제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ 1 ④ 5 ⑤ 25

$5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}}$

$= 5$

2. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(x)$ 이므로

$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(4) = 4$

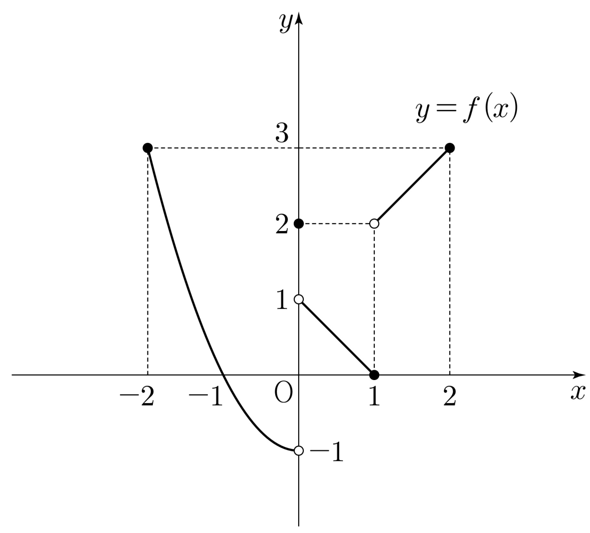
3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{6}(2a_k - 1) = 30$ 일 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$ 의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

$\sum_{k=1}^{6} a_k = \alpha$ 라 하면

$2\alpha - 6 = 30$, $\therefore \alpha = 18$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$(-1) + 2 = 1$

5. 함수 $f(x)=(x^2+2)(x^2+x-3)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 2x(x^2+x-3) + (x^2+2)(2x+1)$

$f'(1) = 2\cdot(-1) + 3\cdot 3$

$= 7$

6. $\cos(\theta-\pi)=\frac{3}{5}$이고 $\tan\theta<0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta = \frac{4}{5}$

7. 곡선 $y=x^3-5x^2+6x$ 위의 점 $(3, 0)$에서의 접선이 점 $(5, a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$y = x(x-2)(x-3)$

$x=3$일 때, $y'=3$

$\therefore l: y = 3x-9$

$a = 15-9 = 6$

8. 두 양수 a, b가

$$\log_{\sqrt{2}} a + \log_2 b = 2, \quad \log_2 a + \log_2 b^2 = 7$$

을 만족시킬 때, $a \times b$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2 a^2 b = 2 \\ \log_2 ab^2 = 7\end{array}\right) \Rightarrow \log_2 (ab)^3 = 9$$

$\Leftrightarrow \log_2 (ab) = 3 \quad \therefore ab = 8$

9. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 함수 $2f(x)+1$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. $G(3) = 2F(3)$일 때, $G(5) - 2F(5)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$G(x) = 2F(x) + x + C$

$x=3$, $G(3) = 2F(3) + 3 + C \quad \therefore C = -3$

$\therefore G(x) - 2F(x) = x - 3$

$G(5) - 2F(5) = 2$

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k = 21$$

일 때, $S_2 + S_7$의 값은? [4점]

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

$$\sum_{k=1}^{6} (-1)^k S_k = -S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6$$

$$= a_2 + a_4 + a_6 = 21$$

$a_2 = 1$ 이므로, $1 + r^2 + r^4 = 21 \Leftrightarrow \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

$\therefore a_n = 2^{n-2}$

$$S_2 + S_7 = \frac{\frac{1}{2}(2^2-1)}{2-1} + \frac{\frac{1}{2}(2^7-1)}{2-1}$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 127)$$

$$= 65$$

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 10t + 7$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 3이다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$v(t) = (3t-7)(t-1)$: ㄱ 참

$x(t) = t^3 - 5t^2 + 7t$, $x(1) = 1-5+7$

$x(1) = 3$: ㄴ 참

ㄷ. $\int_0^2 |v(t)|dt = \left|\int_0^1 v(t)dt\right| + \left|\int_1^2 v(t)dt\right|$

$= |x(1) - x(0)| + |x(2) - x(1)|$

$= |3-0| + |2-3|$

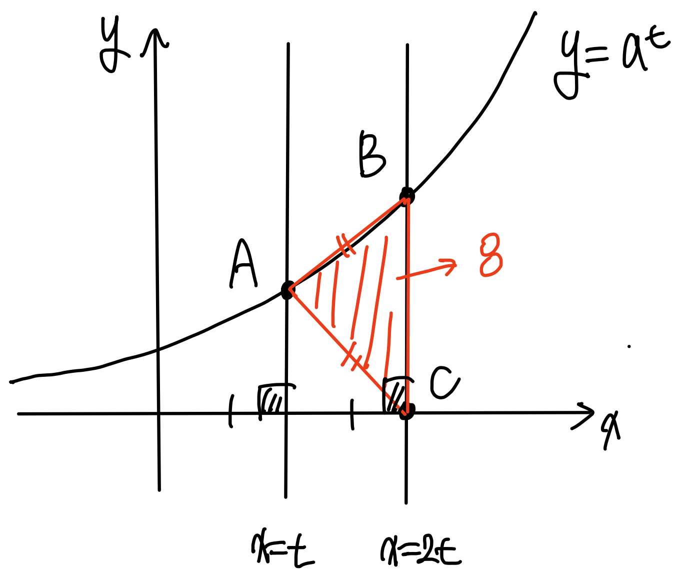
$= 3+1$

$= 4$ (참)

$\therefore$ ㄱㄴㄷ

12. 상수 $a\,(a>1)$과 양수 t에 대하여 곡선 $y=a^x$과 두 직선 $x=t$, $x=2t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$이고 삼각형 ACB의 넓이가 8일 때, $a \times t$의 값은? [4점]

① $2^{\frac{9}{4}}$ ② $2^{\frac{23}{8}}$ ③ $2^{\frac{7}{2}}$
④ $2^{\frac{33}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{19}{4}}$



$A(t, a^t)$ $B(2t, a^{2t})$

$a^{2t} = 2 \cdot a^t \Leftrightarrow a^t = 2$: $\overline{BC} = 4$

$\triangle ACB = 8 = \frac{1}{2} \times 4 \times t$ $\therefore t=4$, $a = 2^{\frac{1}{4}}$

$a \times t = 2^{\frac{9}{4}}$

13. 함수 $f(x)=x^2+6x+12$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

> 모든 실수 a에 대하여
>
> $\lim_{x \to a} \frac{x^2}{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)}$의 값이 존재한다.

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

$f(x) = x^2+6x+12$

$\Leftrightarrow f(x) = (x+3)^2 + 3 > 0$

$\forall a \in \mathbb{R},\ A = \{ L \mid \lim_{x\to a} \frac{x^2}{f(x)\{f(x)-k(x+2)\}} = L \}$

$A \neq \emptyset$

$\neq 0$

(i) $\forall x,\ f(x)-k(x+2) = x^2+(6-k)x+12-2k > 0$

$\Leftrightarrow D = (6-k)^2 - 4(12-2k) < 0$

$\Leftrightarrow D = k^2 - 12k + 36 - 48 + 8k < 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 4k - 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < k < 6$

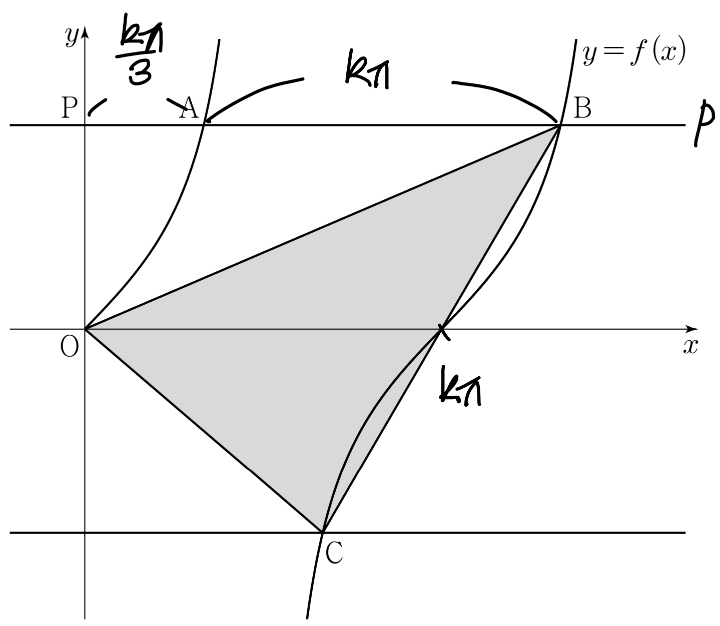
(ii) $f(x)-k(x+2)=0$ 인 x 존재할 때,

$f(0)-2k = f'(0)-k = 0 \Leftrightarrow k=6$ 이어야 한다.

$\therefore -2 < k \leq 6$　　$\therefore n(\{k \mid -2<k\leq 6,\ k \in \mathbb{Z}\}) = 8$

14. 양수 k에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, 0 \leq x < \frac{3k\pi}{2},\ x \neq \frac{k\pi}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$가 있다. 점 $\mathrm{P}(0,\ p)\ (p>0)$을 지나며 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 점을 A, $\mathrm{B}\ (\overline{\mathrm{PA}} < \overline{\mathrm{PB}})$라 하고, 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = 3\overline{\mathrm{PA}}$이고 삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$일 때, $k+p$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{13\sqrt{3}}{9}$　③ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{9}$



$p = \sqrt{3}$

$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times k\pi \times p = \frac{5}{3}\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} k\pi = \frac{5}{3}\pi$

$\therefore k = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

$p+q = \frac{14\sqrt{3}}{9}$

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g'(x) = |f(x)| - |x| = 0$

$$g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=6$에서 극값을 갖는다.

$f(6)\times g(2)<0$일 때, $f(8)$의 값은? [4점]

① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

(가) $\{x \mid |f(x)| = |x|,\ x \in \mathbb{R}\}$

$\{x \mid f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}\} = A$ 라 하면

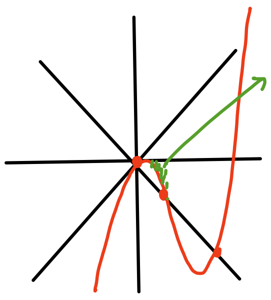
$n(A)=4$

(나) $g'(2)=g'(6)=0 \Rightarrow 2, 6 \in A$

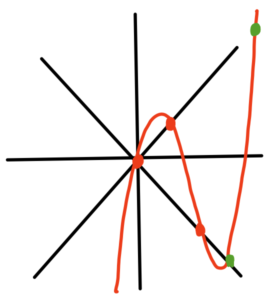
이를 바탕으로 교점이 총 4개인 그래프를 그려 보자.

(i) $f(6)=-6$, $g(2) = \int_0^2 (|f(x)|-|x|)\,dx > 0$

$\Leftrightarrow \int_0^2 |f(x)|\,dx > 2$

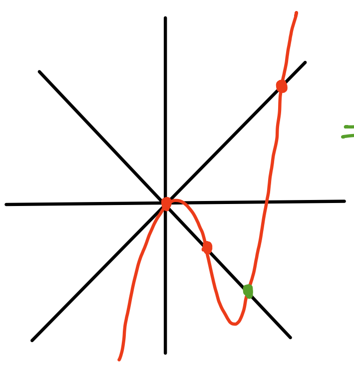


$\int_0^2 |f(x)|\,dx<2$ (모순)

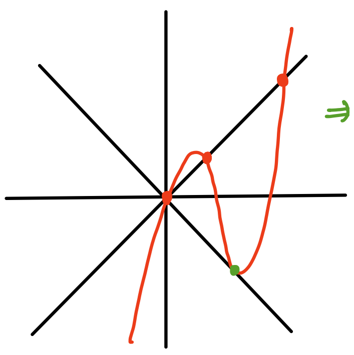


$\Rightarrow$ 5개(모순)

(ii) $f(6)=6$, $g(2) = \int_0^2 (|f(x)|-|x|)\,dx<0 \Leftrightarrow \int_0^2 |f(x)|\,dx<2$



$\Rightarrow$ ok



$\Rightarrow \int_0^2 |f(x)|\,dx>0$ 이기 때문에 (모순)

$\Rightarrow f(x) = px^2(x-6)+x$

$f(2) = -16p+2 = -2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-6)+x$

$f(8) = \frac{1}{4}\cdot 64\cdot 2+8 = 40$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = na_n + 2$$

를 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$a_2 = 1\cdot a_1 + 2 = 3$

$a_3 = 2\cdot a_2 + 2$

$= \boxed{8}$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x+1$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = x^3+x^2+x+3$

$f(2) = 8+4+2+3$

$= \boxed{17}$

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 6, \quad 2a_5 - a_4 = 15$$

일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

$2a_5 - a_4 = a_5 + a_5 - a_4$

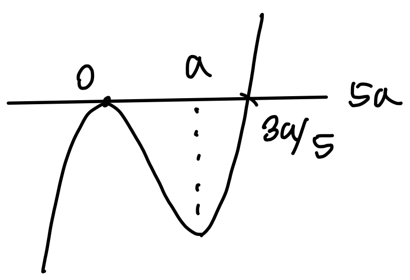
$= a_6 = 15$

$(공차) = \frac{9}{3} = 3$, $\therefore$ $a_n = 3(n-1)$

$a_{11} = \boxed{30}$

19. 함수 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 5a$의 극솟값이 a일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f(x) = 2x^2(x - \frac{3}{2}a) + 5a$

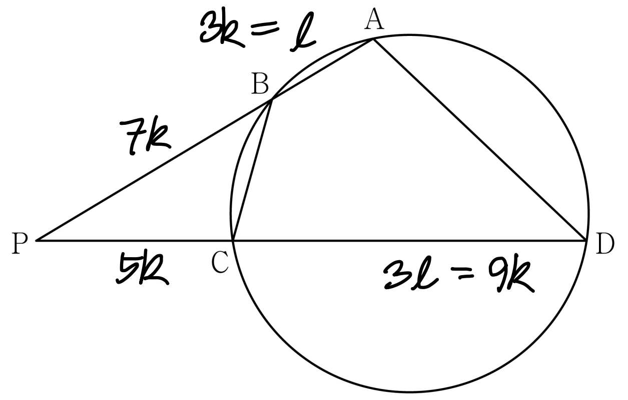


$f(a) = 5a - a^3 = a$

$a^3 = 4a$, $a = 2$

$\therefore$ 극대 : $\boxed{10}$

20. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고 $\overline{AB} : \overline{CD} = 1:3$, $\overline{BC} < \overline{AD}$일 때, 직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 P라 하자.



다음은 $\overline{PB} : \overline{PC} : \overline{BC} = 7 : 5 : \sqrt{14}$이고 $\overline{AD} = 4\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 구하는 과정이다.

> $\angle BPC = \theta$라 할 때, $\overline{PB} : \overline{PC} : \overline{BC} = 7 : 5 : \sqrt{14}$이므로
> 삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta = \frac{6}{7}$이다.
> $\overline{PB} : \overline{PC} = 7 : 5$에서 $\overline{PB} = 7k$, $\overline{PC} = 5k$,
> $\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 3$에서 $\overline{AB} = l$, $\overline{CD} = 3l$이라 하자.
> 원의 성질에 의하여
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
> $\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PA}$이고, $l = \boxed{(가)}^{3} \times k$이다.
> 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가 $1 : \boxed{(나)}$이므로
> 2
> $\overline{BC} = \frac{1}{\boxed{(나)}_{2}} \times \overline{AD}$이다.
> 따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,
> 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여 $R = \boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값을 구하시오. [4점]

$\overline{PB} \cdot \overline{PA} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \Leftrightarrow 7k \cdot (7k + l) = 5k \cdot (5k + 3l)$

$\therefore l = 3k$ $\therefore p = 3$, $q = 2$

$\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$ $\quad \sin\angle BPC = \frac{\sqrt{13}}{7}$

$R = \frac{2\sqrt{13}}{2\sin\angle BPC} = \frac{\cancel{2\sqrt{13}}}{\cancel{2}} \times \frac{7}{\cancel{\sqrt{13}}} = 7 = r$

$p + q + r = \boxed{12}$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
> $$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2 \le \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le x^4$$
> 이다.

(i) $f'(10)$을 구하는 것이고, 주어진 조건에서 $f(x)$의 상수항이 소거된다. → 식 세우자.

→ WLOG $f(x)=x^3+ax^2+bx$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

(ii) 미분계수 형태

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f'(x)}{2}+x^2-2\right) \le \lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x} \le \lim_{x\to0}x^4$$

$\Leftrightarrow \frac{f'(0)}{2}-2 \le f'(0) \le 0 \Leftrightarrow -4 \le f'(0) \le 0$

$\Leftrightarrow -4 \le b \le 0$

(iii) 아까 정한 식으로 부등식 정리

$\forall x \in \{x \mid x\neq0$인 실수$\}$ 에서

→ $\frac{3}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}+x^2-2 \le 4x^2+2ax+b \le x^4$

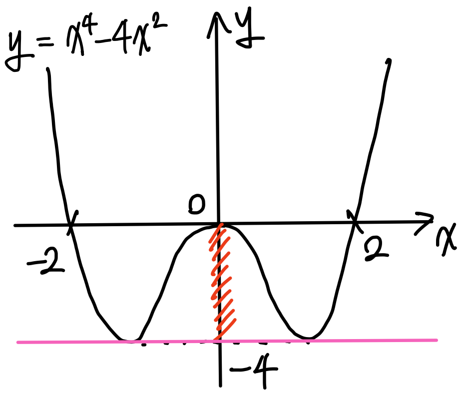
→ $\frac{5}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}-2 \le 4x^2+2ax+b \le x^4$

1) $\frac{5}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}-2 \le 4x^2+2ax+b \Leftrightarrow 3x^2+2ax+(4+b) \ge 0$

$D/4 = a^2-(b+4) \le 0 \Leftrightarrow a^2 \le (b+4)$

2) $4x^2+2ax+b \le x^4 \Leftrightarrow x^4-4x^2 \ge 2ax+b \cdots$ ㉠

$y=x^4-4x^2$ 과 $y=2ax+b$ 를 보면



$y=2ax+b$는 $(0,b)$를 지나는 직선이다.

만약 $-4<b\le0$ 이라면 ㉠을 만족하는 (a,b)의 순서쌍은 존재하지 않는다.

만약 $b=-4$ 라면 ㉠을 만족하는 (a,b)의 순서쌍은 $(0,-4)$로 유일하므로

$f(x)=x^3-4x$, $f'(x)=3x^2-4$

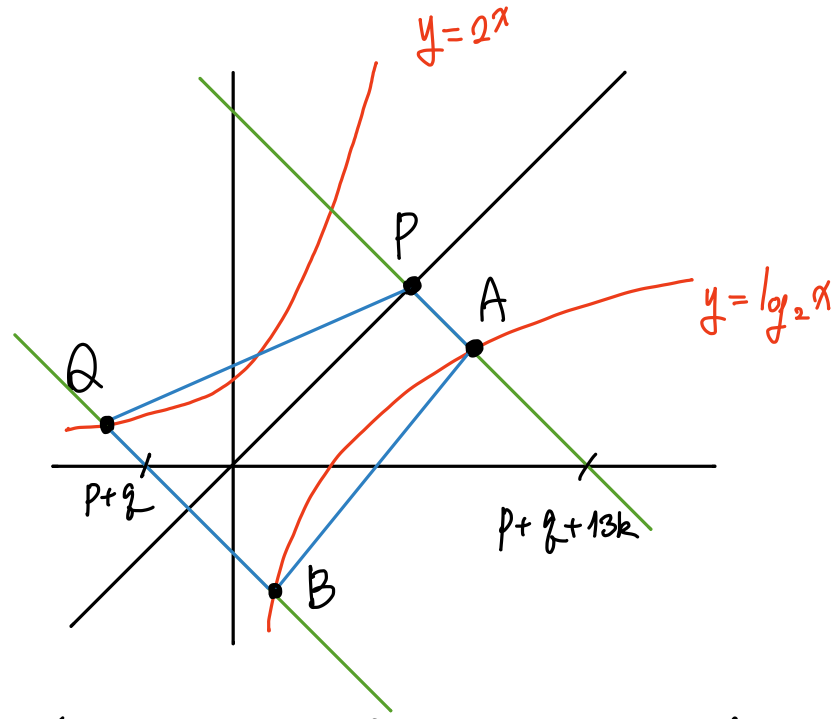
$\therefore f(10) = 3\cdot10^2-4$

$= \boxed{296}$

22. 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 P라 하고, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) (직선 AP의 y절편) $-$ (직선 BQ의 y절편) $=\frac{13}{2}$
>
> (나) 직선 AB의 기울기는 $\frac{6}{7}$이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(i) (나)에 대하여, $B(p, q)$ 라 하면 $A(p+7k, q+6k)$

(가)에 대하여, $13k=\frac{13}{2}$; $k=\frac{1}{2} \Rightarrow A(p+\frac{7}{2}, q+3)$

(ii) A, B를 대입하면,

$$\begin{cases} q+3 = \log_2(p+\frac{7}{2}) \\ q = \log_2 p \end{cases} \quad \therefore p=\frac{1}{2},\ q=-1$$

$\therefore A(4,2),\ B(\frac{1}{2},-1),\ P(3,3),\ Q(-1,\frac{1}{2})$

$\overline{AP}=\sqrt{2}$, $\overline{BQ}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, (높이) $=\frac{13}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \square APQB = \frac{\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} \times \frac{13}{2\sqrt{2}} = \frac{65}{8}$, $\therefore \boxed{73}$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1} = e$$

24. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$ 의 값은? [3점]

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

$$\frac{d}{dx} e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} = \cos(x-\frac{\pi}{4}) e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(x-\frac{\pi}{4}) e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} dx$$

$$= \left[e^{\sin(x-\frac{\pi}{4})} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = e^{\sin\frac{\pi}{2}} - e^0$$
$$= e-1$$

25. 두 실수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}=6$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot n^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}=6$$

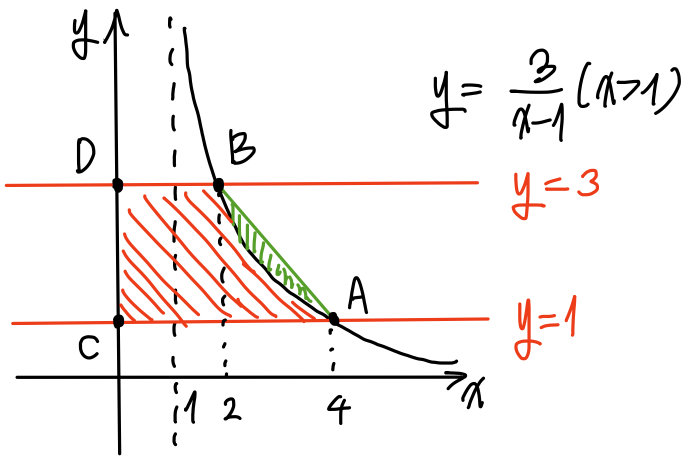
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot n^{b+1}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3}=6,\quad \therefore b=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a=6,\qquad a=9$$

$a+b=8$

26. 곡선 $y=\dfrac{3}{x-1}$ $(x>1)$이 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=\dfrac{3}{x-1}$ $(x>1)$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4-3\ln 3$ ② $3-3\ln 2$ ③ $4-2\ln 3$
④ $3+3\ln 2$ ⑤ $3+3\ln 3$



$$f(x)=\frac{3}{x-1}\ (x>1) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{3}{x}+1\ (x>0)$$

$$=\square ACDB-\int_1^3 f^{-1}(x)\,dx$$

$$=\frac{2+4}{2}\times 2-\int_1^3\left(\frac{3}{x}+1\right)dx$$

$$=6-\left[3\ln x+x\right]_1^3$$

$$=6-(3\ln 3+2)$$

$$=4-3\ln 3$$

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 함수 $f(x^3+x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $f(2)=1$, $f'(2)=8g'(1)-1$이다. $g(1)+g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

$h(x)=f(x^3+x) \Rightarrow h'(x) = (3x^2+1)f'(x^3+x)>0$

$\therefore f'(x)>0$

$g(f(x^3+x))=x$

(i) $x=1$, $g(f(2))=1 \Rightarrow g(1)=1$

(ii) $g'(f(x^3+x))\cdot f'(x^3+x)\cdot(3x^2+1)=1$

$x=1$, $g'(1)\cdot f'(2)\cdot 4=1$

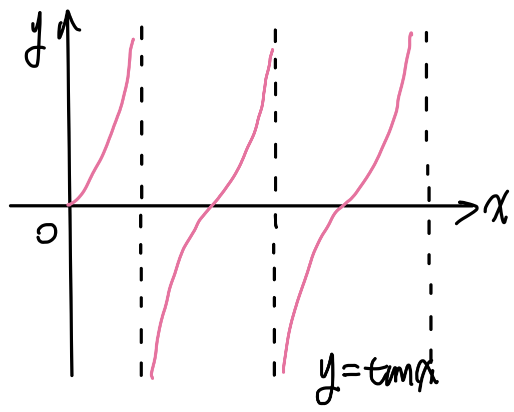
$\Leftrightarrow 4g'(1)\{8g'(1)-1\}-1=0$

$32\{g'(1)\}^2-4g'(1)-1=0$

$\Leftrightarrow \{8g'(1)+1\}\{4g'(1)-1\}=0$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{4}$ $(\because g'(x)>0)$

$g(1)+g'(1) = \frac{5}{4}$



28. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=g(x)-\tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)\times(g(0))^2$의 값은? [4점]

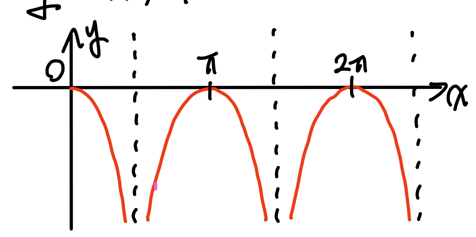
(가) $f(0)=0$, $f''(\pi)=0$

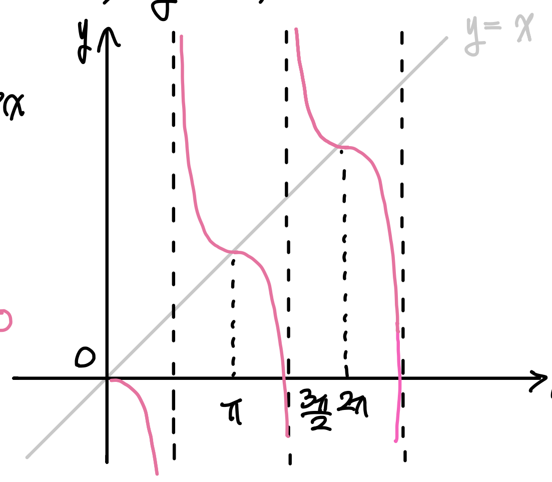
(나) $\sin g(\pi)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$

① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

(i) $h(x)=x-\tan x$ 라 하면, $h'(x)=1-\sec^2 x = -\tan^2 x$

$y=h'(x)$의 그래프 $\longrightarrow$ $y=h(x)$





(가) $f(0)=g(0)-\tan g(0)=0$

$\Downarrow$ $\Rightarrow \tan g(0)=g(0)$

$f'(x)=-g'(x)\tan^2 g(x)$

$\therefore f'(0)=-g'(0)\{g(0)\}^2$, $\therefore g'(0)\{g(0)\}^2=-f'(0)$, $f'(x)$를 결정하자!

(ii) (가) $f''(\pi)=0$, $\therefore f(x)=p(x-\pi)^3+q(x-\pi)+p\pi^3+q\pi$ $(p\neq0)$

(나) $\sin g(\pi)=0 \Rightarrow g(\pi)=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$

$\therefore f'(\pi)=-g'(\pi)\tan^2 g(\pi) = -g'(\pi)\cdot\sec^2 g(\pi)\cdot\sin^2 g(\pi)$

$\Leftrightarrow f'(\pi)=0$ $\therefore f(x)=p(x-\pi)^3+p\pi^3$

(iii) $g(x)$의 치역 결정.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\frac{3\pi}{2}$ 이므로, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\{g(x)-\tan g(x)\}$

만약 $\lim_{x\to\infty}\tan g(x)=\infty$ 일 때, $\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{3\pi}{2}$ 이고 증가한다.

따라서 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ 이고 f는 감소함수이다.

$g(\pi)=\pi \Rightarrow f(\pi)=\pi$ 를 대입하면, $f(x)=\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^3+\pi$

인 증가함수가 되어 모순이다.

따라서 $\lim_{x\to\infty}\tan g(x)=-\infty$ 이고 $\frac{3}{2}\pi<g(x)<\frac{5}{2}\pi$ 이다.

$g(\pi)=2\pi \Rightarrow f(\pi)=2\pi$, $\therefore f(x)=\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+2\pi$

$-f'(0) = -\frac{6}{\pi^2}(x-\pi)^2\Big|_{x=0} = -6$

단답형

29. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 + a_2 < 10$
(나) 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항의 개수는 3이고,
이 세 항의 곱은 216이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(i) 정수항이 연속되지 않은 세 정수일 때

$(\text{공비}) = \frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 정수, $|q|<|p|$) 라 하자.

정수 z와 자연수 m에 대하여 $k_n = z \times \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$ 라 하자.

$\{k_n\}: z, \frac{q}{p}z, \cdots \left(\frac{q}{p}\right)^m z, \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} z \quad \cdots$

이때 $\left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} z$은 정수이고 $\left(\frac{q}{p}\right)^m z$은 정수가 아니라고 하자.

$z = N \cdot p^{m+1}$ (N은 정수)라 하면 $\left(\frac{q}{p}\right)^m z = Np \cdot q^m$

이 되어 $\left(\frac{q}{p}\right)^m z$은 정수가 아니라고 한 가정에 모순이다.

따라서 세 정수항은 연속한 정수여야 한다.

(ii) 연속한 세 정수 a, ar, ar^2에 대하여

$(ar)^3 = 216 \Leftrightarrow ar = 6$이다.

따라서 나열하면

$\frac{6}{r}, 6, 6r$ 이다. $r = \frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 정수, $|p|<|q|$)

하면 $\frac{6q}{p}, 6, \frac{6p}{q}$ 이고 p와 q는 6의 약수이다.

(나)를 고려하면 $p=-3, q=2$일 때

$\frac{27}{2}, -9, 6, -4, \cdots$ 이 되어

$a_n = \frac{27}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{27}{2}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{81}{10} \quad \therefore \boxed{91}$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1) = 4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx = 34, \quad \int_1^2 xg(x)\,dx = 53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$(1+xf'(x))e^{f(x)} = g(x)$

- $\int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 (1+xf'(x))e^{f(x)}dx = \int_1^2 e^{f(x)}dx + \int_1^2 xf'(x)e^{x}dx$

$= \cancel{\int_1^2 e^{f(x)}dx} + [xe^{f(x)}]_1^2 - \cancel{\int_1^2 e^{f(x)}dx}$

$= 2e^{f(2)} - e^{f(1)} = 34$, $f(1) = \ln 16$ 이므로 $e^{f(2)} = 25$

$\therefore f(2) = \ln 25$

- $\int_1^2 xg(x)dx = \int_1^2 (xe^{f(x)} + x^2 f'(x)e^{f(x)})dx$

$= \int_1^2 xe^{f(x)}dx + \int_1^2 x^2 f'(x) e^{f(x)}dx$

$= \int_1^2 xe^{f(x)}dx + [x^2 e^{f(x)}]_1^2 - \int_1^2 2xe^{f(x)}dx$

$= -\int_1^2 xe^{f(x)}dx + 4e^{f(2)} - e^{f(1)}$

$= -\int_1^2 xe^{f(x)}dx + 100 - 16$

$= -\int_1^2 xe^{f(x)}dx + 84 = 53$

$\therefore \int_1^2 xe^{f(x)}dx = 84 - 53 = \boxed{31}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.