



2026학년도 9월 평가원 모의평가

정답 및 해설

공통 과목				선택 과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	④	12	①	23	④	23	①	23	②
2	④	13	④	24	③	24	④	24	④
3	⑤	14	③	25	⑤	25	②	25	①
4	①	15	⑤	26	②	26	①	26	①
5	②	16	8	27	④	27	①	27	②
6	⑤	17	17	28	②	28	②	28	④
7	①	18	30	29	23	29	91	29	396
8	③	19	10	30	80	30	31	30	69
9	②	20	12						
10	③	21	296						
11	⑤	22	73						

공통

01

정답 ④

지수법칙을 활용해 계산하면

$$5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}} = 5$$

이다.

 $\therefore 5$

공통

02

정답 ④

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 를 미분하면 $f'(x) = 2x - 4$ 이므로
 $f'(4) = 4$ 이다. 따라서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = 4 (= f'(4))$ 이다.
 $\therefore 4$

공통

03

정답 ⑤

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 (2a_k - 1) = 30 &\rightarrow 2 \sum_{k=1}^6 a_k - 6 = 30 \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^6 a_k = 18 \end{aligned}$$

이다.

 $\therefore 18$

공통

04

 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ 이므로

 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ 이다.

 $\therefore 1$

공통

05

 함수 $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + x - 3)$ 를 미분하면

$$f'(x) = 2x(x^2 + x - 3) + (x^2 + 2)(2x + 1)$$

 이므로 $f'(1) = 7$ 이다.

 $\therefore 7$

공통

06

 임의의 θ 에 대하여

$$\cos(\theta - \pi) = \cos(\pi - \theta), \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

 이므로 $\cos(\theta - \pi) = \frac{3}{5}$ 에서 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 이다.

 $\tan \theta < 0$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 이다.

 $\therefore \frac{4}{5}$

정답 ①

정답 ②

정답 ⑤

공통

07

 함수 $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ 를 미분하면 $y' = 3x^2 - 10x + 6$ 이므로 점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 3 이다. 그러므로 점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = 3(x - 3) \rightarrow y = 3x - 9$$

 이다. 점 $(5, a)$ 가 이 직선 위에 점이므로 대입해서 계산하면 $a = 6$ 이다.

 $\therefore 6$

정답 ①

공통

08

로그의 성질을 활용하면

$$\log_{\sqrt{2}} a + \log_2 b = 2 \rightarrow 2\log_2 a + \log_2 b = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2 a + \log_2 b^2 = 7 \rightarrow \log_2 a + 2\log_2 b = 7 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 계산하면 $\log_2 a = -1, \log_2 b = 4$ 이다.

 따라서 $a = \frac{1}{2}, b = 16$ 이므로 $a \times b = 8$ 이다.

 $\therefore 8$

정답 ③

공통

09

 다항함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이 $F(x)$,
 함수 $2f(x) + 1$ 의 한 부정적분이 $G(x)$ 이므로

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1$$

$$\int (2f(x) + 1) dx = G(x) + C_2$$

가 성립한다. 두 식의 관계에 대해 생각해보면

정답 ②

$$\int (2f(x)+1) dx = G(x) + C_2$$

$$\Leftrightarrow 2F(x)+x = G(x) + C_3 \text{ (새로운 상수 도입)}$$

이므로 $x=3$ 을 대입하면

$$2F(3)+3 = G(3) + C_3 \rightarrow C_3 = 3 \text{ (}\because G(3) = 2F(3)\text{)}$$

따라서 $G(x) - 2F(x) = x - 3$ 이므로

$$G(5) - 2F(5) = 2 \text{ 이다.}$$

$\therefore 2$

공통

10

정답 ③

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 로 두면 $r > 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 (-1)^k S_k &= -S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6 \\ &= (S_2 - S_1) + (S_4 - S_3) + (S_6 - S_5) \\ &= a_2 + a_4 + a_6 \\ &= 1 + r^2 + r^4 \text{ (}\because a_2 = 1\text{)} \end{aligned}$$

이므로 $r^4 + r^2 + 1 = 21$ 에서

$$\begin{aligned} r^4 + r^2 - 20 &= 0 \rightarrow (r^2 + 5)(r^2 - 4) = 0 \\ &\rightarrow r = 2 \text{ (}\because r > 0\text{)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a_1 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{3}{2} \text{ (}\because a_1 + a_2\text{)}, \quad S_7 = \frac{\frac{1}{2} \times (2^7 - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{127}{2} \end{aligned}$$

에서 $S_2 + S_7 = 65$ 이다.

$\therefore 65$

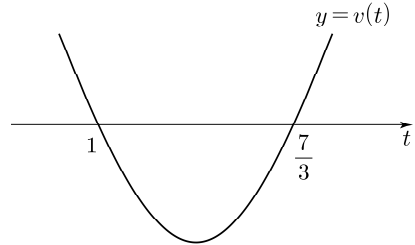
공통

11

정답 ⑤

ㄱ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P 의 운동 방향이 바뀐다. (참)

점 P 의 속도 $v(t) = 3t^2 - 10t + 7$ 에 대하여 함수 $y = v(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$v(1) = 0$ 이고, $t=1$ 근방에서 $v(t)$ 의 부호가 변한다. 따라서 시각 $t=1$ 일 때 점 P 의 운동 방향은 바뀐다.

ㄴ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P 의 위치는 3 이다. (참)

속도 $v(t) = 3t^2 - 10t + 7$ 를 부정적분하여 위치 $x(t)$ 를 구하면

$$x(t) = t^3 - 5t^2 + 7t \leftarrow \text{원점에서 출발했으므로 } x(0) = 0$$

이다. 따라서 시각 $t=1$ 일 때 점 P 의 위치는 3 이다.

ㄷ. 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 4 이다. (참)

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |v(t)| dt &= \int_0^1 |v(t)| dt + \int_1^2 |v(t)| dt \\ &= \int_0^1 v(t) dt - \int_1^2 v(t) dt \\ &= 2x(1) - x(0) - x(2) \\ &\quad \downarrow x(0) = 0, x(1) = 3, x(2) = 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

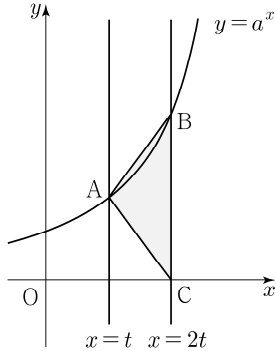
이다.

공통

12

정답 ①

양수 t 에 대하여 곡선 $y=a^x$ 과 두 직선 $x=t$, $x=2t$ 가 만나는 점이 각각 A, B이고, 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발이 C이므로 이를 그래프로 표현하면 다음과 같다.



세 점 A, B, C의 좌표는

$$A(t, a^t), \quad B(2t, a^{2t}), \quad C(2t, 0)$$

이고, $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로

$$2 \times (\text{점 A의 } y \text{ 좌표}) = (\text{점 B의 } y \text{ 좌표}) \\ \rightarrow 2a^t = a^{2t}$$

에서 $a^t = 2$ 이다. 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times t \times a^{2t} = 8 \quad \rightarrow \quad t = 4 \quad (\because a^{2t} = (a^t)^2)$$

이므로 $a^4 = 2$ 에서 $a = 2^{\frac{1}{4}}$ 이다. 따라서 $a \times t = 2^{\frac{9}{4}}$ 이다.

$$\therefore 2^{\frac{9}{4}}$$

공통

13

정답 ④

함수 $f(x) = x^2 + 6x + 12$ 와 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)}$$

의 값이 존재하려면 (분모) $=0$ 이 되는 순간에 주목해야 한다.

$$(\text{분모}) : (f(x))^2 - k(x+2)f(x) = f(x) \times (f(x) - k(x+2))$$

이때 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근의 유무를 판단하기 위해

이차방정식 $x^2 + 6x + 12 = 0$ 의 판별식을 활용하면

$$D_1 = -3 (= 3^2 - 12) \rightarrow D_1 < 0$$

이다. 즉, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 존재하지 않는다.

그러므로 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{f(x) \times (f(x) - k(x+2))}$$

의 값이 존재하려면

(1) 방정식 $f(x) - k(x+2) = 0$ 이 실근이 존재하지 않거나

(2) 방정식 $f(x) - k(x+2) = 0$ 이 실근을 갖는다면,

(분자) $=0$ 이 되는 점과 동일한 $x=0$ 이 실근이어야 함!

(1) 방정식 $f(x) - k(x+2) = 0$ 의 실근이 존재하지 않는 경우
방정식

$$f(x) - k(x+2) = 0 \rightarrow x^2 + (6-k)x + 12 - 2k = 0$$

의 실근이 존재하지 않으려면 (판별식 활용!)

$$D_2 = (6-k)^2 - 4(12-2k) < 0 \rightarrow (k+2)(k-6) < 0$$

에서 $-2 < k < 6$ 이어야 한다.

(2) 방정식 $f(x) - k(x+2) = 0$ 의 실근이 $x=0$ 인 경우

방정식 $f(x) - k(x+2) = 0$ 의 실근이 $x=0$ 이라면

$$f(0) = 2k \rightarrow k = 6$$

이어야 한다.

(1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 k 의 값은

$$-2 < k < 6 \quad \text{또는} \quad k = 6$$

이다. 따라서 모든 정수 k 의 개수는 8개다. (-1 부터 6 까지!)

$$\therefore 8$$

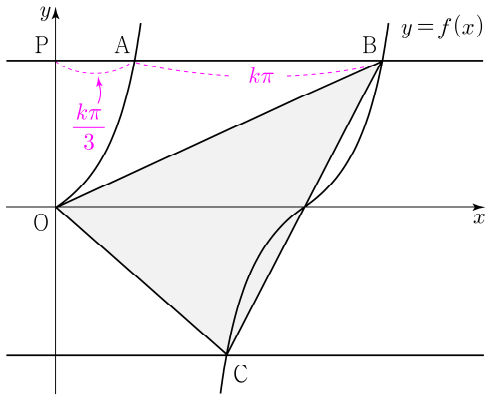
공통

14

정답 ③

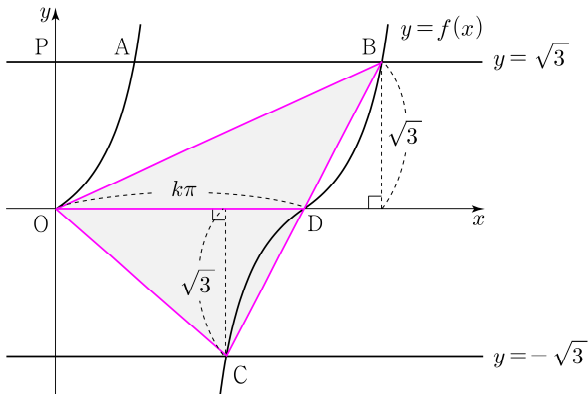
정답 ③

함수 $f(x) = \tan \frac{x}{k}$ 의 주기는 $k\pi$ 이므로 $\overline{AB} = k\pi$ 이다.



이때 $\overline{AB} = 3\overline{PA}$ 이므로 $\overline{PA} = \frac{k\pi}{3}$ 에서 점 A의 좌표는

$A\left(\frac{k\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ 이다. $\rightarrow p = \sqrt{3}$



점 D를 $D(k\pi, 0)$ 으로 두면

$$\begin{aligned} (\triangle OCB) &= (\triangle ODC) + (\triangle ODB) \\ &= \frac{1}{2} \times k\pi \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} \times k\pi \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}k\pi \end{aligned}$$

이다. 삼각형 OCB의 넓이가 $\frac{5\pi}{3}$ 이므로 $\sqrt{3}k\pi = \frac{5\pi}{3}$ 에서

$k = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ 이다. 따라서 $k+p = \frac{14\sqrt{3}}{9}$ 이다.

$$\therefore \frac{14\sqrt{3}}{9}$$

공통

15

정답 ⑤

Step 1 조건 (가)/(나)의 정보 해석

함수 $g(x)$ 는 정적분으로 정의된 함수이므로

함숫값 정보 : $g(0) = 0$

도함수 정보 : $g'(x) = |f(x)| - |x| \rightarrow$ 극값 발생 관찰

에서 $f(0) = 0$ 을 이용하기 위해 $x=0$ 을 대입하면

$g'(0) = 0$ 이다.

조건 (나)에서 $g(x)$ 는 $x=2$, $x=6$ 에서 극값을 가지므로

$$g'(2) = g'(6) = 0 \rightarrow |f(2)| = 2, |f(6)| = 6$$

이다. 또한 조건 (가)에서 방정식 $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 이므로

$g'(x) = 0$ 의 실근 $x = 0, 2, 6, k$ (단, $k \neq 0, 2, 6$)

$\rightarrow |f(x)| = |x|$ 의 실근 $x = 0, 2, 6, k$ (단, $k \neq 0, 2, 6$)

라고 할 수 있다.

이때 $x=2$, $x=6$ 은 $g'(x)$ 의 부호변화를 만들어 내는

점이어야하고 $x=0$ 이나 $x=k$ 는 부호변화가 있어도 되고

없어도 된다. (조건 (나)에서 $x=2$, $x=6$ 을 제외하고는 극값이 안 된다고 한 것은 아니기 때문이다.)

Step 2 $y = f(x)$ 의 그래프 개형이 만족해야 할 조건!

조건 (나)에서 $x=6$ 은 방정식 $|f(x)| = |x|$ 의 실근임을

확인했다. 따라서 $f(6) = -6$ 이거나 $f(6) = 6$ 이다. 이때

$f(6) \times g(2) < 0$ 를 만족해야 하므로

$$\textcircled{1} f(6) = -6 \text{인 경우} \rightarrow \int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt > 0$$

$$\textcircled{2} f(6) = 6 \text{인 경우} \rightarrow \int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt < 0$$

한편, $x=6$ 은 $g(x)$ 의 극값을 발생시키는 지점이므로 그래프

상에서 $y = |f(x)|$ 와 $y = |x|$ 가 교차하는 (접하지 않고 뚫고

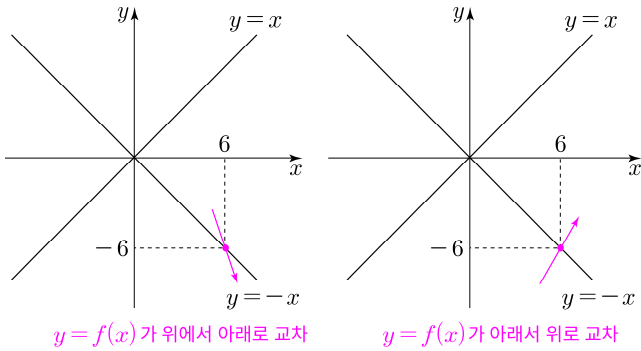
지나가는) 지점이어야 한다. 따라서 다음과 같은 4개의

케이스에서 $g(2)$ 의 부호와 (정적분 값의 부호) 방정식

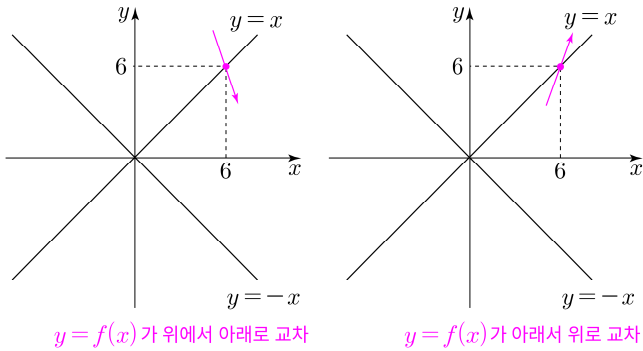
$|f(x)| = |x|$ 의 서로 다른 실근이 $0, 2, 6, k$ 이어야 함을

점검한다.

① $f(6) = -6$ 인 경우



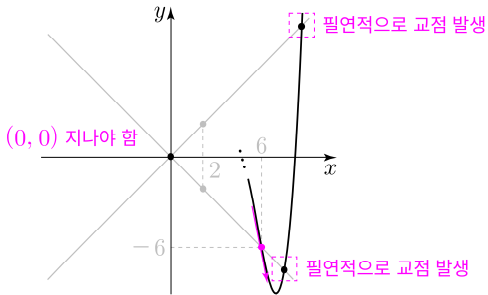
② $f(6) = 6$ 인 경우



Step 3 케이스 점검 시작!

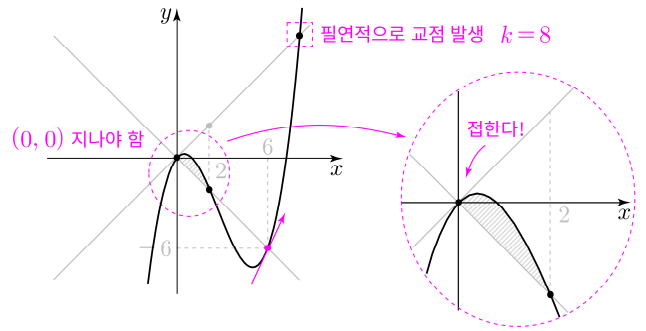
① $f(6) = -6$ 인 경우

case 1) $y=f(x)$ 가 $y=-x$ 를 위에서 아래로 뚫는 경우 (모순)



위 그림과 같이 $x=0$, $x=2$, $x=6$ 을 제외한 다른 지점에서 교점이 추가로 2개 발생한다. 따라서 방정식 $|f(x)| = |x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는 최소 5개가 된다. 조건 (가)에서 $|f(x)| = |x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4개여야 하므로 모순이다.

case 2) $y=f(x)$ 가 $y=-x$ 를 아래에서 위로 뚫는 경우 (모순)



위 그림과 같이 $y=x$ 와의 교점이 필연적으로 발생하므로 이 점의 x 좌표가 k 여야하고, 방정식 $|f(x)| = |x|$ 에서 0, 2, 6, k 를 제외한 다른 근은 발생해선 안 된다. 따라서 $x=2$ 는 $f(x) = -x$ 의 근이 되어야 한다. ($x=2$ 가 $f(x) = x$ 의 근이 되는 경우는 $f(x) = -x$ 에서 또 다른 실근이 추가가 된다.) 따라서

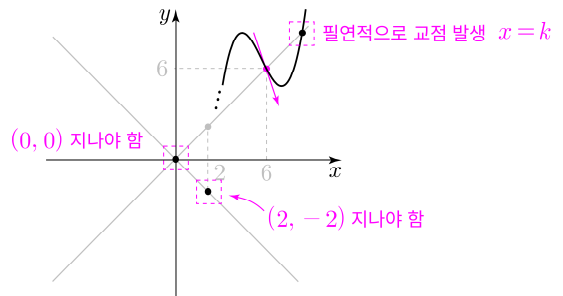
$$f(x) = -x \text{의 실근 : } x=0, 2, 6$$

$$f(x) = x \text{의 실근 : } x=0, 0, k \text{ (} k=8 \text{)}$$

이 성립해야 한다. 삼차방정식에서 세 실근의 합은 일정해야 하므로 $0+2+6=0+0+k$ 에서 $k=8$ 임을 알 수 있다. 이때 $0 < x < 2$ 에서 $|f(x)| < |x|$ 이므로 $\int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt < 0$ 이다. [스텝2]에서 $f(6) = -6$ 인 경우 $\int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt > 0$ 이어야 함에 모순이다.

② $f(6) = 6$ 인 경우

case 3) $y=f(x)$ 가 $y=x$ 를 위에서 아래로 뚫는 경우 (모순)



위 그림과 같이 필연적으로 6보다 큰 k 에서 $y=x$ 와 교점을 하나 더 발생시킨다. 따라서 $f(x) = x$ 의 근이 0, 6, k 로 3개가 확보되었기 때문에 $x=2$ 는 $f(x) = -x$ 의 근이어야 한다. 위 그림과 같이 이 조건을 만족하는 삼차함수는 그릴 수 없다.

case 4) $y=f(x)$ 가 $y=x$ 를 아래서 위로 뚫는 경우

이 케이스는 $x=2$ 가 $f(x)=x$ 의 근 or $f(x)=-x$ 의 근 일 때로 나누어 생각한다.

$x=2$ 가 $f(x)=x$ 의 근이 될 경우

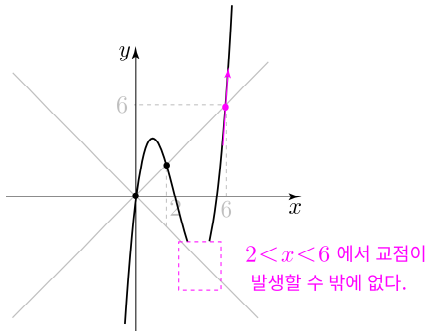
$f(x)=-x$ 의 실근 : $x=0, k, (0 \text{ or } k) \leftarrow \text{둘 다 가능!}$

$f(x)=x$ 의 실근 : $x=0, 2, 6$

삼차방정식의 세 실근이 일정해야 함을 활용하면

중근이 0인 경우 : $0+0+k=8 \rightarrow k=8$

중근이 k 인 경우 : $0+k+k=8 \rightarrow k=4$



위 그림과 같이 $x=0$ 인 점을 제외하고 삼차함수 그래프의 개형상 $f(x)=-x$ 의 근은 $2 < x < 6$ 에서 발생할 수밖에 없다.

따라서 $k=4$ 여야 한다. 하지만 이와 별개로 $0 < x < 2$ 에서

$|f(x)| > |x|$ 이므로 $\int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt > 0$ 이고 [스텝2]에서

$f(6)=6$ 인 경우 $\int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt < 0$ 이어야 함에

모순이다.

$x=2$ 가 $f(x)=-x$ 의 근이 될 경우

두 방정식 $f(x)=x, f(x)=-x$ 의 세 실근의 합이 같아야 하므로 두 방정식의 실근을 다음과 같이 세팅하자.

$f(x)=-x$ 의 실근 : $x=0, 2, p$

$f(x)=x$ 의 실근 : $x=0, 6, p-4$

이때 두 방정식의 해집합의 합집합의 원소가 4개여야 하므로 겹치는 원소가 존재해야 한다. (지금은 서로 다른 5개처럼 보임!) 모든 케이스를 점검해보면

$p=0$: 직접 점검해야 함

$p=2$: $x=2$ 에서 중근이므로 $g(x)$ 극값 발생 X (모순)

$p=6$: 두 해집합이 동일함 (모순)

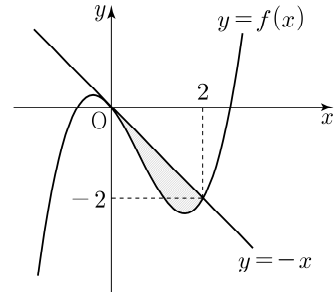
$p-4=0$: 직접 점검해야 함

$p-4=2$: 두 해집합이 동일함 (모순)

$p-4=6$: $x=6$ 에서 중근이므로 $g(x)$ 극값 발생 X (모순)

이상에서 $p=0, p=4$ 인 경우를 점검한다.

$p=0$ 인 경우 $f(x)=-x$ 의 실근은 $x=0, 0, 2$ 이므로



위 그림과 같이 $0 < x < 2$ 에서 $|f(x)| > |x|$ 이므로

$\int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt > 0$ 이고 [스텝2]에서 $f(6)=6$ 인 경우

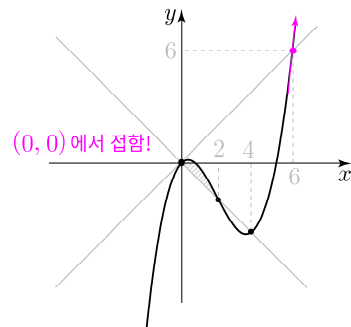
$\int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt < 0$ 이어야 함에 모순이다.

$p=4$ 인 경우

$f(x)=-x$ 의 실근 : $x=0, 2, 4$

$f(x)=x$ 의 실근 : $x=0, 0, 6$

이므로 $y=f(x), y=x, y=-x$ 의 그래프는 다음과 같다.



$0 < x < 2$ 에서 $|f(x)| < |x|$ 이므로 $\int_0^2 (|f(t)| - |t|) dt < 0$

이다. 따라서 조건을 만족한다.

Step 4 $f(x)$ 식 작성하기

$$f(x) = -x \text{의 실근 : } x=0, 2, 4$$

$$f(x) = x \text{의 실근 : } x=0, 0, 6$$

이므로 $f(x) + x = ax(x-2)(x-4)$ 이고 $f(6) = 6$ 이어야 하므로

$$f(6) + 6 = 6a \times 4 \times 2 \rightarrow a = \frac{1}{4} \quad (\because f(6) = 6)$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x-4) - x$ 이므로 $f(8) = 40$ 이다.

$\therefore 40$

다른 풀이

Step 1 방정식 $g'(x) = 0$ 의 실근 정보

정적분으로 정의된 함수 $g(x)$ 의 도함수를 구해보면

$$g'(x) = |f(x)| - |x|$$

이다. $f(0) = 0$ 이므로 $g'(0) = |f(0)| - |0| = 0$ 임을 먼저 알 수 있다.

조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=2, x=6$ 에서 극값을 가지므로 $g'(2) = g'(6) = 0$ 이고 $x=2, x=6$ 에서 부호가 변해야 한다.

조건 (가)에서 방정식 $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4개이므로 지금까지 찾은 정보를 종합하면

$$g'(x) = 0 \text{의 실근 : } 0 \text{ (?), } 2 \text{ (㉠), } 6 \text{ (㉡), } k \text{ (?)}$$

임을 알 수 있다.

이차함수 $Q(x)$ 에 대하여 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = xQ(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} g'(x) &= |f(x)| - |x| \rightarrow g'(x) = |xQ(x)| - |x| \\ &\rightarrow g'(x) = |x| \{ |Q(x)| - 1 \} \end{aligned}$$

에서 방정식 $g'(x) = 0$ 의 실근이 0, 2, 6, k 이고 $|x|$ 부분에서 실근 0을 가지므로 $|Q(x)| - 1$ 에서 갖는 실근의 케이스는 다음과 같다.

$$(1) |Q(x)| - 1 = 0 \text{의 실근 : } \{2, 6, k\}$$

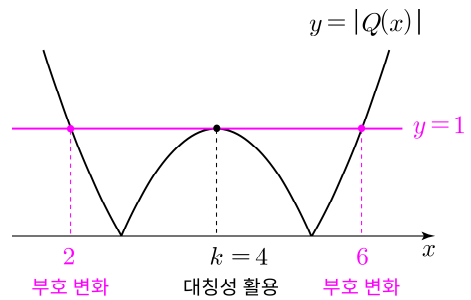
$$(2) |Q(x)| - 1 = 0 \text{의 실근 : } \{0, 2, 6, k\}$$

$x=2, x=6$ 에서 $g'(x)$ 의 부호가 변해야 하므로 마찬가지로 $|Q(x)| - 1$ 의 부호가 변해야 한다는 점에 주의하여 각각의 케이스를 점검해보자.

Step 2 $|Q(x)| = 1$ 의 실근 위치 정보에 따른 가능한 상황

(1) 방정식 $|Q(x)| = 1$ 의 실근이 $\{2, 6, k\}$

함수 $Q(x)$ 는 이차함수이고 $x=2, x=6$ 에서 $|Q(x)| - 1$ 의 부호 변화가 일어나야 하므로 가능한 개형은 다음과 같다.



이때 $f(6) \times g(2) < 0$ 을 만족하는지 확인해보자.

$$f(6) = 6 \times Q(6) > 0 \quad \leftarrow Q(6) > 0$$

$$g(2) = \int_0^2 |x| \{ |Q(x)| - 1 \} dx > 0$$

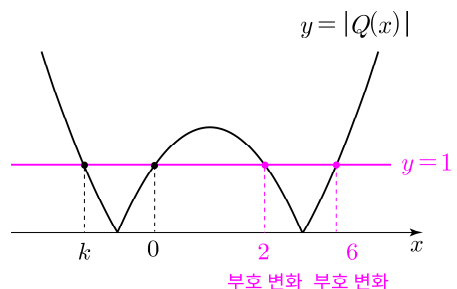
: $0 \leq x \leq 2$ 에서 $|x| \geq 0, \{ |Q(x)| - 1 \} \geq 0$ 이므로 항상 $|x| \{ |Q(x)| - 1 \} \geq 0$ 이다. 피적분함수가 구간 내에서 항상 양수이므로 정적분 값도 항상 양수다.

$f(6) \times g(2) > 0$ 이므로 모순.

(2) 방정식 $|Q(x)| = 1$ 의 실근이 $\{0, 2, 6, k\}$

곡선 $y = |Q(x)|$ 와 직선 $y = 1$ 의 교점이 4개가 발생하고 $x=2, x=6$ 에서 $|Q(x)| - 1$ 의 부호 변화가 일어나는 개형을 조사해보자.

① $k < 0$ 일 때

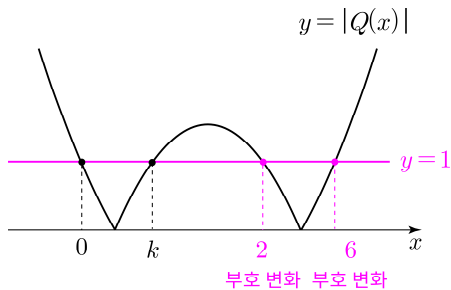


이때 (1)에서와 마찬가지로 $f(6) > 0$,

$$g(2) = \int_0^2 |x| \{ |Q(x)| - 1 \} dx > 0 \text{에서}$$

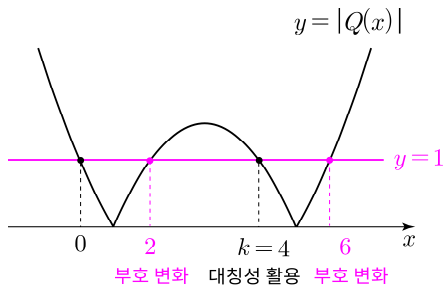
$f(6) \times g(2) > 0$ 이므로 모순.

② $0 < k < 2$ 일 때



이차함수의 대칭성에 의해 $k=4$ 이어야 한다. 따라서 위 그래프 같은 개형은 발생할 수 없다.

③ $2 < k < 6$ 일 때



이때 $f(6) \times g(2) < 0$ 을 만족하는지 확인해보자.

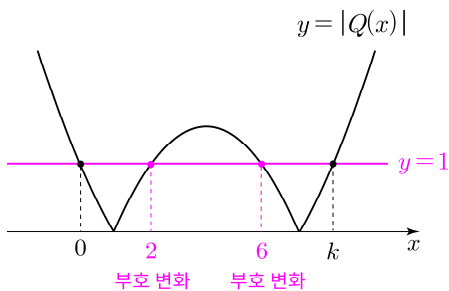
$$f(6) = 6 \times Q(6) > 0 \quad \leftarrow Q(6) > 0$$

$$g(2) = \int_0^2 |x| \{ |Q(x)| - 1 \} dx < 0$$

: $0 \leq x \leq 2$ 에서 $|x| \geq 0$, $\{ |Q(x)| - 1 \} \leq 0$ 이므로 항상 $|x| \{ |Q(x)| - 1 \} \leq 0$ 이다. 피적분함수가 구간 내에서 항상 음수이므로 정적분 값도 항상 음수다.

따라서 $k=4$ 일 때, 조건을 만족하는 개형이다.

④ $6 < k$ 일 때



$Q(6) < 0$ 이므로 $f(6) < 0$ 이고 ③과 마찬가지로

$$g(2) = \int_0^2 |x| \{ |Q(x)| - 1 \} dx < 0 \text{에서}$$

$f(6) \times g(2) > 0$ 이므로 모순.

따라서 조건을 만족하는 k 의 값은 4이고 이때 $Q(x)=1$ 의 실근이 0, 6이므로 $Q(x)=ax(x-6)+1$ 라 하면

$$\begin{aligned} Q(2) &= -1 \rightarrow -8a+1=-1 \\ &\rightarrow a = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$f(x) = x \times Q(x) \rightarrow f(x) = x \left(\frac{1}{4}x(x-6)+1 \right)$$

에서 $f(8)=40$ 이다.

공통

16

정답 8

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = na_n + 2$$

을 만족시키므로 $n=1, 2$ 를 대입하면

$$n=1 \text{ 대입 : } a_2 = a_1 + 2 \rightarrow a_2 = 3$$

$$n=2 \text{ 대입 : } a_3 = 2a_2 + 2 \rightarrow a_3 = 8$$

이다. 따라서 $a_3=8$ 이다.

$\therefore 8$

공통

17

정답 17

도함수 $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 를 부정적분하면

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + C \quad (\text{단, } C \text{ 는 적분상수})$$

이때 $f(1) = 6$ 이므로 대입해서 계산하면 $C = 3$ 이다.

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ 이므로 $f(2) = 17$ 이다.

∴ 17

공통

18

정답 30

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 로 두면 $a_3 = 6$ 이므로
 $a_4 = 6 + d (= a_3 + d)$, $a_5 = 6 + 2d (= a_3 + 2d)$ 이다. 즉,

$$2a_5 - a_4 = 15 \rightarrow d = 3$$

이다. 따라서 $a_{11} = 30 (= a_3 + 8d)$ 이다.

∴ 30

공통

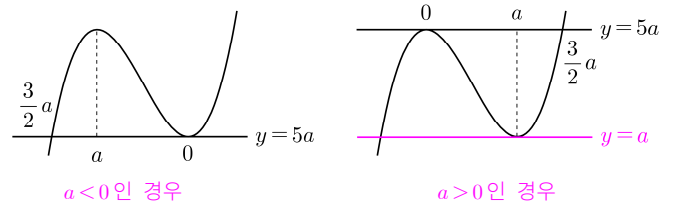
19

정답 10

함수 $f(x)$ 는

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3ax^2 + 5a \\ &= x^2(2x - 3a) + 5a \quad \leftarrow \text{직선 } y = 5a \text{ 와의 위치 관계 파악!} \end{aligned}$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$a < 0$ 이면 $f(x)$ 의 극솟값이 $5a$ 이므로 $5a = a$ 에서 $a = 0$ 이 되어 모순이다. ($a = 0$ 이면 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.)

그러므로 $a > 0$ 일 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이므로

$$\begin{aligned} f(a) = a &\rightarrow a^3 = 4a \\ &\rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $f(x)$ 의 극댓값은 10 이다.

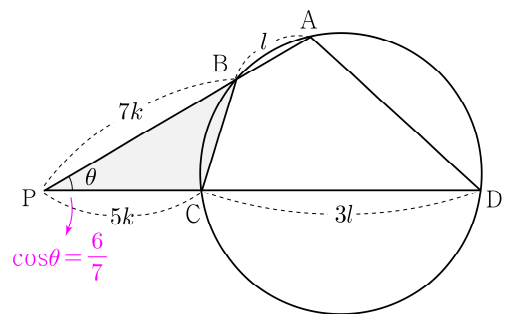
∴ 10

공통

20

정답 12

주어진 상황은 다음과 같다.



$\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PA}$ 이므로 각 변의 길이를 대입하면

$$\begin{aligned} 7k : 5k &= 5k + 3l : 7k + l \rightarrow 25k + 15l = 49k + 7l \\ &\rightarrow l = 3k \end{aligned}$$

이다. 따라서 (가)에 들어갈 알맞은 수는 3이다. $p = 3$

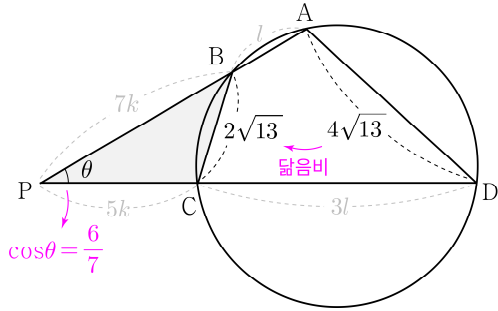
$l = 3k$ 이므로 닮음인 두 삼각형의 대응변을 통해 닮음비를 구하면 삼각형 BPC 와 삼각형 DPA 의 닮음비는

$$\begin{aligned}(\text{닢음비}) &= \overline{PC} : \overline{PA} \\&= 5k : 7k+l \\&= 5k : 10k \\&= 1 : 2\end{aligned}$$

따라서 (나)에 들어갈 알맞은 수는 2이다. $q=2$

문제에서 $\overline{AD} = 4\sqrt{13}$ 이므로 닢음비에 의해 $\overline{BC} = 2\sqrt{13}$ 이고

$$\cos \theta = \frac{6}{7} \text{에서 } \sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{7} \text{이므로}$$



삼각형 BPC에서 사인법칙에 의해 외접원의 반지름 R 은

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} &= 2R \rightarrow \frac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{13}}{7}} = 2R \\&\rightarrow R = 7\end{aligned}$$

따라서 (다)에 들어갈 알맞은 수는 7이다. $r=7$

이상에서 $p+q+r=3+2+7=12$ 이다.

$\therefore 12$

공통

21

정답 296

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

로 두고 문제를 접근해보자.

(구하는 값이 $f'(10)$ 이므로 a, b 만 결정해도 충분하다.)

0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2} + x^2 - 2 \leq \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \leq x^4$$

를 만족시키므로 $f(x), f'(x)$ 의 식을 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{2} + x^2 - 2 &\leq \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \leq x^4 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}x^2 + ax + \frac{b}{2} - 2 &\leq \frac{(2x)^3 + a(2x)^2 + 2bx}{2x} \leq x^4 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}x^2 + ax + \frac{b}{2} - 2 &\leq 4x^2 + 2ax + b \leq x^4\end{aligned}$$

㉠

㉡

: 2개의 부등식으로 바라보자!

이다. 두 부등식 ㉠, ㉡을 각각 정리하면

$$\begin{aligned}\text{㉠} : \frac{5}{2}x^2 + ax + \frac{b}{2} - 2 &\leq 4x^2 + 2ax + b \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b + 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2ax + b &\geq -3x^2 - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉡} : 4x^2 + 2ax + b &\leq x^4 \\ \Leftrightarrow 2ax + b &\leq x^4 - 4x^2\end{aligned}$$

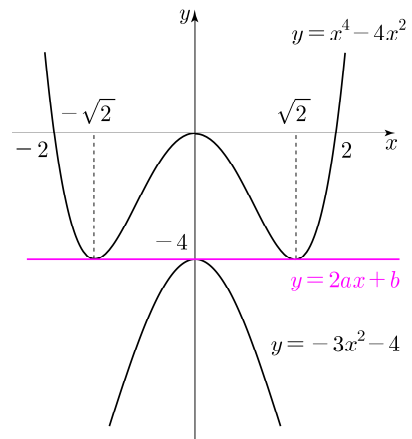
이므로 두 부등식을 다시 종합하면

$$-3x^2 - 4 \leq 2ax + b \leq x^4 - 4x^2$$

: 직선 $y=2ax+b$ 는 $y=-3x^2-4$ 보다는 위쪽에,

$y=x^4-4x^2$ 보다는 아래쪽에 그려져야 한다!

이때 두 함수 $y=-3x^2-4, y=x^4-4x^2$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=x^4-4x^2$ 의 최솟값과 함수 $y=-3x^2-4$ 의 최댓값이 모두 -4 이므로

정답 296

$$-3x^2 - 4 \leq 2ax + b \leq x^4 - 4x^2$$

을 만족시키려면 직선 $y = 2ax + b$ 는 $y = -4$ 가 되어야 한다.
즉, $a = 0$ 이고, $b = -4$ 이다.

따라서 $f'(10) = 296$ 이다.

∴ 296

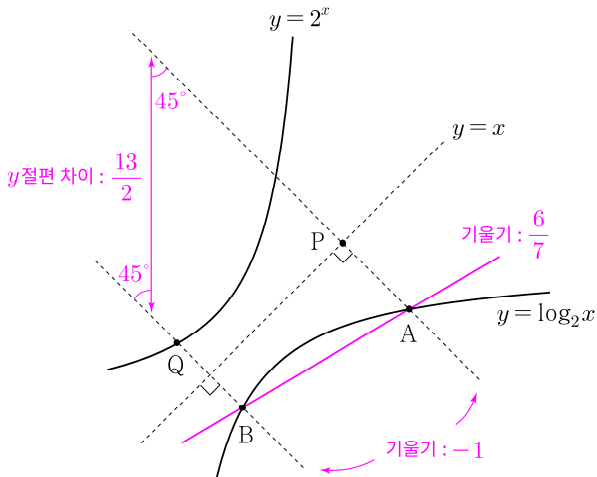
공통

22

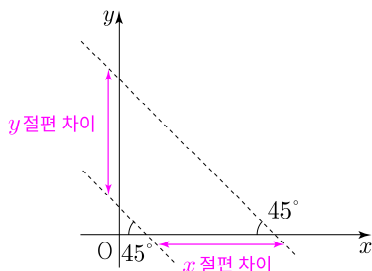
정답 73

Step 1 두 점 A, B의 좌표 찾기!

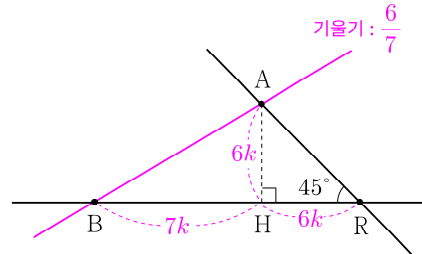
곡선 $y = \log_2 x$ 를 $y = x$ 에 대하여 대칭한 곡선은 $y = 2^x$ 이다.
조건 (가)에서 직선 AP의 y 절편이 직선 BQ의 y 절편보다
 $\frac{13}{2}$ 만큼 크고, 조건 (나)에서 직선 AB의 기울기가 $\frac{6}{7}$ 이므로
네 점 A, B, P, Q의 위치 관계는 다음 그림과 같아야 한다.



이때 두 직선 AP와 BQ는 기울기가 -1 인 직선이므로 직각
이등변삼각형을 활용하면 아래 그림과 같이 두 직선에서 (x 절편
차이) = (y 절편 차이)가 성립함을 알 수 있다.



두 직선의 y 절편 차이가 $\frac{13}{2}$ 이므로 두 직선의 x 절편의 차이도
 $\frac{13}{2}$ 이다. 점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 AP와
만나는 점을 R이라 하자. $\overline{BR}$ 은 두 직선의 x 절편 차이와
같으므로 $\overline{BR} = \frac{13}{2}$ 이다. 이때 삼각형 ABR에서 점 A에서 직선
BR에 내린 수선의 발을 H라 하면



직선 AB의 기울기가 $\frac{6}{7}$ 이므로 $\overline{BH} = 7k$, $\overline{AH} = 6k$ 라 둘 수
있다. 이때 삼각형 AHR은 직각이등변삼각형이므로
 $\overline{HR} = 6k$ 이어야 한다. 따라서 $\overline{BR} = \frac{13}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{BR} = \frac{13}{2} &\rightarrow 13k = \frac{13}{2} \\ &\rightarrow k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉, 두 점 A와 B의 x 좌표의 차이는 $\frac{7}{2}$, y 좌표의 차이는 3임을
알 수 있다. 두 점 A, B는 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점이므로
 $A(a, \log_2 a)$, $B(b, \log_2 b)$ 라 두면

$$\begin{cases} a - b = \frac{7}{2} & \dots \textcircled{1} \\ \log_2 a - \log_2 b = 3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

이고 연립방정식을 풀면 $\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \log_2 a - \log_2 b = 3 &\rightarrow \log_2 \left(\frac{a}{b} \right) = 3 \\ &\rightarrow a = 8b \end{aligned}$$

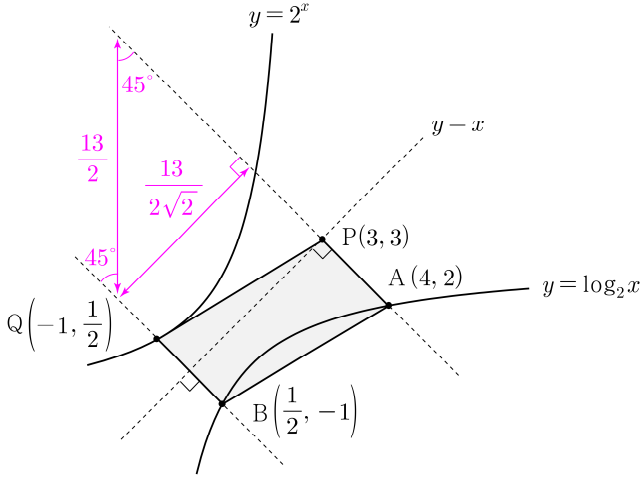
$\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a = 4$, $b = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 두 점 A, B의 좌표는
 $A(4, 2)$, $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 이다.

Step 2 사각형 APQB의 넓이 구하기

[스텝1]에서 두 점 A, B의 좌표는 $A(4, 2)$, $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 이므로

두 점 P, Q의 좌표는 $P(3, 3)$, $Q\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 이다. 사각형

APQB는 사다리꼴이므로 (사다리꼴의 높이는 $\frac{13}{2\sqrt{2}}$)



$$\begin{aligned} (\text{APQB의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times \frac{13}{2\sqrt{2}} \times (\overline{BQ} + \overline{AP}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{13}{2\sqrt{2}} \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) \\ &= \frac{65}{8} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{q}{p} = \frac{65}{8}$ 이므로 $p+q=73$ 이다.

$\therefore 73$

확률과 통계

23

정답 ④

서로 다른 세 문자 a, b, c 중 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

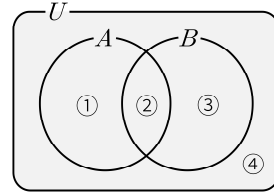
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$\therefore 81$

확률과 통계

24

정답 ③



문제의 조건에서

$$P(A \cup B) = ① + ② + ③ = \frac{5}{6}$$

$$P(A^c \cap B) = ③ = \frac{1}{4}$$

이므로

$$P(A) = ① + ② = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

따라서 구하고자 하는 값은

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \frac{5}{12}$$

확률과 통계

25

정답 ⑤

8명의 학생 중 5명의 학생을 택할 때, 선택된 2학년 학생 수와 선택된 3학년 학생 수가 같은 경우는

2학년, 3학년 모두 2명을 선택, 1학년은 1명 선택

하는 경우뿐이다.

(1) 전체 경우의 수

8명의 학생 중 5명을 택하는 전체 경우의 수는

$${}_8C_5 = 56 \text{이다.}$$

(2) 구하는 경우의 수

1학년 학생 1명 중 1명, 2학년 학생 3명 중 2명, 3학년 학생 4명 중 2명을 택하는 경우의 수는

$${}_1C_1 \times {}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18 \text{이다.}$$

(1), (2)에서 구하는 확률은 $\frac{18}{56} = \frac{9}{28}$ 이다.

$$\therefore \frac{9}{28}$$

확률과 통계**26**

정답 ②

평균이 m 이고 표준편차가 $2\sqrt{2}$ ($\rightarrow \sigma = 2\sqrt{2}$)인 정규분포를

따르는 모집단에서 크기가 128 ($\rightarrow n = 128$)인 표본을

임의추출하여 얻은 표본평균의 값 $\bar{x}$ 를 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} \bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq n \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \rightarrow \bar{x} - 1.96 \times \frac{2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} &\leq n \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \\ \rightarrow \bar{x} - 0.49 &\leq n \leq \bar{x} + 0.49 \end{aligned}$$

따라서 구하고자 하는 값은 $c = 0.49$ 이다.

$$\therefore 0.49$$

확률과 통계**27**

정답 ④

확률변수 X 가

$X =$ (두 상자를 동시에 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수의 차)

이므로 확률변수 X 가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

(1) $P(X = 0)$

서로 다른 두 상자를 동시에 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 두 수를 차례대로 a, b 라 할 때, $|a - b| = 0$ 일 확률을 구해보자. 가능한 순서쌍 (a, b) 의 종류에 따라 확률을 구하면

$$(1, 1) : \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$(2, 2) : \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{16}$$

$$(3, 3) : \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

따라서 $P(X = 0) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$ 이다.

(2) $P(X = 1)$

$|a - b| = 1$ 일 확률을 구해보자. 가능한 순서쌍 (a, b) 의 종류에 따라 확률을 구하면

$$(1, 2), (2, 1) : \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{16}$$

$$(2, 3), (3, 2) : \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16}$$

따라서 $P(X = 1) = 2 \times \frac{2}{16} + 2 \times \frac{2}{16} = \frac{4}{8}$ 이다.

(3) $P(X = 2)$

$|a - b| = 2$ 일 확률을 구해보자. 가능한 순서쌍 (a, b) 의 종류에 따라 확률을 구하면

$$(1, 3), (3, 1) : \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

따라서 $P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

(1), (2), (3)에서 확률변수 X 의 확률분포표는 아래와 같다.

X	0	1	2	계
$P(X = x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{4}{8} + 2 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{8} + 1^2 \times \frac{4}{8} + 2^2 \times \frac{1}{8}$$

$$= 1$$

따라서 구하고자 하는 값은

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{7}{16}$$

$$\therefore \frac{7}{16}$$

확률과 통계

28

정답 ②

[전체 경우의 수] - 조건 (가)

두 학생 A, B가 각각 1장 이상의 카드를 받는 경우의 수

[여사건]

두 학생 A, B가 각각 1장 이상의 카드를 받을 때,
학생 A가 받는 카드의 가짓수가 4인 경우의 수

(1) 조건 (가)의 전체 경우의 수

8장의 카드를 세 학생 A, B, C에게 나누어 줄 때, A 또는 B가 카드를 한 장도 받지 못하는 경우의 수를 제외하자.

① 8장의 카드를 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수

빨간색 카드 1장, 파란색 카드 1장, 노란색 카드 3장,
보라색 카드 3장을 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는
경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3H_3 \times {}_3H_3 = 3 \times 3 \times {}_5C_3 \times {}_5C_3 = 900$$

② 8장의 카드를 세 학생에게 나누어 줄 때 A 또는 B가 카드를 한 장도 받지 못하는 경우의 수

빨간색 카드 1장, 파란색 카드 1장, 노란색 카드 3장,
보라색 카드 3장을 A를 제외한 나머지 두 학생에게만
나누어 주는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2H_3 \times {}_2H_3 = 2 \times 2 \times {}_4C_3 \times {}_4C_3 = 64$$

8장의 카드를 B를 제외한 나머지 두 사람에게 나누어
주는 경우의 수도 마찬가지로 64이다.

8장의 카드를 A, B를 제외하고 C에게만 나누어 주는
경우의 수는 1이다.

따라서 8장의 카드를 세 학생에게 나누어 줄 때 A 또는 B가 카드를 한 장도 받지 못하는 경우의 수는
 $64 + 64 - 1 = 127$ 이다.

①, ②에서 조건 (가)의 경우의 수는 $900 - 127 = 773$ 이다.

(2) 여사건의 경우의 수

두 학생 A, B가 각각 1장 이상의 카드를 받을 때, 학생 A가 받는 카드의 가짓수가 4인 경우의 수를 구하자.

학생 A에게 먼저 빨간색 카드 1장, 파란색 카드 1장,
노란색 카드 1장, 보라색 카드 1장을 나누어 주자.

나머지 노란색 카드 2장, 보라색 카드 2장을 세 학생 A, B, C에게 나누어 줄 때 학생 B가 카드를 1장도 받지 못하는
경우의 수를 제외하면

$${}_3H_2 \times {}_3H_2 - {}_2H_2 \times {}_2H_2 = {}_4C_2 \times {}_4C_2 - {}_3C_2 \times {}_3C_2 = 27$$

(1), (2)에서 구하는 경우의 수는 $773 - 27 = 746$ 이다.

$\therefore 746$

확률과 통계

29

정답 23

Step 1 $P(A)$ 의 값 구하기

집합 A 의 부분집합 중 한 개를 택하고, 집합 B 의 부분집합 중 한 개를 택할 때 두 부분집합의 교집합의 원소의 개수가 1인 사건을 A 라 할 때, $P(A)$ 의 값을 구해보자.

(1) 전체 경우의 수

집합 A 의 부분집합 중 한 개를 택하고, 집합 B 의 부분집합 중 한 개를 택하는 전체 경우의 수는 $8 \times 4 = 32$ 이다.

(2) 구하는 경우의 수

집합 A 의 부분집합 중 한 개를 택하고, 집합 B 의 부분집합 중 한 개를 택할 때 택한 두 부분집합의 교집합이 $\{2\}$ 인 경우의 수를 구하자.

- ① 두 부분집합은 모두 2를 원소로 가져야 한다.
- ② 두 부분집합 중 적어도 하나는 3을 원소로 가지지 않아야 한다.

집합 A 의 부분집합 중 2를 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^2 = 4$ 이고, 집합 B 의 부분집합 중 2를 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^1 = 2$ 이므로 ①에 해당하는 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$ 이다.

이때 두 부분집합이 모두 3을 원소로 갖는 경우의 수를 제외해야 한다. 3을 원소로 갖는

A 의 부분집합 : $\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}$

B 의 부분집합 : $\{2, 3\}$

이므로 두 부분집합이 모두 3을 원소로 갖는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$ 이다.

따라서 두 부분집합의 교집합이 $\{2\}$ 인 경우의 수는 $8 - 2 = 6$ 이고, 교집합이 $\{3\}$ 인 경우의 수도 마찬가지로 6이므로 구하는 경우의 수는 $6 + 6 = 12$ 이다.

(1), (2)에서 $P(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ 이다.

Step 2 확률변수 X 의 확률분포 구하기

확률변수 X 를

$X = (\text{이 시행을 15360번 반복할 때 사건 } A \text{가 일어나는 횟수})$

라 하면, 확률변수 X 는 $n = 15360$, $p = \frac{3}{8}$ 인 이항분포

$B\left(15360, \frac{3}{8}\right)$ 을 따른다. 이때

$$E(X) = np = 15360 \times \frac{3}{8} = 5760$$

$$V(X) = np(1-p) = 15360 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 3600$$

이고, 시행횟수가 충분히 크므로 확률변수 X 는 정규분포 $N(5760, 60^2)$ 을 따른다. 따라서

$$P(X \geq 5880)$$

$$\Downarrow Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-5760}{60} \text{ 으로 표준화!}$$

$$= P\left(Z \geq \frac{5880-5760}{60}\right)$$

$$= P(Z \geq 2)$$

$$= 0.5 - 0.477 \quad \leftarrow P(0 \leq Z \leq 2) = 0.477$$

$$= 0.023$$

따라서 $k = 0.023$ 이므로 구하고자 하는 값은 $1000k = 23$ 이다.

$\therefore 23$

확률과 통계

30

정답 80

문제에서 학생 B가 카드를 바닥에 내려놓을 확률을 r 이라 하자.

Step 1 학생 A가 굴을 받을 확률 (p 의 값 구하기)

(1) 학생 A가 카드를 바닥에 내려놓을 때

학생 A가 숫자 8이 적힌 카드를 바닥에 내려놓을 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

첫 번째 규칙에 의해 학생 B가 8보다 작은 수가 적힌 카드를 내려놓아야 한다. 이때 학생 B가 내려놓는 카드에 적힌 수는 모두 8보다 작으므로 학생 B가 8보다 작은 수가 적힌 카드를 내려놓을 확률은 r 이다.

따라서 (1)의 확률은 $\frac{1}{2}r$ 이다.

(2) 학생 A가 카드를 바닥에 내려놓지 않을 때

학생 A가 숫자 1이 적힌 카드를 택하여 카드를 바닥에 내려놓지 않을 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

두 번째 규칙에 의해 학생 B는 카드를 바닥에 내려놓아야 하므로 그 확률은 r 이다.

따라서 (2)의 확률은 $\frac{1}{2}r$ 이다.

(1), (2)에서 $p = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r$ 이다.

Step 2 학생 B가 굴을 받을 확률 (q 의 값 구하기)

(1) 학생 B가 카드를 바닥에 내려놓을 때

첫 번째 규칙에 의해 학생 A도 카드를 바닥에 내려놓아야 한다. 그러나 학생 A가 바닥에 내려놓은 카드에 적힌 숫자는 8이고, 이는 학생 B가 가진 모든 카드에 적힌 숫자보다 크므로 (1)의 경우 학생 B는 굴을 받지 못한다.

(2) 학생 B가 카드를 바닥에 내려놓지 않을 때

학생 B가 숫자를 바닥에 내려놓지 않을 확률은 $1-r$ 이다.

두 번째 규칙에 의해 학생 A는 카드를 바닥에 내려놓아야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 (2)의 확률은 $\frac{1}{2}(1-r)$ 이다.

(1), (2)에서 $q = \frac{1}{2}(1-r)$ 이다.

Step 3 답 구하기

문제의 조건에서

$$\begin{aligned} p = q &\rightarrow r = \frac{1}{2}(1-r) \\ &\rightarrow r = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이므로 학생 B가 카드를 내려놓을 확률은 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ 이다.

6장의 카드에 적힌 숫자 2, ..., 7 중 n 보다 작거나 같은 수가 2개여야 하므로 $n = 3$ 이다.

따라서 $p = r = \frac{1}{3}$ 이므로 구하고자 하는 값은

$$24(n+p) = 24\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 80$$

$\therefore 80$

미적분

23

정답 ①

주어진 극한을 계산하기 위해 $x-1=t$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t+1} - e}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e \times (e^t - 1)}{t} \\ &= e \end{aligned}$$

이다.

$\therefore e$

미적분

24

정답 ④

주어진 정적분 값을 계산하기 위해 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t$ 로 치환하면

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = dt \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) e^{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx &= \int_0^1 e^t dt \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

이다.

$$\therefore e - 1$$

미적분

25

정답 ②

두 실수 a, b 에 대하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a n^b}{\sqrt{n^4 + 4n} - \sqrt{n^4 + n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a n^b (\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{3n} \end{aligned}$$

의 값이 수렴하려면 (분모)=(일차식)이므로
(분자)=(일차식)이어야 한다. 즉, $b = -1$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a n^{-1} (\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{3n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a (\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{3n^2} \\ = \frac{2}{3} a \end{aligned}$$

이므로 $\frac{2}{3}a = 6$ 에서 $a = 9$ 이다. 따라서 $a + b = 8$ 이다.

$$\therefore 8$$

미적분

26

정답 ①

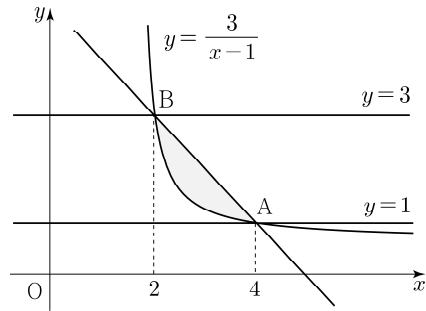
곡선 $y = \frac{3}{x-1}$ ($x > 1$)이 두 직선 $y = 1$, $y = 3$ 과 만나는

두 점 A, B의 좌표를 구해보자.

$$\frac{3}{x-1} = 1 \rightarrow (\text{점 A의 } x \text{좌표}) : 4$$

$$\frac{3}{x-1} = 3 \rightarrow (\text{점 B의 } x \text{좌표}) : 2$$

이므로 직선 AB의 방정식은 $y = -x + 5$ 이다.



따라서 곡선 $y = \frac{3}{x-1}$ ($x > 1$)과 직선 $y = -x + 5$ 로 둘러싸인
부분의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_2^4 \left\{ (-x+5) - \frac{3}{x-1} \right\} dx &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3\ln(x-1) \right]_2^4 \\ &= 4 - 3\ln 3 \end{aligned}$$

이다.

$$\therefore 4 - 3\ln 3$$

미적분

27

정답 ①

함수 $f(x^3+x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$g(f(x^3+x)) = x \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$g'(f(x^3+x)) \times f'(x^3+x) \times (3x+1) = 1 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

(미분한 결과!)

이 성립한다. 주어진 조건을 활용하기 위해 ㉠, ㉡의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\textcircled{1} \text{에 } x=1 \text{ 대입 : } g(f(2))=1$$

$$\textcircled{2} \text{에 } x=1 \text{ 대입 : } g'(f(2)) \times f'(2) \times 4 = 1$$

이때 $f(2)=1$ 이므로

$$g(f(2))=1 \quad \rightarrow \quad g(1)=1$$

$$g'(f(2)) \times f'(2) \times 4 = 1 \quad \rightarrow \quad g'(1) \times f'(2) = \frac{1}{4}$$

이다. $f'(2)=8g'(1)-1$ 이 성립하므로 이를 대입하면

$$\begin{aligned} 8(g'(1))^2 - g'(1) &= \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 32(g'(1))^2 - 4g'(1) - 1 = 0 \\ &\rightarrow \quad (8g'(1)+1)(4g'(1)-1) = 0 \end{aligned}$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x^3+x)$ 의 역함수 $g(x)$ 도 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) > 0$ 을 만족시켜야 한다. 따라서 $g'(1) = \frac{1}{4}$ 이므로 $g(1)+g'(1) = \frac{5}{4}$ 이다.

$$\therefore \frac{5}{4}$$

미적분

28

정답 ②

Step 1 주어진 항등식 관찰!

삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

를 만족시키므로 주어진 항등식을 어떻게 관찰할 것인가가 관건이다. 먼저 $g(x)$ 의 미분가능성이 보장되어 있으므로 ㉠의 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \times (1 - \sec^2 g(x)) \quad \leftarrow \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \\ &= g'(x) \times (-\tan^2 g(x)) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이다. 조건 (가)와 (나)에 의해

$$f(0)=0, \quad f''(\pi)=0, \quad \sin g(\pi)=0 \quad : \quad g(\pi)=(\text{정수}) \times \pi$$

임을 알고 있으므로 ㉠, ㉡에 $x=0, \pi$ 를 대입함으로써 얻어낼 수 있는 유의미한 정보가 있을 지 지켜보자.

$$\textcircled{1} \text{에 } x=0 \text{ 대입 : } f(0)=g(0)-\tan g(0)$$

$$x=\pi \text{ 대입 : } f(\pi)=g(\pi)-\tan g(\pi)$$

$$\textcircled{2} \text{에 } x=0 \text{ 대입 : } f'(0)=g'(0) \times (-\tan^2 g(0))$$

$$x=\pi \text{ 대입 : } f'(\pi)=g'(\pi) \times (-\tan^2 g(\pi))$$

* Remark (㉡을 한 번 더 미분?)

$f''(\pi)=0$ 을 활용하기 위해 ㉡을 한 번 더 미분하는 것은 조금 논리적 결함이 있을 수 있는 풀이다. $g(x)$ 는 미분가능한 함수라고만 제시되어 있지, 이계도함수가 존재한다고는 언급되어 있지 않으므로 $g'(x)$ 의 미분가능성은 보장되어 있지 않다. 그러므로 ㉡의 양변을 함부로 미분해선 안된다.

만약, 문제 풀이 과정에서 $g(x)$ 를 두 번 미분할 필요가 있었다면 평가원은 “실수 전체의 집합에서 이계도함수가 갖는” 등의 조건을 발문으로 제시해줄 것이다. (260628(미적) 참고)

Step 2 주어진 ((이계)도)함숫값 정보 활용!

[Step 1]에서 ㉠, ㉡에 $x=0, \pi$ 를 대입해서 얻은 정보를 하나씩 살펴보자.

(1) $f(0)=g(0)-\tan g(0)$

주어진 정보에 의해 $f(0)=0$ 이므로

$$f(0)=g(0)-\tan g(0) \quad \rightarrow \quad g(0)=\tan g(0)$$

: 가장 간단한 해가 $g(0)=0$ 을 보임!

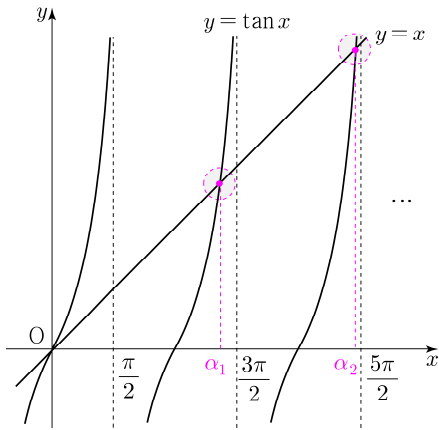
이 성립한다. 이를 만족시키는 $g(0)$ 의 값은 $g(0)=0$ 으로 직관적으로 바로 보이지만 문제에서 묻는 값인

$$g'(0) \times (g(0))^2 \text{의 값도 0이 되어 선지에 정답이 없다.}$$

그러므로 $g(0)=0$ 은 조건을 만족시키는 해가 아니라는 의미일 것이다. 조금 더 정확하게 관찰해보면 $g(0)=\tan g(0)$ 을 만족시키는 $g(0)$ 은 방정식

$$x = \tan x$$

의 해와 같으므로 함수 $y=\tan x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표가 $g(0)$ 의 값의 후보이다.



방정식 $x = \tan x$ 의 모든 양의 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 α_n 이라 하면

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha_2 < \frac{5\pi}{2}, \quad \dots$$

이다. 이때 수 많은 α_n 중에서 어느 값이 $g(0)$ 인지는 아직 알 수 없다. 아마 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$ 과 더불어 $g(x)$ 의 치역을 살펴봐야 할 것 같다는 느낌이 든다. (자세한 건 [Step 3]에서!)

$$(2) f(\pi) = g(\pi) - \tan g(\pi)$$

주어진 정보에 의해 $\sin g(\pi) = 0$ 이므로

$$f(\pi) = g(\pi) - \tan g(\pi) \rightarrow f(\pi) = g(\pi)$$

이고, $g(\pi) = (\text{정수}) \times \pi$ 이어야 한다. 그러므로 $f(\pi)$ 의 값도 $f(\pi) = (\text{정수}) \times \pi$ 이어야 한다.

$$(3) f'(0) = g'(0) \times (-\tan^2 g(0))$$

(1)에서 살펴보았듯이 $g(0) = \tan g(0)$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(0) &= g'(0) \times (-\tan^2 g(0)) \\ &\quad \downarrow g(0) = \tan g(0) \\ &= -g'(0) \times (g(0))^2 \end{aligned}$$

이 된다. 즉, 최종적으로 우리가 구해야 하는 값은 $-f'(0)$ 이므로 $f(x)$ 의 식을 결정해야 될 것 같다.

$$(4) f'(\pi) = g'(\pi) \times (-\tan^2 g(\pi))$$

(2)에 의해 $g(\pi) = (\text{정수}) \times \pi$ 이므로 $\tan^2 g(\pi) = 0$ 임을 알 수 있다. 즉, $g'(\pi)$ 의 값의 관계없이 $f'(\pi) = 0$ 이다.

(1), (2), (3), (4)에 의해 얻어낸 정보를 정리하면

- (1) : $g(0) = \tan g(0)$
- (2) : $f(\pi) = (\text{정수}) \times \pi (= g(\pi))$
- (3) : 최종적으로 구하는 값은 $-f'(0)$
- (4) : $f'(\pi) = 0$

이다. 이때 삼차함수 $f(x)$ 에 대한 정보가

$$f(0) = 0, \quad f'(\pi) = 0, \quad f''(\pi) = 0, \quad f(\pi) = (\text{정수}) \times \pi$$

로 정리되므로 $f(x)$ 를 $f(x) = a(x - \pi)^3 + k\pi$ 로 두자. (단, k 는 정수)

이때 $f(0) = 0$ 이므로 대입해서 계산하면 $a = \frac{k}{\pi^2}$ 이다.

그러므로 $f(x) = \frac{k}{\pi^2}(x - \pi)^3 + k\pi$ 이다.

Step 3 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$ 이려면?

문제에서 최종적으로 묻고 있는 값인

$-f'(0) (= g'(0) \times (g(0))^2)$ 을 구하려면 정수 k 를 결정해야 한다.

아직 쓰지 않은 조건 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$ 을 활용하여 정수 k 를 결정해보자.

문제를 풀 때 가장 먼저 관찰했던 항등식 ㉠을 다시 살펴보자.

$$\textcircled{1} : f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

위의 항등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$\tan x$ 의 정의역인, $g(x)$ 의 치역에 주목했어야 한다. 함수

$y = \tan x$ 는 $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ 에서 정의되지 않으므로

$$g(x) \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

이어야 한다. $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 (= 연속함수)이므로 $g(x)$ 의 치역으로 가능한 상황은

$$\begin{aligned} &\left\{ y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{또는} \quad \left\{ y \mid \frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2} \right\} \\ &\text{또는} \quad \left\{ y \mid \frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \text{또는} \quad \left\{ y \mid \frac{3\pi}{2} < y < \frac{5\pi}{2} \right\} \\ &\text{또는} \quad \dots \end{aligned}$$

이다. 이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$ 이려면

$$\left\{ y \mid \frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \text{또는} \quad \left\{ y \mid \frac{3\pi}{2} < y < \frac{5\pi}{2} \right\}$$

만 가능하다.

(1) $g(x)$ 의 치역이 $\left\{ y \mid \frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2} \right\}$ 라면?

$g(x)$ 의 치역이 $\left\{ y \mid \frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2} \right\}$ 이면

$$f(\pi) = g(\pi) = k\pi \quad (\text{단, } k \text{는 정수})$$

를 만족시키는 정수 k 의 값은 $k=1$ 이 유일하다.

이 경우 $f(x)$ 는 $f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^3 + \pi$ 이고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이다.

㉠의 양변에 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ 를 씌우면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x)$$

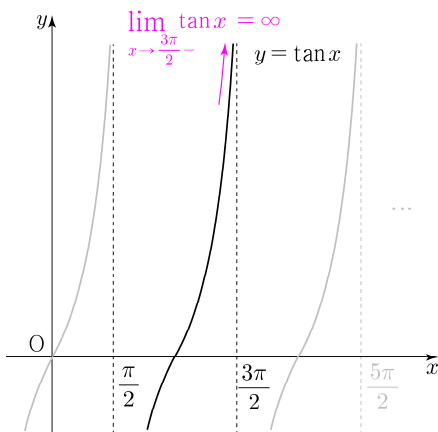
이 성립해야 한다. 이때 $g(x)$ 의 치역이

$$\left\{ y \mid \frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \text{이므로}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ 일 때, } g(x) \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2} \right)^-$$

이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \tan x$ 에서

$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x) = \infty$ 이다.



즉,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x) \\ \Leftrightarrow \infty &= \frac{3\pi}{2} - \infty \end{aligned}$$

가 되므로 모순이다.

(2) $g(x)$ 의 치역이 $\left\{ y \mid \frac{3\pi}{2} < y < \frac{5\pi}{2} \right\}$ 라면? (정답상황!)

$g(x)$ 의 치역이 $\left\{ y \mid \frac{3\pi}{2} < y < \frac{5\pi}{2} \right\}$ 이면

$$f(\pi) = g(\pi) = k\pi \quad (\text{단, } k \text{는 정수})$$

를 만족시키는 정수 k 의 값은 $k=2$ 가 유일하다.

이 경우 $f(x)$ 는 $f(x) = \frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3 + 2\pi$ 이고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이다.

㉠의 양변에 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ 를 씌우면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x)$$

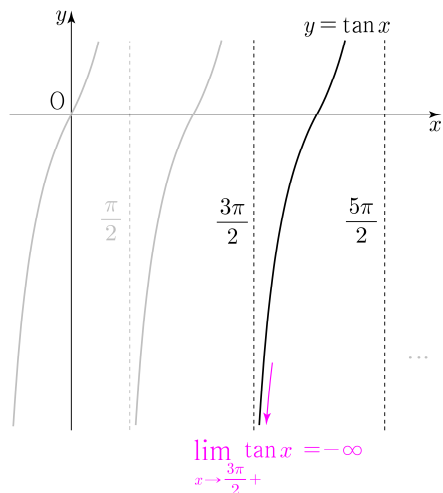
이 성립해야 한다. 이때 $g(x)$ 의 치역이

$$\left\{ y \mid \frac{3\pi}{2} < y < \frac{5\pi}{2} \right\} \quad \text{이므로}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ 일 때, } g(x) \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2} \right)^+$$

이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \tan x$ 에서

$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x) = -\infty$ 이다.



즉,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x)$$

$$\Leftrightarrow \infty = \frac{3\pi}{2} + \infty$$

이므로 모순이 발생하지 않는다.

(1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 $f(x)$ 는

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}(x - \pi)^3 + 2\pi$$

이고, $f'(0) = 6$ 이다.

따라서 $g'(0) \times (g(0))^2 = -6 (= -f'(0))$ 이다.

$$\therefore -6$$

미적분

29

정답 91

첫째항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 로 두면 r 은

유리수이고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ 이다.

조건 (가)에서 제시된 $a_1 + a_2 < 10$ 이라는 정보는 지금 당장 활용할 수 있는 것이 없으므로 조건 (나)에 조금 더 주목해보자.

조건 (나)에 의해 수열 $\{a_n\}$ 의 정수인 항의 개수는 3이고, 이 세 항의 곱은 216이므로 등비중항에 의해 가운데 정수인 항은 반드시 6이어야 한다.

(그 항을 m 번째 항이라고 가정하자. 즉, $a_m = 6$)

$$\dots \quad a_{m-2} \quad a_{m-1} \quad a_m \quad a_{m+1} \quad a_{m+2} \quad \dots$$

$$\dots \quad \frac{6}{r^2} \quad \frac{6}{r} \quad 6 \quad 6r \quad 6r^2 \quad \dots$$

$\swarrow \times r$ $\swarrow \times r$ $\swarrow \times r$ $\swarrow \times r$ $\swarrow \times r$ $\swarrow \times r$

Step 1 정수인 세 항의 관계 관찰

이때 정수인 세 항이 연속되어 등장하지 않을 수도 있을까?

정수! 정수! 정수!

a_{m-2}	a_{m-1}	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}
$\frac{6}{r^2}$	$\frac{6}{r}$	6	$6r$	$6r^2$

 정수! 정수! 정수!

a_{m-2}	a_{m-1}	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}
$\frac{6}{r^2}$	$\frac{6}{r}$	6	$6r$	$6r^2$

r 이 유리수이므로 위와 같이 정수인 세 항이 불연속적으로 발생하는 상황은 가능하지 않다. (논리적으로 보일 수도 있겠지만, 시험장에서도 불가능할 거라는 직관으로 패쓰하는 것이 빨랐을 것이다.)

(1) a_m, a_{m+1}, a_{m+2} 가 정수인 경우

 정수! 정수! 정수!

a_{m-2}	a_{m-1}	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}
$\frac{6}{r^2}$	$\frac{6}{r}$	6	$6r$	$6r^2$

$a_{m+1} = 6r$ 과 $a_{m+2} = 6r^2$ 이 모두 정수가 되어야 한다.

이때 $6r$ 이 정수가 되는 상황은 가능하지만 (ex. $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$)

$6r^2$ 이 정수가 되는 것은 불가능하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(2) a_{m-1}, a_m, a_{m+1} 이 정수인 경우 (정답상황!)

 정수! 정수! 정수!

a_{m-2}	a_{m-1}	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}
$\frac{6}{r^2}$	$\frac{6}{r}$	6	$6r$	$6r^2$

$a_{m-1} = \frac{6}{r}$ 과 $a_{m+1} = 6r$ 이 모두 정수가 되어야 한다.

이때 조금 더 간단한 $6r$ 이 정수가 되는 r 을 살펴보면

$$6r \text{이 정수} \rightarrow r = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}$$

이고, 이 중에서 $\frac{6}{r}$ 이 정수가 되도록 하는 r 은

$$\frac{6}{r} \text{도 정수} \rightarrow r = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

이 가능하다. ($a_{m-2} = \frac{6}{r^2}$ 은 정수가 되면 안된다는 사실도

신경쓰자. 혹은 $m \leq 2$ 이면 a_{m-2} 항이 존재하지 않을 수도?)

(3) a_{m-2} , a_{m-1} , a_m 이 정수인 경우

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{정수!} & \text{정수!} & \text{정수!} & & \\
 a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} \\
 \frac{6}{r^2} & \frac{6}{r} & 6 & 6r & 6r^2
 \end{array}$$

$a_{m-2} = \frac{6}{r^2}$ 과 $a_{m-1} = \frac{6}{r}$ 이 모두 정수가 되어야 하고,

$a_{m+1} = 6r$ 은 정수가 되면 안된다. 즉, 예를 들면 $r = \pm \frac{1}{7}$ 과 같은 값이 가능하다. 하지만, 첫째항이 양수이고 $a_1 + a_2 < 10$ 이어야 하는데

$$a_{m-1} = \pm 42 \rightarrow a_{m-2} = \mp 294 \rightarrow \dots$$

이 되어 $a_1 + a_2 < 10$ 를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2) 가 존재하지 않는다.

Step 2 조건을 만족시키는 r 의 값 찾기

[Step 1]에 의해 조건을 만족시키는 상황은

a_{m-1} , a_m , a_{m+1} 이 정수인 상황이다.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{정수!} & \text{정수!} & \text{정수!} & \\
 a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} \\
 \frac{6}{r^2} & \frac{6}{r} & 6 & 6r & 6r^2
 \end{array}$$

이때 $a_{m-1} = \frac{6}{r}$ 과 $a_{m+1} = 6r$ 이 모두 정수가 되도록 하는 r 은

$$r = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

이다. 이때 만약 $r > 0$ 이라면 $a_{m-1} = \frac{6}{r} > 6$ 이므로

$a_1 + a_2 < 10$ 를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2) 가 존재하지 않는다.

그러므로 $r < 0$ 을 만족시키는 $r = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}$ 에

대하여 살펴보자.

	...	a_{m-2}	a_{m-1}	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	...
$r = -\frac{1}{2}$	...	24	-12	6	-3	$\frac{3}{2}$	...
$r = -\frac{1}{3}$	...	54	-18	6	-2	$\frac{2}{3}$	...
$r = -\frac{2}{3}$	...	$\frac{27}{2}$	-9	6	-4	$\frac{8}{3}$	...
$r = -\frac{1}{6}$	...	216	-36	6	-1	$\frac{1}{6}$	...

$a_1 + a_2 < 10$ 를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2) 가 존재하는 상황은

$$r = -\frac{2}{3}, (a_1, a_2) = \left(\frac{27}{2}, -9\right), a_3 = 6$$

인 상황뿐이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{81}{10} \left(= \frac{a_1}{1-r} \right)$ 이므로

$p + q = 91$ 이다.

$\therefore 91$

미적분

30

정답 31

Step 1 주어진 항등식 변형

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \ln \left(\frac{g(x)}{1 + x f'(x)} \right)$$

를 만족시킨다는 항등식이 제시되어 있다. 우리 주어진 항등식이 이 자체로 활용할 지, 변형하여 활용할 지 판단해야 한다.

주어진 조건이 $g(x)$ 에 대한 정적분이고, 최종적으로 묻는 값에 $e^{f(x)}$ 의 형태가 포함되어 있으므로 항등식을 변형하여

$$f(x) = \ln \left(\frac{g(x)}{1 + x f'(x)} \right)$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{g(x)}{1 + x f'(x)}$$

$$\Leftrightarrow (1 + x f'(x)) e^{f(x)} = g(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

를 만들어주는 것이 문제를 해결하는 자연스러운 행동이다.

Step 2 부분적분법을 활용하여 정적분 값 계산

주어진 두 정적분 값

$$\int_1^2 g(x) dx = 34, \quad \int_1^2 x g(x) dx = 53$$

를 활용해보자. 먼저 $\int_1^2 g(x) dx$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입해보면

$$\begin{aligned}\int_1^2 g(x) dx &= \int_1^2 (1 + xf'(x)) e^{f(x)} dx \\ &= \int_1^2 e^{f(x)} dx + \int_1^2 xf'(x) e^{f(x)} dx \quad \dots \textcircled{L}\end{aligned}$$

에서 $\int_1^2 e^{f(x)} dx$ 는 더 이상의 적분 진행이 불가능하다.

(일단 스타!) $\int_1^2 xf'(x) e^{f(x)} dx$ 는 부분적분이 가능하므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 xf'(x) e^{f(x)} dx &= \left[xe^{f(x)} \right]_1^2 - \int_1^2 e^{f(x)} dx \\ &= 2e^{f(2)} - e^{f(1)} - \int_1^2 e^{f(x)} dx \quad \dots \textcircled{E}\end{aligned}$$

⑤을 ④에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_1^2 g(x) dx &= \int_1^2 e^{f(x)} dx + \int_1^2 xf'(x) e^{f(x)} dx \\ &= 2e^{f(2)} - e^{f(1)} \\ &= 34\end{aligned}$$

에서 $f(1) = 4 \ln 2$ 이므로 $f(2) = 2 \ln 5$ 이다.

이제 $\int_1^2 xg(x) dx$ 에 ⑤을 대입해보면

$$\begin{aligned}\int_1^2 xg(x) dx &= \int_1^2 x(1 + xf'(x)) e^{f(x)} dx \\ &= \int_1^2 xe^{f(x)} dx + \int_1^2 x^2 f'(x) e^{f(x)} dx \quad \dots \textcircled{G}\end{aligned}$$

에서 $\int_1^2 xe^{f(x)} dx$ 는 더 이상의 적분 진행이 불가능하다.

(문제에서 최종적으로 구해야 되는 값이기도 함. 일단 스타!)

$\int_1^2 x^2 f'(x) e^{f(x)} dx$ 는 부분적분이 가능하므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 f'(x) e^{f(x)} dx &= \left[x^2 e^{f(x)} \right]_1^2 - \int_1^2 2xe^{f(x)} dx \\ &= 4e^{f(2)} - e^{f(1)} - 2 \int_1^2 xe^{f(x)} dx \quad \dots \textcircled{H}\end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_1^2 xg(x) dx &= \int_1^2 xe^{f(x)} dx + \int_1^2 x^2 f'(x) e^{f(x)} dx \\ &= 4e^{f(2)} - e^{f(1)} - \int_1^2 xe^{f(x)} dx \quad \leftarrow \text{최종 정답!} \\ &= 53\end{aligned}$$

에서 $f(1) = 4 \ln 2$, $f(2) = 2 \ln 5$ 이므로

$$4e^{f(2)} - e^{f(1)} - \int_1^2 xe^{f(x)} dx = 53 \quad \rightarrow \quad \int_1^2 xe^{f(x)} dx = 31$$

따라서 $\int_1^2 xe^{f(x)} dx = 31$ 이다.

$\therefore 31$

다른 풀이!

주어진 항등식을 변형하면

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln \left(\frac{g(x)}{1 + xf'(x)} \right) \\ \Leftrightarrow e^{f(x)} &= \frac{g(x)}{1 + xf'(x)} \\ \Leftrightarrow (1 + xf'(x)) e^{f(x)} &= g(x) \\ \Leftrightarrow e^{f(x)} + xf'(x) e^{f(x)} &= g(x)\end{aligned}$$

이때 $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \times f'(x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = e^{f(x)}$ 로 두면 $h(1) = 16$ 이고 ($\because f(1) = 4 \ln 2$)

$$\begin{aligned}g(x) &= h(x) + xh'(x) \\ &= (xh(x))'\end{aligned}$$

이다. 즉,

$$\begin{aligned}\int_1^2 g(x) dx &= \int_1^2 (xh(x))' dx \\ &= \left[xh(x) \right]_1^2 \\ &= 2h(2) - h(1) \\ &= 2e^{f(2)} - e^{f(1)} \\ &= 34\end{aligned}$$

에서 $h(2) = 25$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_1^2 xg(x) dx &= \int_1^2 x(xh(x))' dx \\ &= \left[x^2 h(x) \right]_1^2 - \int_1^2 xh(x) dx \quad \leftarrow \text{최종 정답!} \\ &= 4h(2) - h(1) - \int_1^2 xh(x) dx \\ &= 53\end{aligned}$$

에서 $h(1) = 16$, $h(2) = 25$ 이므로

$$4h(2) - h(1) - \int_1^2 xh(x) dx = 53 \rightarrow \int_1^2 xh(x) dx = 31$$

이다. 따라서 $\int_1^2 xe^{f(x)} dx = 31 \left(= \int_1^2 xh(x) dx \right)$ 이다.

$\therefore 31$

기하

23

정답 ②

포물선 $y^2 = 8x$ 은 $y^2 = 4 \times 2 \times x$ 꼴이므로 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 따라서 $p = 2$ 이다.

$\therefore 2$

기하

24

정답 ④

직선 $\frac{x-1}{2} = y-4$ 의 방향벡터는 $\vec{u}_1 = (2, 1)$ 이고,

직선 $\frac{x+2}{8} = \frac{y+5}{a}$ 의 방향벡터는 $\vec{u}_1 = (8, a)$ 이다.

두 직선이 서로 평행하려면 방향벡터가 서로 실수배이어야 하므로

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{a} \rightarrow a = 4$$

이다.

$\therefore 4$

기하

25

정답 ①

점 $A(4, 3, -9)$ 를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점 B 의 좌표는 $B(4, 3, 9)$ 이고, 점 A 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C 의 좌표는 $C(-4, -3, 9)$ 이다.

따라서 선분 BC 의 길이는 $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ 이다.

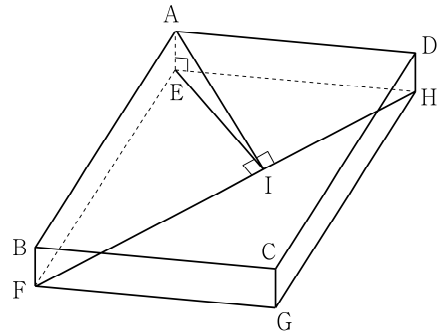
$\therefore 10$

기하

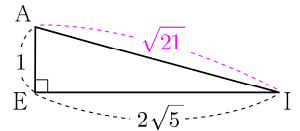
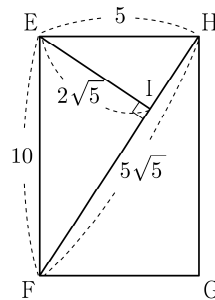
26

정답 ①

점 A 에서 직선 FH 에 내린 수선의 발을 I 라 하자.



삼수선 정리에 의해 점 I 는 점 E 에서 선분 FH 에 내린 수선의 발과 일치한다.



직각삼각형 EFH 에서 $\overline{EF} = 10$, $\overline{EH} = 5$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{FH} = 5\sqrt{5}$ 이고,

$$\overline{EF} \times \overline{EH} = \overline{FH} \times \overline{EI} \rightarrow \overline{EI} = 2\sqrt{5}$$

이다. 따라서 삼각형 AEI 에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AI} = \sqrt{21}$ 이다.

$\therefore \sqrt{21}$

기하

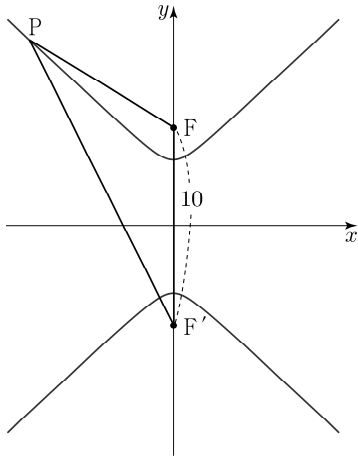
27

정답 ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 의 두 초점의 좌표는 각각

$F(0, 5)$, $F'(0, -5)$ 이고, 쌍곡선의 주축의 길이는 8이다.

쌍곡선 위의 점 P에 대하여 점 P가 제2사분면에 있으므로
상황은 다음과 같다.

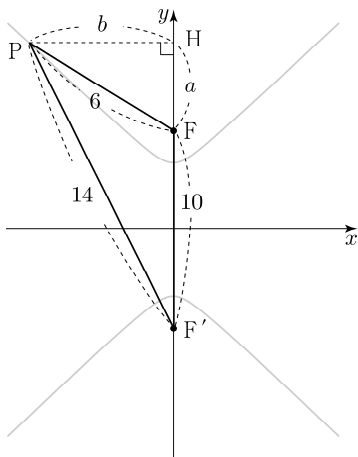


쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 8$ 이고, ... ㉠
삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이가 30이므로

$$\overline{PF'} + \overline{PF} + \overline{FF'} = 30 \rightarrow \overline{PF'} + \overline{PF} = 20 \quad \dots \textcircled{2}$$

($\because \overline{FF'} = 10$)

㉠, ㉡을 연립하면 $\overline{PF'} = 14$, $\overline{PF} = 6$ 이다.



점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
 $\overline{FH} = a$, $\overline{PH} = b$ 로 두자. 두 직각삼각형 PHF , PHF' 에서
피타고라스 정리에 의해

$$a^2 + b^2 = 36 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(a + 10)^2 + b^2 = 196 \quad \dots \textcircled{4}$$

㉢, ㉣을 연립하면 $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$ 이다. 즉, 점 P의 좌표는
 $P(-3\sqrt{3}, 8)$ 이다. 따라서 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{(-3\sqrt{3}) \times x}{9} - \frac{8 \times y}{16} = -1 \rightarrow y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2$$

이므로 접선의 기울기는 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

$$\therefore -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

기하

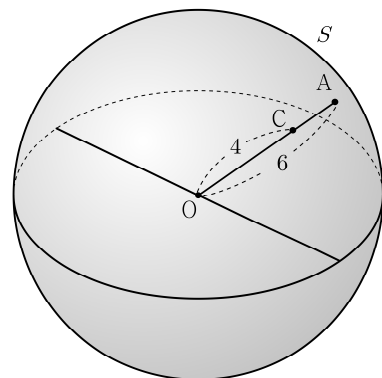
28

정답 ④

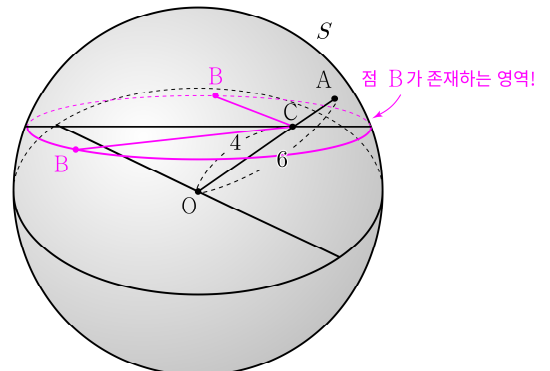
Step 1 세 점 A, B, C의 관계

구 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 36$ 의 반지름의 길이가 6이므로

구의 중심 O와 구 위의 점 A에 대하여 $\overline{OA} = 6$ 이다.



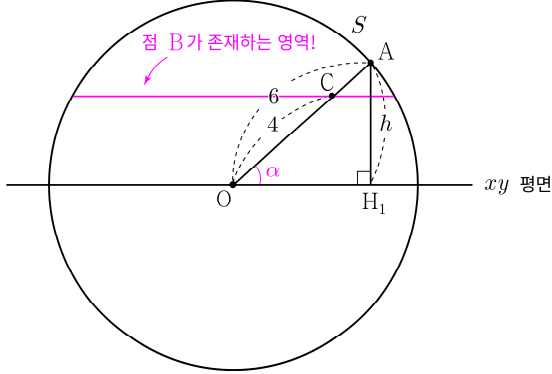
선분 OA 위의 $\overline{OC} = 4$ 인 점 C에 대하여 직선 BC와
 xy 평면이 서로 평행하므로 점 B는 점 C를 포함하고 xy 평면과
평행한 평면이 구와 만나는 교선(원!) 위에 있다.



두 직선 OA , AB 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기 α , β 에 대하여 $\sin \alpha = 3 \sin \beta$ 가 성립하기 위한 상황을 살펴보자.

(1) 각 α 관찰

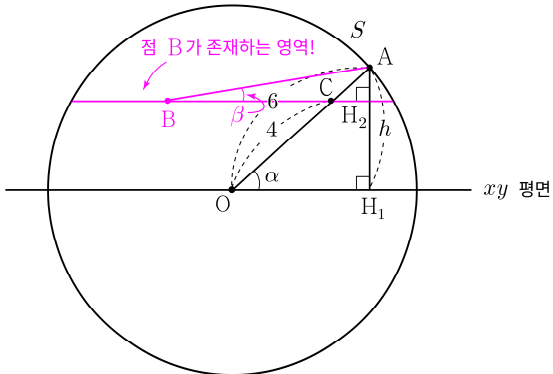
점 A 에서 평면 xy 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 할 때, $\overline{AH_1} = h$ 로 두자.



직각삼각형 OH_1A 에서 $\sin \alpha = \frac{h}{6}$ 이다.

(2) 각 β 관찰

점 A 에서 점 B 를 지나고 평면 xy 와 평행한 평면에 내린 수선의 발을 H_2 라 하자.



삼각형 OH_1A 와 삼각형 CH_2A 는 서로 닮음이고 닮음비가

$\overline{OA} : \overline{CA} = 3 : 1$ 이므로 $\overline{AH_2} = \frac{h}{3}$ 이다. 그러므로

직각삼각형 BH_2A 에서 $\sin \beta = \frac{\frac{h}{3}}{\overline{AB}}$ 이다.

(1), (2)에서 $\sin \alpha = \frac{h}{6}$, $\sin \beta = \frac{\frac{h}{3}}{\overline{AB}}$ 이므로

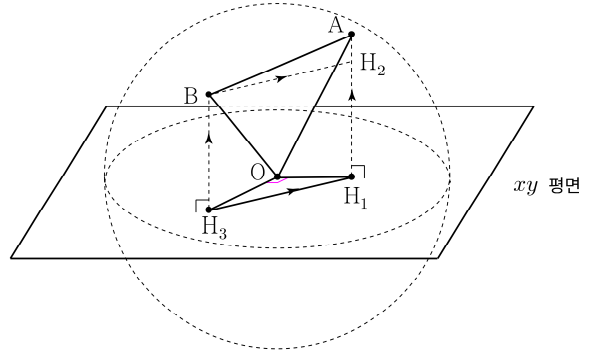
$$\sin \alpha = 3 \sin \beta \rightarrow \overline{AB} = 6$$

즉, 삼각형 OAB 는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다.

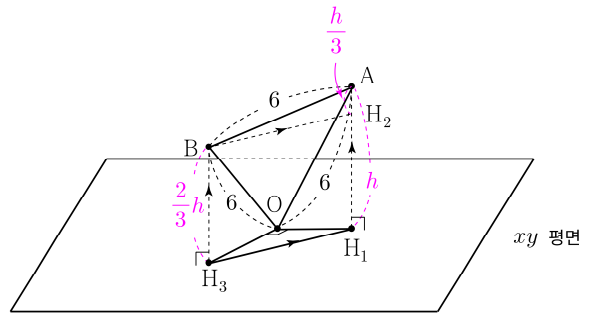
Step 2 삼각형 OAB 의 xy 평면 위로의 정사영

삼각형 OAB 의 xy 평면 위로의 정사영을 살펴보기 위해 점 B 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H_3 라 하자.

(점 A 에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 H_1 으로 이미 앞에서 정의함!)



삼각형 OAB 의 xy 평면 위로의 정사영은 삼각형 OH_1H_3 이므로 삼각형 OH_1H_3 이 직각삼각형이어야 한다. 피타고라스 정리에 의해 $\overline{H_1H_3}^2 = \overline{OH_1}^2 + \overline{OH_3}^2$ 가 성립함을 활용하기 위해서 세 선분 $\overline{H_1H_3}$, $\overline{OH_1}$, $\overline{OH_3}$ 의 길이를 구해보자.



[Step 1]에서 $\overline{AH_1} = h$, $\overline{AH_2} = \frac{h}{3}$ 이므로 $\overline{H_1H_2} = \frac{2}{3}h$ 이다.

직각삼각형에서 피타고라스 정리를 활용하면

$$\begin{aligned} (\text{직각삼각형 } AH_2B) : \overline{BH_2}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{AH_2}^2 \\ &= 36 - \frac{1}{9}h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{직각삼각형 } OH_3B) : \overline{OH_3}^2 &= \overline{OB}^2 - \overline{BH_3}^2 \leftarrow \overline{BH_3} = \overline{H_1H_2} \\ &= 36 - \frac{4}{9}h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{직각삼각형 } OH_1A) : \overline{OH_1}^2 &= \overline{OA}^2 - \overline{AH_1}^2 \\ &= 36 - h^2 \end{aligned}$$

이고, $\overline{BH_2} = \overline{H_1H_3}$ 이므로 직각삼각형 OH_1H_3 에서 피타고라스 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{H_1H_3}^2 &= \overline{OH_1}^2 + \overline{OH_3}^2 \\ \Leftrightarrow 36 - \frac{1}{9}h^2 &= (36 - h^2) + \left(36 - \frac{4}{9}h^2\right) \\ \Leftrightarrow h &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

이다. 평면 OAB 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여

$$\begin{aligned}(\triangle OAB) &= (\triangle OH_1H_3) \times \cos \theta \\ \Downarrow \quad \overline{OH_3} &= 2\sqrt{6}, \quad \overline{OH_1} = 3 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 3 \times \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

이다.

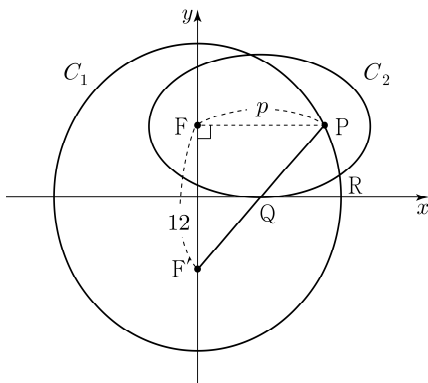
$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{3}$$

기하

29

정답 396

점 F 를 지나고 x 축과 평행한 직선이 타원 C_1 과 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점 P 의 x 좌표를 p 로 두자.



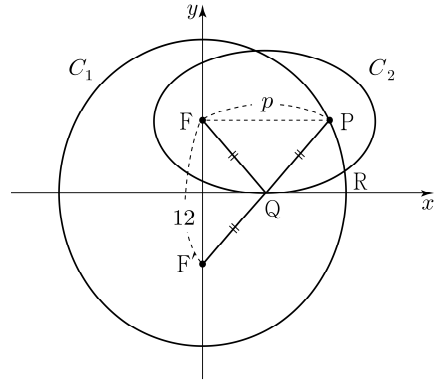
직각삼각형 $PF'F$ 에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{PF'}^2 = p^2 + 12^2 \rightarrow \overline{PF'} = \sqrt{p^2 + 144}$$

이므로 타원 C_1 의 장축의 길이는

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = p + \sqrt{p^2 + 144}$$

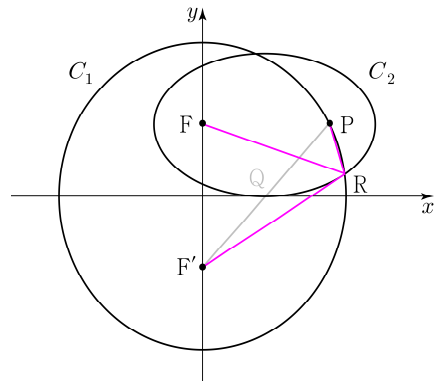
이다. 이때 점 Q 는 직선 PF' 이 x 축과 만나는 점이고, 두 점 P, F' 의 y 좌표는 크기가 같고, 부호만 서로 반대이므로 $\overline{QP} = \overline{QF} = \overline{QF'}$ 이다.



그러므로 타원 C_2 의 장축의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{QP} + \overline{QF} &= \overline{QP} + \overline{QF'} \\ &= \overline{PF'} \\ &= \sqrt{p^2 + 144}\end{aligned}$$

이다.



$\overline{F'R} - \overline{PR} = 7\sqrt{2}$ 임을 활용하기 위해

점 R 과 두 타원의 초점 사이의 관계를 살펴보면

$$\text{타원 } C_1 : \overline{FR} + \overline{F'R} = p + \sqrt{p^2 + 144} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\text{타원 } C_2 : \overline{FR} + \overline{PR} = \sqrt{p^2 + 144} \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦에서 ⑧을 빼면

$$\overline{F'R} - \overline{PR} = p \rightarrow p = 7\sqrt{2} \quad (\because \overline{F'R} - \overline{PR} = 7\sqrt{2})$$

이다.

따라서

$$(\text{타원 } C_1 \text{의 장축의 길이}) : p + \sqrt{p^2 + 144} = 18\sqrt{2}$$

$$(\text{타원 } C_2 \text{의 장축의 길이}) : \sqrt{p^2 + 144} = 11\sqrt{2}$$

이므로 두 타원의 장축의 길이의 곱은 396이다.

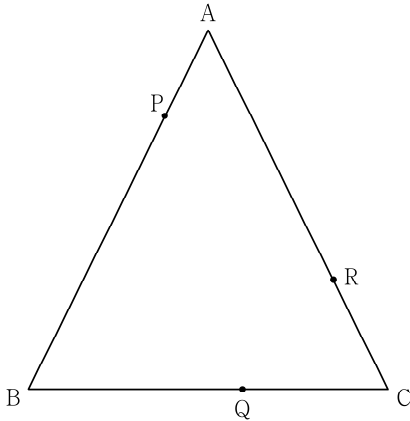
∴ 396

기하

30

정답 396

Step 1 세 점 P, Q, R의 관계 파악하기



선분 AB 위의 점 P, 선분 BC 위의 점 Q, 선분 CA 위의 점 R이 어떤 관계에 놓여 있는지 판단해보자. 조건 (가)에 의해

$$(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

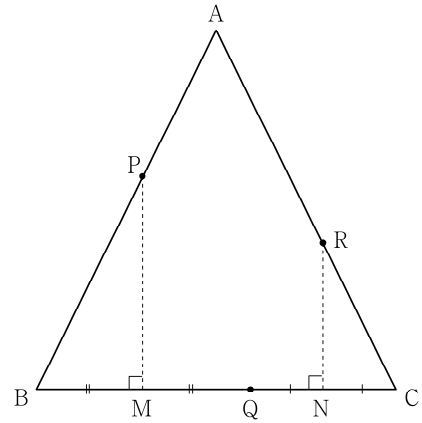
$$(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

에서 벡터의 합으로 표현된 $(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PQ})$ 의 시점이 P로 동일하고, $(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RQ})$ 의 시점이 R로 동일하므로 중점벡터로 간단하게 표현할 수 있다. 두 점 B, Q의 중점을 M, 두 점 C, Q의 중점을 N이라 하면

$$(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow 2\overrightarrow{RN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

이므로 벡터 $\overrightarrow{BC}$ 는 두 벡터 $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{RN}$ 과 모두 수직이다.



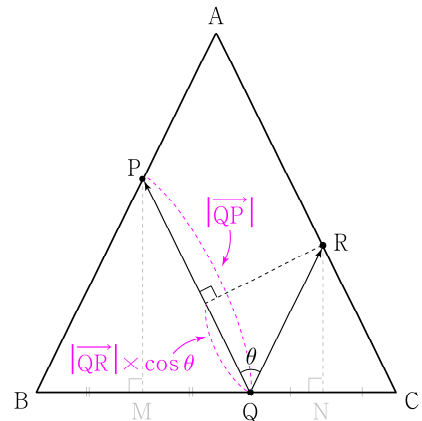
: 점 Q가 정해지면, 두 점 P, R의 위치가 정해진다!

조건 (나)에 의해

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = |\overrightarrow{QP}|^2 \rightarrow |\overrightarrow{QR}| \times \cos \theta = |\overrightarrow{QP}|$$

(단, θ 는 두 벡터 $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ 이 이루는 각의 크기!)

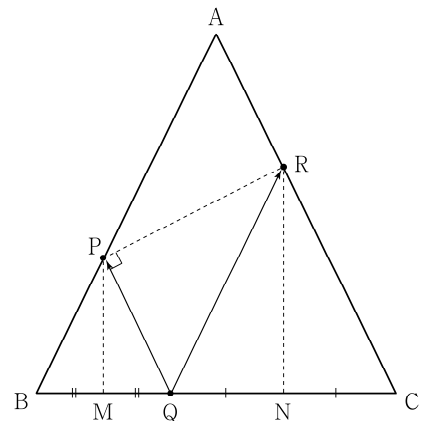
이때 $|\overrightarrow{QR}| \times \cos \theta$ 와 $|\overrightarrow{QP}|$ 의 값을 표현하면 다음과 같다.



위와 같이 세 점 P, Q, R이 설정되면

$|\overrightarrow{QR}| \times \cos \theta \neq |\overrightarrow{QP}|$ 이다. $|\overrightarrow{QR}| \times \cos \theta = |\overrightarrow{QP}|$ 가

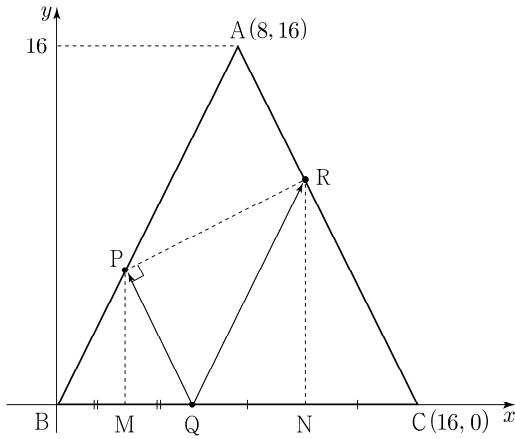
성립하려면 다음 그림과 같이 $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ 이어야 한다.



Step 2 세 점 P, Q, R의 위치 구하기

[Step 1]에서 살펴본 조건을 만족시키는 상황에서의 세 점 P, Q, R의 정확한 위치를 구해보자.

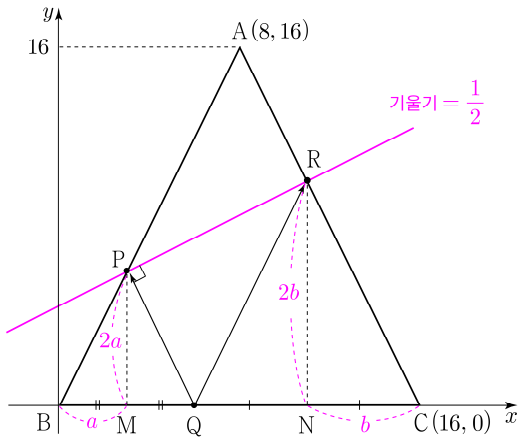
삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB} = \overline{AC} = 8\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 16$ 이므로 다음 그림과 같이 점 B를 원점 B(0, 0)으로 두면 두 점 A, C의 좌표는 A(8, 16), C(16, 0)이다.



$\overline{BM} = a$, $\overline{CN} = b$ 로 두면

$$\overline{BC} = 16 \rightarrow a + b = 8 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이고, 두 점 P, R의 좌표는 $P(a, 2a)$, $R(16-b, 2b)$ 이다.



직선 PR은 기울기가 -2 인 직선 PQ와 수직이므로

$$(\text{직선 PR의 기울기}) : \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2(a-b)}{a+b-16} = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 계산하면 $a=3$, $b=5$ 이다.

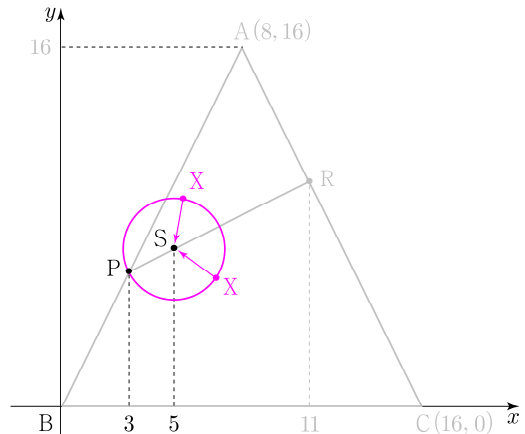
즉, 두 점 P, R의 좌표는 $P(3, 6)$, $R(11, 10)$ 이다.

Step 3 $|\overrightarrow{3XP} + \overrightarrow{XR}| = |\overrightarrow{PR}|$ 을 만족시키는 점 X

두 점 $P(3, 6)$, $R(11, 10)$ 에 대하여 선분 PR을 $1:3$ 으로 내분하는 점을 $S(5, 7)$ 라 하면, 점 X는

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{3XP} + \overrightarrow{XR}| &= |\overrightarrow{PR}| \rightarrow \left| \frac{3\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XR}}{4} \right| = \frac{1}{4} |\overrightarrow{PR}| \\ &\rightarrow |\overrightarrow{XS}| = |\overrightarrow{PS}| \end{aligned}$$

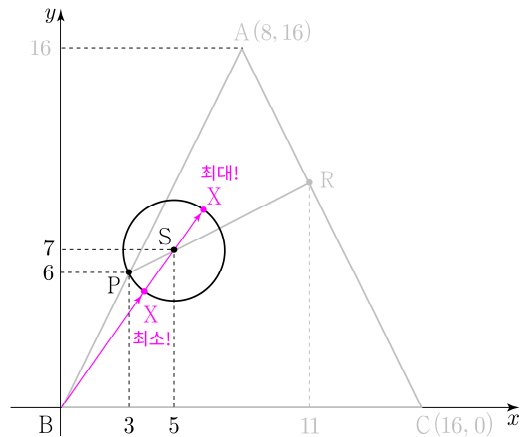
를 만족시키므로 점 X는 점 S를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원 위에 점이다.



이때 원점 B에 대하여 $|\overrightarrow{BX}|$ 이 값이 최대, 최소가 되는 순간은

$|\overrightarrow{BX}|$ 의 최댓값 : $|\overrightarrow{BS}| + (\text{원의 반지름의 길이})$

$|\overrightarrow{BX}|$ 의 최솟값 : $|\overrightarrow{BS}| - (\text{원의 반지름의 길이})$



선분 BS의 길이는 $\sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ 이고,

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{(5-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{5}$ ($= \overline{PS}$) 이므로

$|\overrightarrow{BX}|$ 의 최댓값 : $M = \sqrt{74} + \sqrt{5}$

$|\overrightarrow{BX}|$ 의 최솟값 : $m = \sqrt{74} - \sqrt{5}$

이다. 따라서 $M \times m = 69$ 이다.

$\therefore 69$