therefore k = \frac{16}{3}, \quad a = -3$$

따라서 시각 $t = 4$ 에서 시각 $t = 6$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$x(6) - x(4) = \int_4^6 v(t)\,dt$$

$$= -\frac{3}{2} \times (6-4)^2 + 8$$

$$= 2$$

[comment] 그래프를 그려서, $t > 4$ 에서 $v(t) = 0$ 인 실수 t 를 k 로 두지 않고 풀어도 좋다.
+ : <250619>

미적분

81. ②

[성취기준] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

sol 1>

a_n 이 x 에 대한 방정식 $x^2 + x = \frac{1}{n}$ 의 실근이므로

$(a_n)^2 + a_n = \frac{1}{n}$ 이고, $a_n > 0$ 이므로 $0 < a_n < (a_n)^2 + a_n = \frac{1}{n}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

b_n 이 x 에 대한 방정식 $x^2 + x = \frac{1}{2n}$ 의 실근이므로

$(b_n)^2 + b_n = \frac{1}{2n}$ 이고, $b_n > 0$ 이므로

$0 < b_n < (b_n)^2 + b_n = \frac{1}{2n}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{(b_n)^2 + b_n}{(a_n)^2 + a_n} = \frac{b_n}{a_n} \times \frac{b_n + 1}{a_n + 1} = \frac{1}{2}$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n + 1}{a_n + 1} = 1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{(b_n)^2 + b_n}{(a_n)^2 + a_n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{b_n + 1}{a_n + 1}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

sol 2>

x 에 대한 방정식 $x^2 + x = \frac{1}{n}$ 의 실근은

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{n}}}{2}$$

이고, x 에 대한 방정식 $x^2 + x = \frac{1}{2n}$ 의 실근은

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{2}$$

이다.

$$\therefore a_n = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{2},\quad b_n = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}\times\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)}{\frac{4}{n}\times\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

82. 1 / 2025 응애모 1회 29번

[성취기준] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 20%

sol 1>

두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}\left(n^2(n+2),\, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\, n^2\right)$

이고, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 a_n은 선분 CH의 길이이고, 직선 CH는 선분 AB를 수직이등분한다.

그림

$\therefore \mathrm{H}\left(\frac{n^2(n+2)}{2},\, \frac{n^2}{2}\right)$, 직선 CH의 방정식은

$$y = (n+2)\left\{x - \frac{n^2(n+2)}{2}\right\} + \frac{n^2}{2}$$

$$= (n+2)x - \frac{n^2(n+2)^2}{2} + \frac{n^2}{2}$$

점 C는 직선 CH와 직선 $y = nx$의 교점이므로

$nx = (n+2)x - \frac{n^2(n+2)^2}{2} + \frac{n^2}{2}$ 에서 점 C의 x좌표는

$\frac{n^2(n+2)^2}{4} - \frac{n^2}{4}$ 임을 얻는다.

점 H를 지나고 x축과 평행한 직선을 m이라 하고, 점 C에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H$'$이라 하면

$$a_n = \overline{\mathrm{CH}}$$

$$= \overline{\mathrm{HH'}} \times \sqrt{(\text{직선 CH의 기울기})^2+1}$$

$$= \left\{\frac{n^2(n+2)^2}{4} - \frac{n^2}{4} - \frac{n^2(n+2)}{2}\right\} \times \sqrt{(n+2)^2+1}$$

$$= \frac{n^2}{4}\left(n^2+2n-1\right)\sqrt{(n+2)^2+1}$$

이다.

그림

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^4} - \frac{1}{4}n\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(n^2+2n-1\right)\sqrt{(n+2)^2+1} - n^3}{4n^2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2n-1\right)^2\left\{(n+2)^2+1\right\} - n^6}{4n^2\left\{\left(n^2+2n-1\right)\sqrt{(n+2)^2+1} + n^3\right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{b_n}{n^5}}{4\times\left\{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}+1\right\}}$$

$$= 1$$

(b_n은 $\left(n^2+2n-1\right)^2\left\{(n+2)^2+1\right\} - n^6$의 사차 이하의 항)

[comment] 식의 부피가 상당히 크다...! 계산연습 한 번씩 하고 가기.
+ : <2506미적30>, <2509미적30>, <2511미적28>

83. ②

[성취기준] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 35%

그림

점 $\mathrm{C}(0,\, 1)$에 대하여

$$\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OC} = \alpha_n,\quad \angle \mathrm{B}_n\mathrm{OC} = \beta_n,\quad \angle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n = \theta_n$$

이라 하면

$$\tan\alpha_n = n-1,\quad \tan\beta_n = \frac{1}{n},\quad \tan\theta_n = \frac{n-1+\frac{1}{n}}{1-\frac{n-1}{n}} = n^2-n+1$$

이고 $S_n = \frac{1}{2}\theta_n$이다.

$$n^3\times\left(S_{n+1}-S_n\right) = \frac{n^3}{2}\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)$$

$$= \frac{n^3\tan\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)}{2}\times\frac{\theta_{n+1}-\theta_n}{\tan\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)}$$

이때 두 점 A_n, B_n은 각각 제1사분면, 제2사분면 위의 점이므로

$$0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2},\quad 0 < \beta_n < \frac{\pi}{2},\quad 0 < \theta_n < \pi$$

이고,

$n\to\infty$일 때 $\tan\theta_n \to \infty$

이므로

$n \to \infty$ 일 때 $\theta_n \to \frac{\pi}{2}-$, $\theta_{n+1} \to \frac{\pi}{2}-$, $\theta_{n+1}-\theta_n \to 0$

이다.

$$\tan(\theta_{n+1}-\theta_n) = \frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{1+(n^2+n+1)(n^2-n+1)}$$

$$= \frac{2n}{n^4-n^2+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left\{n^3 \times (S_{n+1}-S_n)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n^3}{2} \times \frac{2n}{n^4-n^2+2} \times \frac{\theta_{n+1}-\theta_n}{\tan(\theta_{n+1}-\theta_n)}\right\}$$

$$= 1$$

+ : <2506미적30>

84. 19, 해설 제공 ×/2025 응애모 2회 30번

85. 8/2024 응애모 1회 26번

[성취기준] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 30% 이상

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{8^n}{2^n+1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{8^n}{2^n+1}\right) = 0$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{4^n} - \frac{2^n}{2^n+1}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1} = 1$$

이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{a_n} = 1$$

$k=-3, -2, \cdots, 4$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{4}\right)^n$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4^n}{a_n} \times \left(\frac{k}{4}\right)^n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{a_n} \times \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{4}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{4}\right)^n$$

의 값이 존재한다.

$k \le -4$ 또는 $k \ge 5$ 인 정수 k 에 대하여,

$\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4^n}{a_n} \times \left(\frac{k}{4}\right)^n\right\}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 8 이다.

[comment] 수렴하는 급수의 성질과 수열의 극한에 대한 기본 성질을 적극적으로 활용하자.
$k=-4$ 일 때 주의! 주관식으로 바꿔서 정답률이 꽤 낮아질 듯.
+ : <1311나19>, <2409미적29>

86. ⑤, 해설 제공 ×/2025 응애모 2회 26번

87. ②

[성취기준] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

조건에 의하여 $a_1 = S_1 = 2$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} = n^2+3n+2,$$

$$a_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} = -n^2-3n$$

이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_{2n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+3n+2} - \frac{1}{n^2+3n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{7}{18}$$

+ : <2306미적29>, <2409미적26>

88. 340

[성취기준] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

두 상수 a, $r\,(r \ne 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n = ar^{n-1}$$

이라 하자.

자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{S_{k+1}}-\frac{a_k}{S_k}\right)=\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}-\frac{a_1}{S_1}$$

$$=\frac{ar^n}{\frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}}-1$$

$$=\frac{r^{n+1}-r^n}{r^{n+1}-1}-1$$

이다.

i) $|r|<1$일 때

; $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{S_{k+1}}-\frac{a_k}{S_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{S_{k+1}}-\frac{a_k}{S_k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r^{n+1}-r^n}{r^{n+1}-1}-1\right)$$

$$=-1$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

ii) $|r|>1$일 때

; $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r^{n+1}-r^n}{r^{n+1}-1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r^{n+1}}}-1\right)$$

$$=-\frac{1}{r}$$

$\therefore r=4$

i), ii)에서 $r=4$이므로

$$\frac{a_8\times S_4}{(a_4)^2}=\frac{a_8}{a_4}\times\frac{S_4}{a_4}$$

$$=4^4\times\frac{4^4-1}{4^4-4^3}$$

$$=340$$

89. 81

[성취기준] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

(가)에 의하여

$|a|>1,\quad 0<|b|<1$

이다.

수열 $\left\{\frac{a_{2n}}{9^n\times b_{2n}}\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{a^2}{9b^2}$인 등비수열이고,

(나)에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}}{9^n\times b_{2n}}$이 수렴하므로 $0<\frac{a^2}{9b^2}<1$이다.

sol 1>

$$\frac{b}{1-b}=\frac{a^2}{9b^2}\times\frac{1}{1-\frac{a^2}{9b^2}}$$

$$=\frac{a^2}{9b^2}\times\frac{9b^2}{9b^2-a^2}$$

$$=\frac{a^2}{9b^2-a^2}$$

$b(9b^2-a^2)=a^2(1-b)$

$\therefore a^2=9b^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_4}{b_6}=81$

sol 2>

정의역이 $\{x\,|\,-1<x<1\}$인 함수 $y=\frac{x}{1-x}$는 일대일대응이다.

$\therefore b=\frac{a^2}{9b^2} \quad \Rightarrow \quad 9b^3=a^2,\quad \frac{a_4}{b_6}=81$

90. ③ / 2025 응애모 3회 27번

[성취기준] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

0이 아닌 두 상수 a, r에 대하여

$a_n=ar^{n-1}$

이라 하자.

$a_1>2|a_3| \quad \Rightarrow \quad a>0,\quad r^2<\frac{1}{2} \quad \cdots\ (*)$

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 공비는 r^2이고, 따라서 두 급수

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$

은 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(7a_{2n-1}-2a_n)=7\times\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-2\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$=7\times\frac{a}{1-r^2}-2\times\frac{a}{1-r}=8a$$

$\Rightarrow \quad 7-2(1+r)=8(1-r^2)$

$\Rightarrow \quad 8r^2-2r-3=0$

$\Rightarrow \quad r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=\frac{3}{4}$

$(*)$에 의하여 $r=-\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \dfrac{1}{|a_n|}\times(a_{2n}+5\times a_{3n})$

$=\dfrac{2^{n-1}}{a}\times\left\{\left(-\dfrac{1}{2}a\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{5}{4}a\times\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{5}{4}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{|a_n|}\times(a_{2n}+5\times a_{3n})\right\}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{5}{4}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{5}{4}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}$

$=0$

[comment] 너무 무겁지 않은 등비급수 계산!
+ : <2407미적29>, <2411미적29>

91. 25

[성취기준] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 30% 이하

0이 아닌 두 실수 a, r에 대하여

$a_n=ar^{n-1}$

로 두면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $0<|r|<1$이다.

$\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)=5a_1$

$\Rightarrow\ \dfrac{a}{1-r}\times\dfrac{|a|}{1-|r|}=5a$

$\Rightarrow\ \dfrac{|a|}{(1-r)(1-|r|)}=5$

수열 $\left\{a_n\times\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$의 항을 나열하면

$a_1,\ 0,\ -a_3,\ 0,\ a_5,\ 0,\ -a_7,\ 0,\ \cdots$

이므로 자연수 n에 대하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{4n}\left(a_k\times\sin\dfrac{k\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\left\{(-1)^{k+1}\times a_{2k-1}\right\}\quad\cdots\ (*)$

이다.
수열 $\left\{(-1)^{n+1}\times a_{2n-1}\right\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $-r^2$인 등비수열이므로 (*)에서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\left(a_k\times\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{(-1)^{k+1}\times a_{2k-1}\right\}$

$\displaystyle\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\times\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n+1}\times a_{2n-1}\right\}$

$\Rightarrow\ \dfrac{a}{1+r^2}=1$

$\Rightarrow\ a=1+r^2$

따라서 $a>0$이므로 $a=5(1-r)(1-|r|)=1+r^2$이다.

$r<0$일 때 ; $5(1-r^2)=1+r^2\ \Rightarrow\ r^2=\dfrac{2}{3}$

$r>0$일 때 ; $5(1-r)^2=1+r^2\ \Rightarrow\ r=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_1=1+r^2=\dfrac{5}{3}$ 또는 $\dfrac{5}{4}$

$12pq=25$

[comment] 25수능 미적 29번에서 $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$를 나열하여 규칙을 <u>직접</u> 찾는 게 마음에 들어서 만들어봄.
+ : <2511미적29>, <061113>, <2606미적29>

92. ②, 해설 제공 ×/2024 응애모 2회 27번

93. ④/2025 응애모 2회 24번

[성취기준] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

$\cos x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여

$\dfrac{\cos x}{1-\cos x}=\dfrac{1}{\sec x-1}$

이므로 $\sec x-1=t$로 두면 $x\to0$일 때 $t\to0+$이고

$\displaystyle\lim_{x\to0}(\sec x)^{\frac{\cos x}{1-\cos x}}=\lim_{t\to0+}(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$=e$

94. ③, 해설 제공 ×

95. ④

[성취기준] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

그림

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{QR}}=1$이므로 삼각형 QOR은 정삼각형이고,

사각형 PQOR은 한 변의 길이가 1이고 $\angle\mathrm{QOR}=\dfrac{\pi}{3}$인

마름모이다.

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{2}$, $\tan(\angle AOP)=\sqrt{2}$

$\angle AOP=\alpha$라 하면

$$\tan(\angle AOR)=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$$

96. ①/2024 응애모 2회 26번

[성취기준] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
합성함수를 미분할 수 있다.

주어진 식을 미분하면

$$f'(x+\sin x)(1+\cos x)=3\sin^2 x\cos x$$

이고, $1+\cos x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x+\sin x)=\frac{3\sin^2 x\cos x}{1+\cos x}$$

이다. 함수 $f'(x)$가 $x=\pi$에서 연속이므로

$$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi}f'(x)$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{3\sin^2 x\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left\{\frac{3\sin^2 x}{(x-\pi)^2}\times\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}\times\cos x\right\}$$

$$=3\times 2\times(-1)$$

$$=-6$$

+ : <2106가10>, <1911나21>

97. ⑤

[성취기준] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

부채꼴 OPB의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OHB의 넓이를 $g(\theta)$,
부채꼴 HPB의 넓이를 $h(\theta)$라 하면

$$S(\theta)=f(\theta)-g(\theta)-h(\theta)$$

이다.

$\angle BOH=\frac{\pi}{2}-\theta$에서

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2},\quad \overline{OH}=\sin\theta$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$\overline{PH}=\overline{OP}-\overline{OH}=1-\sin\theta$에서

$$h(\theta)=\frac{1}{2}(1-\sin\theta)^2\times\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{4}(1-\sin\theta)^2$$

$$\therefore S(\theta)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-\left\{\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\pi}{4}(1-\sin\theta)^2\right\}$$

$$=\frac{\pi-\cos\theta}{2}\sin\theta-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\sin^2\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\pi-\cos\theta}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

98. 4/2025 응애모 3회 29번

[성취기준] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

x에 대한 방정식 $(x-1)^2=(\sin t)x$의 판별식을 D라 하면
$D>0$이므로, 이 방정식의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\sin t+2)^2-4}$$

$$=\sqrt{\sin^2 t+4\sin t}$$

이다.

$$\{f(t)\}^2=(\alpha-\beta)^2+\{(\alpha-\beta)\sin t\}^2$$

$$=(1+\sin^2 t)(\alpha-\beta)^2$$

$$\Rightarrow f(t)=\sqrt{1+\sin^2 t}\cdot\sqrt{\sin^2+4\sin t}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{t\sqrt{t}}{f(t)-2\sqrt{\sin t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sin t}}\times\frac{t}{\sqrt{(1+\sin^2 t)(\sin t+4)}-2}\right\}$$

이때

$$\frac{t}{\sqrt{(1+\sin^2 t)(\sin t+4)}-2}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{\sin^3 t+4\sin^2 t+\sin t+4}-2}$$

$$=\frac{t\left(\sqrt{\sin^3 t+4\sin^2 t+\sin t+4}+2\right)}{\sin t\left(\sin^2 t+4\sin t+1\right)}$$

이므로

$$\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sin t}}\times\frac{t}{\sqrt{(1+\sin^2 t)(\sin t+4)}-2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sin t}}\times\frac{t}{\sin t}\times\frac{\sqrt{\sin^3 t+4\sin^2 t+\sin t+4}+2}{\sin^2 t+4\sin t+1}\right\}$$

$$=1\times1\times4$$

$$=4$$

99. ① / 2024 응애모 1회 28번
[성취기준] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

두 직선 OP, OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하면

$$\tan\alpha=\frac{\sin t}{t},\quad \tan\beta=\frac{\sin 2t}{2t},\quad f(t)=\alpha-\beta$$

이고

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin t}{t}-\frac{\sin 2t}{2t}$$

$$=\frac{\sin t}{t}-\frac{2\sin t\cos t}{2t}=\frac{\sin t}{t}-\frac{\sin t\cos t}{t}$$

$$=\frac{\sin t(1-\cos t)}{t}>0$$

이므로 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{4}$이다.

$$\tan f(t)=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\frac{\sin t(1-\cos t)}{t}}{1+\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t\cos t}{t}}$$

$$=\frac{t\sin t(1-\cos t)}{t^2+\sin^2 t\cos t}$$

$t\to0+$ 일 때 $\tan f(t)\to0$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\tan f(t)}{t^2}\times\frac{f(t)}{\tan f(t)}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1-\cos t}{t^2}\times\frac{t\sin t}{t^2+\sin^2 t\cos t}\times\frac{f(t)}{\tan f(t)}\right\}$$

이때

$$\lim_{t\to0+}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{\tan f(t)}=1,$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{t\sin t}{t^2+\sin^2 t\cos t}=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\frac{t}{\sin t}+\frac{\sin t}{t}\times\cos t}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^2}=\frac{1}{4}$$

100. ④, 해설 제공 ×

101. ②, 해설 제공 ×

102. ①, 해설 제공 ×

103. ① / 2025 응애모 1회 26번
[성취기준] 음함수와 역함수을 미분할 수 있다.

α가 $f(x)=g(x)$의 유일한 실근이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=\alpha$에서

$$\frac{1}{\ln\alpha}=\alpha$$

이고,

$$f'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha(\ln\alpha)^2},\quad g'(\alpha)=\frac{1}{f'(f(\alpha))}=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

이다.

$$\therefore \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-g(x)}{x-\alpha}=f'(\alpha)-g'(\alpha)$$

$$=f'(\alpha)-\frac{1}{f'(\alpha)}$$

$$=-\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

$$=-\alpha+\ln\alpha$$

104. 30 / 2024 응애모 1회 29번
[성취기준] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
예상 정답률 : 30% 이하

그림

$\angle PAO=t$, $\angle POH=2t$이므로 점 P의 좌표는 $(\cos 2t, \sin 2t)$이고, $s=\cos 2t$이다.

sol 1>
두 곡선

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad \sqrt{x-\cos 2t}$$

의 교점의 x좌표가 $g(t)$이므로
$\sqrt{1-\{g(t)\}^2}=\sqrt{g(t)-\cos 2t}$;

$$\{g(t)\}^2+g(t)-1-\cos 2t=0 \quad \cdots (*)$$

(*)을 t에 대하여 미분하면

$$2g(t)g'(t)+g'(t)+2\sin 2t=0$$

$$g'(t)=-\frac{2\sin 2t}{2g(t)+1} \quad \cdots \ (**)$$

(*)에 $t=\frac{\pi}{6}$을 대입하면

$$\left\{g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2+g\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}=0 \ ; \ g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1+\sqrt{7}}{2} \ (\because \ -1<g(t)<1)$$

(**)에 $t=\frac{\pi}{6}$을 대입하면

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad \Rightarrow \quad 70\times\left\{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2=30$$

sol 2>

$\{g(t)\}^2+g(t)-1-\cos 2t=0$

$$\Rightarrow \ \{2g(t)+1\}^2=5+4\cos 2t \quad \cdots \ (ㄱ)$$

(ㄱ)을 t에 대하여 미분하면

$$2\{2g(t)+1\}\times 2g'(t)=-8\sin 2t$$

이다.

$$\therefore g'(t)=-\frac{2\sin 2t}{2g(t)+1}$$

$$\Rightarrow \ \{g'(t)\}^2=\frac{4\sin^2 2t}{\{2g(t)+1\}^2}=\frac{4\sin^2 2t}{5+4\cos 2t}$$

$$\Rightarrow \ 70\times\left\{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2=70\times\frac{4\times\frac{3}{4}}{5+4\times\frac{1}{2}}=30$$

+ : <2006가21>, <2011가30>

105. 24 , 해설 제공 ×

106. 100 , 해설 제공 ×

107. ③, 해설 제공 × / 2024 응애모 2회 28번 변형

108. 50 , 해설 제공 ×

109. ②

[성취기준] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

함수 $f(x)$가 $0<x<\pi$에서 극값을 갖지 않으려면 $0<x<\pi$에서 함수 $f'(x)$의 부호 변화가 없어야 한다.
함수 $f(x)$가 $0<x<\pi$인 모든 실수 x에서 미분가능하므로

$$f'(x)=3\sin^2 x\cos x-a\sin x$$
$$=\sin x(3\sin x\cos x-a)$$

에서

$0<x<\pi$인 모든 실수 x에 대하여 $3\sin x\cos x-a\geq 0$

또는

$0<x<\pi$인 모든 실수 x에 대하여 $3\sin x\cos x-a\leq 0$

이다.
함수 $g(x)$를 $g(x)=3\sin x\cos x-a$라 하면

$$g'(x)=3\cos^2 x-3\sin^2 x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{4}, \ x=\frac{3}{4}\pi$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $\frac{3}{2}-a$를 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}-a$를 갖는다.

$$\therefore \ -\frac{3}{2}-a\geq 0 \ \text{또는} \ \frac{3}{2}-a\leq 0 \quad \Rightarrow \quad a\leq -\frac{3}{2} \quad \text{또는} \ a\geq \frac{3}{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

110. 7 / 2025 응애모 2회 29번

[성취기준] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
예상 정답률 : 20%

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(12x^3-24x^2+ax)-(2x)(3x^4-8x^3+ax^2)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2x(3x^4-4x^3+6x^2-12x+a)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(0)=0$이고, $a>0$이므로 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
따라서 $x\neq 0$에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.
함수 $g(x)$를

$$g(x)=3x^4-4x^3+6x^2-12x+a$$

라 하면 $f'(x)=\frac{2xg(x)}{(x^2+1)^2}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이다.

$$g'(x)=12x^3-12x^2+12x-12$$
$$=12(x-1)(x^2+1)$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $a-7$을 갖는다.

$$\therefore a-7\geq 0, \quad a\geq 7$$

따라서 양수 a의 최솟값은 7이다.

[comment] 극값이 하나만 존재하므로 도함수의 부호 변화를 관찰하자.
a의 값에 관계없이 $f'(x)=0$의 실근이 존재하는 점에도 주목해보자.
+ : <2111나20>, <220620>, <2506미적29>

111. 19, 해설 제공 ×/2024 응애모 2회 30번

112. ② /2025 응애모 1회 28번
[성취기준] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
예상 정답률 : 35%

$$m(x-y)<f(x)-f(y) \Rightarrow f(x)-mx>f(y)-my,$$
$$f(x)-f(y)<M(x-y) \Rightarrow f(x)-Mx<f(y)-My$$

에서 함수 $f(x)-mx$는 증가함수이고, 함수 $f(x)-Mx$는 감소함수임을 알 수 있다.

∴ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)-m\ge 0$, $f'(x)-M\le 0$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-2x+2)-x^2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$
$$=-\frac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

에서 함수 $f'(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(2-x)=f'(x)$를 만족함(함수 $f'(x)$의 그래프가 $x=1$ 대칭...)을 관찰하자.
계산을 편하게 하기 위해 함수 $g(x)$를 $g(x)=f'(x+1)$로 두면

$$g(x)=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

이고 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=g(x)$이다. 또한 두 함수 $f'(x)$와 $g(x)$의 치역이 일치한다.
$g'(x)=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=0$의 실근은 $x=-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$이고,
함수 $g'(x)$의 부호 변화를 관찰하면 함수 $g(x)$는 그림과 같이

$x=\pm\sqrt{3}$에서 극솟값(최솟값) $-\dfrac{1}{4}$,
$x=0$에서 극댓값(최댓값) 2를 가짐

을 알 수 있다.

그림

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)+\dfrac{1}{4}\ge 0$, $f'(x)-2\le 0$이고,
m의 최댓값은 $-\dfrac{1}{4}$, M의 최솟값은 2이다.

∴ (m의 최댓값)+(M의 최솟값)$=\dfrac{7}{4}$

[comment] 아마 '변곡접선 딸깍!'으로 푼 사람이 많지 않을까 해서 해설에는 식을 적절히 변형해 증가함수와 감소함수임을 이용하는 풀이를 넣었다.
'변곡접선 딸깍'하는 풀이와 그 정당화를 보고 싶다면 2025 응애모 1회의 상세해설을 참고하자.
+ : <1609B30>, <22예시12>

113. ①, 해설 제공 ×/2025 응애모 3회 28번

114. 69
[성취기준] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
예상 정답률 : 10% 이하

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $\dfrac{\pi x}{f(x)}$는 실수 전체의 집합에서 정의되고, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

$$g(-x)=-g(x)\ ;\ \sin\left(\frac{-\pi x}{f(-x)}\right)=-\sin\left(\frac{\pi x}{f(-x)}\right)$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi x}{f(x)}\right)$$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$$2n\pi+\frac{\pi x}{f(-x)}=\frac{\pi x}{f(x)} \quad \cdots (*)$$

를 만족시키는 정수 n이 존재한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)}=0$$

이므로 $n\ne 0$이면 (*)을 만족시키지 않는 실수 x가 존재하고,
$n=0$일 때 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 (*)이 성립한다.
따라서 상수 a, $b\,(b>0)$에 대하여

$$f(x)=x^4+ax^2+b$$

로 놓을 수 있다.
함수 $h(x)$를 $h(x)=\dfrac{\pi x}{f(x)}$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $h(-x)=-h(x)$이고 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나)에서

$g(1)=g'(1)=0$, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$

$g(-1)=g'(-1)=0$, $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le 0$

임을 알 수 있다.

sol 1>
이때 $g(x)=\sin h(x)$이고 $h(0)=0$이므로 함수 $h(x)$는

$x=1$에서 최댓값 π, $x=-1$에서 최솟값 $-\pi$를 가짐

을 알 수 있다.

($x>0$에서 $h(x)>\pi$인 실수 x가 존재하면 그 근처에서 $g(x)<0$이니까...)

$$\therefore h(1)=\frac{\pi}{f(1)}=\pi \quad \Rightarrow \quad f(1)=1+a+b=1,$$

$$h'(x)=\frac{\pi f(x)-\pi x f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$ 에서

$$h'(1)=\frac{\pi f(1)-\pi f'(1)}{\{f(1)\}^2}=0 \quad \Rightarrow \quad f'(1)=4+2a=1$$

$$\therefore a=-\frac{3}{2}, \quad b=\frac{3}{2}, \quad f(x)=x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$$

이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 최솟값 $\frac{15}{16}$을 갖는다.

$$\therefore f(3)=69$$

sol 2>

따라서 정수 m에 대하여 $h(1)=\frac{\pi}{f(1)}=m\pi$이고

$g'(x)=h'(x)\cos h(x)$에서

$$g'(1)=h'(1)\cos h(1)=0 \quad \Rightarrow \quad h'(1)=0$$

이다.

$$h'(x)=\pi\times\frac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$$ 에서

$$h'(1)=0 \quad \Rightarrow \quad f(1)=f'(1), \quad b=a+3$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $x^2=X$로 두면 X에 대한 이차방정식 $X^2+aX+b=0$이 실근을 갖지 않는다.

X에 대한 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned} D&=a^2-4b \\ &=a^2-4(a+3)=a^2-4a-12<0 \end{aligned}$$

$$\therefore -2<a<6$$

이때 $\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{2a+4}$의 값이 정수 m이므로 두 수 a, m의 순서쌍 $(a,\,m)$은

$$\left(-\frac{3}{2},\,1\right),\ \left(-\frac{7}{4},\,2\right),\ \left(-\frac{11}{6},\,3\right),\ \cdots$$

이다.

$m\ge 2$일 때, $x>0$에서

$$h(x)>\pi \quad \Rightarrow \quad g(x)=\sin h(x)<0$$

인 실수 x가 존재하므로 $m=1$, $a=-\frac{3}{2}$이다.

[comment] gf가 기함수이고 g가 기함수면 f가 '무조건' 우함수???
+ : <1903가20>, <2209미적29>, <2511미적30>

115. ④, 해설 제공 ×/2025 응애모 2회 27번

116. ②/2024 응애모 1회 27번

[성취기준] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

sol 1>

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx &= \Big[x^2F(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2xF(x)\,dx \\ &=\{F(1)-F(-1)\}-\int_{-1}^{1}2xF(x)\,dx \\ &=1-\int_{-1}^{1}2xF(x)\,dx \\ &=1-\left(\int_{-1}^{0}2xF(x)\,dx+\int_{0}^{1}2xF(x)\,dx\right) \end{aligned}$$

$-x=t$로 두면

$$\begin{aligned} &1-\left(\int_{1}^{0}2tF(-t)\,dt+\int_{0}^{1}2xF(x)\,dx\right) \\ &=1-\left(\int_{0}^{1}-2tF(-t)\,dt+\int_{0}^{1}2xF(x)\,dx\right) \\ &=1-\int_{0}^{1}2u\{F(u)-F(-u)\}\,du \\ &=1-\int_{0}^{1}2u^2\,du \\ &=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

sol 2>

함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f(-x)=1$$

이다.

$$\int_{-1}^{1}x^2f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}x^2f(x)\,dx+\int_{0}^{1}x^2f(x)\,dx$$

$-x=t$로 두면

$$\begin{aligned} &\int_{1}^{0}-t^2f(-t)\,dt+\int_{0}^{1}x^2f(x)\,dx \\ &=\int_{0}^{1}t^2f(-t)\,dt+\int_{0}^{1}x^2f(x)\,dx \\ &=\int_{0}^{1}s^2\{f(-s)+f(s)\}\,ds \\ &=\int_{0}^{1}s^2\,ds \\ &=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

[comment] sol 2에서 점대칭을 이용해도 좋다.
+ : <2111가15>, <1411B21>

117. ⑤
[성취기준] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

$x \neq 0$인 실수 x에 대하여 $xt = u$로 두면

$$f(x) = \int_0^x e^{xt}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{e^u}{x}\,du = \frac{e^{x^2}-1}{x}$$

이고, $x=0$일 때 $f(0) = \int_0^0 e^0\,dt = 0$이다.

ㄱ. $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f(-x) = \frac{e^{x^2}-1}{x} + \frac{e^{(-x)^2}-1}{-x} = 0$$

이고, $f(0)+f(0)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$f(x)+f(-x)=0$이다. (참)
ㄴ. $x \neq 0$인 모든 실수 x에서 함수 $f(x)$는 미분가능하고,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)
ㄷ. ㄱ에 의하여 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)| = |f(-x)|$이다.

$$\therefore \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx = 2\times\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

이때 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$$2\times\int_0^1 |f(x)|\,dx = 2\times\int_0^1 f(x)\,dx$$

이다.
$x>0$에서

$$f'(x) = \frac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{(4x^4-2x^2+2)e^{x^2}-2}{x^3}$$

이고, $x^2=u$로 두면

모든 양수 u에 대하여 $(4u^2-2u+2)e^u-2>0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x>0$에서 아래로 볼록하다.

따라서 $0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$f'(0)x \le f(x) \le f(1)x$$

이고

$$\int_0^1 f'(0)x\,dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 f(1)x\,dx = \frac{e-1}{2}$$

이므로 $1 \le \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx \le e-1$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[comment] 물론 f는 $x>0$에서 아래로 볼록이 맞지만 그림만으로 판단하기에는 아무래도...?
+ : <0909가11>, <1009미적29>, <1109미적28>

118. 16 / 2025 응애모 1회 30번
[성취기준] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
예상 정답률 : 15%

함수 $g(x)$를

$$g(x) = \sqrt{|9\sin^6 x\cos x|} = |3\sin^3 x|\sqrt{|\cos x|}$$

라 하면 **각각의** 정수 n에 대하여 $g\left(\frac{n}{2}\pi\right)=0$이고,

$$\frac{n}{2}\pi \le x < \frac{n+1}{2}\pi \text{에서 } f(x)=g(x)$$

또는

$$\frac{n}{2}\pi \le x < \frac{n+1}{2}\pi \text{에서 } f(x)=-g(x)$$

이다. 또한

$$g(\pi-x) = |3\sin^3(\pi-x)|\sqrt{|\cos(\pi-x)|} = |3\sin^3 x|\sqrt{|\cos x|} = g(x)$$

이고,

$$g(x+\pi) = |3\sin^3(x+\pi)|\sqrt{|\cos(x+\pi)|} = g(x)$$

이므로 모든 정수 n에 대하여 $\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} g(x)\,dx$의 값은 S로 일정하다.
$\cos x = t$로 두면

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-1)\sqrt{\cos x}\,(-\sin x)\,dx$$

$$=3\int_1^0 (t^2-1)\sqrt{t}\,dt=3\int_0^1\left(\sqrt{t}-t^2\sqrt{t}\right)dt$$

$$=\frac{8}{7}$$

이다. (나)에 의하여

$$\frac{m}{2}\pi\le x<\frac{m+1}{2}\pi \text{에서 } f(x)=g(x),$$

$$\frac{m'}{2}\pi\le x<\frac{m'+1}{2}\pi \text{에서 } f(x)=-g(x)$$

이고 $0\le m\le 15$, $0\le m'\le 15$인 서로 다른 두 정수 m, m'이 각각 적어도 하나 존재한다.

$\int_0^{8\pi} f(x)\,dx$의 값은 그러한 정수 m의 개수가 15이고 m'의 개수가 1일 때, 최댓값 $15\times\frac{8}{7}-\frac{8}{7}=16$을 갖는다.

[comment] 대칭성 주기성 찾기!
+ : <1907가20>, <2210미적28>

119. ③, 해설 제공 ×/2025 응애모 2회 28번

120. ④, 해설 제공 ×

121. 11, 해설 제공 ×

122. 110, 해설 제공 ×

123. 192, 해설 제공 ×/2025 응애모 3회 30번

124. ①, 해설 제공 ×

125. ②, 해설 제공 ×

126. ①

[성취기준] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
예상 정답률 : 35%

점 Q_k의 y좌표는 $f(x_k)-x_kf'(x_k)$이고, $0<x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-xf'(x)=\left(e^{1-x^2}+9-5x^3\right)-x\left(-2xe^{1-x^2}-15x^2\right)$$

$$=(2x^2+1)e^{1-x^2}+10x^3+9>0$$

이므로 삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이 A_k는

$$A_k=\frac{1}{2}\times\left|x_k\times\{f(x_k)-x_kf'(x_k)\}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x_kf(x_k)-(x_k)^2f'(x_k)\right\}$$

이다. $x_k=\frac{k}{n}$이므로

sol 1>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\int_0^1\frac{1}{2}\left\{xf(x)-x^2f'(x)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\,dx-\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^1+\int_0^1 xf(x)\,dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1 xf(x)\,dx-\frac{1}{2}f(1)$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1\left(xe^{1-x^2}+9x-5x^4\right)dx-\frac{5}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}+\frac{9}{2}x^2-x^5\right]_0^1-\frac{5}{2}$$

$$=\frac{3}{4}e+2$$

sol 2>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\int_0^1\frac{1}{2}x\left\{(2x^2+1)e^{1-x^2}+10x^3+9\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(2x^2+1)e^{1-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(10x^4+9x\right)dx$$

$1-x^2=t$로 두면

$$\frac{1}{2}\int_1^0 -\frac{1}{2}(3-2t)e^t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^1\left(10x^4+9x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(3-2t)e^t\,dt+\frac{13}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\left[(5-2t)e^t\right]_0^1+\frac{13}{4}$$

$$=\frac{3}{4}e+2$$

[comment] '정적분급수도형'은 요즘 거의 안나오지만...
+ : <1406B18>, <2511미적28>

127. ②

[성취기준] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $2e^x\cos x<e^x\sin x$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x\right|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(e^{2x}\sin x-2e^{2x}\cos x\right)dx$$

$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=\cos x$로 두면

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(e^{2x}\sin x-2e^{2x}\cos x\right)dx\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\{f(x)(-g'(x))-f'(x)g(x)\}dx\\&=-\Big[f(x)g(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=e^{2\pi}\end{aligned}$$

+ : <1904가16>, <EBSi 250110135>

128. 36, 해설 제공 ×/2024 응애모 1회 30번

129. ⑤/2025 응애모 1회 27번

[성취기준] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\{\ln(ex+1)\}^2$$

이다.

따라서 주어진 입체도형의 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{e-\frac{1}{e}}S(x)\,dx\\&=\int_0^{e-\frac{1}{e}}\{\ln(ex+1)\}^2dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln x+1)^2dx\\&=x\times(\ln x+1)^2\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}x\times\frac{2(\ln x+1)}{x}dx\\&=4e-\int_{\frac{1}{e}}^{e}2(\ln x+1)\,dx\\&=2\left(e-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

[comment] 평행이동? 안해도? 풀 수는 있는데 계산이 살짝...

+ : <2209미적30>

130. ①/2025 응애모 3회 26번

[성취기준] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\frac{dx}{dt}=12t^3\cos(t^2)-6t^5\sin(t^2),\quad \frac{dy}{dt}=12t^3\sin(t^2)+6t^5\cos(t^2)$$

이고,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\\&=\{144t^6\cos^2(t^2)-144t^8\cos(t^2)\sin(t^2)+36t^{10}\sin^2(t^2)\}\\&\quad+\{144t^6\sin^2(t^2)-144t^8\sin(t^2)\cos(t^2)+36t^{10}\cos^2(t^2)\}\\&=36t^{10}+144t^6\end{aligned}$$

이다. 따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\sqrt[4]{5}}\sqrt{36t^{10}+144t^6}\,dt=\int_0^{\sqrt[4]{5}}6t^3\sqrt{t^4+4}\,dt$$

이다. $t^4+4=s$라 하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt[4]{5}}6t^3\sqrt{t^4+4}\,dt&=\int_4^9\frac{3}{2}\sqrt{s}\,ds\\&=19\end{aligned}$$

[comment] $t^2=u$로 두고 $x=3u^2\cos u$, $y=3u^2\sin u$를 생각해도 좋다. '같은 곡선'이기 때문. 이걸 의도하고 만든 건 아니긴 한데...

131. 14, 해설 제공 ×/2024 응애모 2회 29번