정답과 해설

2026학년도 공부플렉스 수학모의고사 PRE 수능 with 오르비 0회 빠른 정답

[공통 수학1+수학2]					
1	⑤	11	②	21	14
2	①	12	④	22	464
3	③	13	③		
4	④	14	②		
5	③	15	③		
6	④	16	2		
7	①	17	20		
8	②	18	81		
9	①	19	7		
10	⑤	20	4		

확률과 통계		미적분		기하	
23	④	23	③	23	③
24	②	24	①	24	⑤
25	①	25	④	25	①
26	⑤	26	③	26	③
27	①	27	②	27	①
28	③	28	③	28	④
29	49	29	80	29	192
30	13	30	212	30	475

공통 수학1+수학2

1

해설

$3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{5}{2}}=\sqrt{3}+9\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

답 ⑤

2

해설

$f(x)=x^3-2x^2$에서 $f'(x)=3x^2-4x$이고

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$$
$$=2f'(1)$$
$$=2\times(3-4)=-2$$

답 ①

3

해설

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$이므로 $\sin\theta-\tan\theta=\frac{3}{20}$

답 ③

4

해설

$\int_{2k}^{4k}f(x)dx=\int_{-2k}^{4k}f(x)dx-\int_{-2k}^{2k}f(x)dx=5-1=4$

답 ④

5

해설

$$a_n=\frac{8}{a_{n+1}-3}$$
$$a_2=\frac{8}{\frac{19}{5}-3}=10$$
$$a_1=\frac{8}{10-3}=\frac{8}{7}$$

답 ③

6

해설

일차함수 $g(x)=2x-k$에 대하여 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge2)\\0 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(x)g(x)=\begin{cases}2x-k & (x\ge2)\\0 & (x<2)\end{cases}$

이다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$4-k=0$에서 $k=4$이다.

$\therefore\ g(6)=12-4=8$

답 ④

7

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d (a, d는 자연수)라고 하면

$a_{10}=a+9d=2a$

즉, $a=9d$이므로 $a_n=(n+8)d$

$$\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$
$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}$$
$$=\frac{1}{d}(\sqrt{a_{17}}-\sqrt{a_1})$$
$$=\frac{1}{d}(\sqrt{25d}-\sqrt{9d})$$
$$=\frac{1}{d}\times2\sqrt{d}=2$$

$\therefore d=1$

따라서 $a_n=n+8$이므로

$a_{20}=28$

답 ①

8

해설

점 P가 선분 BC를 3 : 1로 내분하므로

$\overline{\mathrm{BP}}=2\overline{\mathrm{CP}}$ ……㉠

이다. 또한 사인법칙에 의해

(삼각형 ABP의 외접원의 반지름의 길이)$=\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{2\sin(\angle\mathrm{PAB})}$

(삼각형 ACP의 외접원의 반지름의 길이)$=\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{2\sin(\angle\mathrm{PAC})}$

이다. 그리고 삼각형 ABP와 APC의 외접원의 반지름의 길이가 3 : 4이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{2\sin(\angle\mathrm{PAB})}:\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{2\sin(\angle\mathrm{PAC})}=3:4$$

이고, 이를 ㉠과 연립하면 $\frac{\sin(\angle\mathrm{PAC})}{\sin(\angle\mathrm{PAB})}=\frac{3}{8}$임을 알 수 있다.

답 ②

9

해설

$f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

직선 $y=f'(x)-4$가 곡선 $y=xf(x)$와 x좌표가 -2인 점에서 접하므로

$f'(-2)-4=-2f(-2)$

$-4+a-4=-2(4-2a+b)$

$\therefore 3a-2b=0$ …… ㉠

$g(x)=xf(x)$로 놓으면 $g'(x)=3x^2+2ax+b$이고, 직선 $y=f'(x)-4$의 기울기는 2이므로

$g'(-2)=2$, $12-4a+b=2$

$\therefore 4a-b-10=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=6$

따라서 $f(x)=x^2+4x+6$이므로

$f(-2)=2$

답 ①

10

해설

$\beta-\alpha=\pi$이고 α, β가 구간 $\left(0,\ \frac{3}{2}\pi\right)$에 포함되어야 하므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$ …… ㉠

두 점 A, B의 좌표가 각각

$(\alpha,\ \cos\alpha)$, $(\beta,\ \cos\beta)$

이고 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{\pi}$이므로

$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\beta-\alpha}=-\frac{1}{\pi}$, $\cos\beta-\cos\alpha=-1$

$\beta=\pi+\alpha$이므로

$\cos(\pi+\alpha)-\cos\alpha=-2\cos\alpha=-1$

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}$ ($\because$ ㉠)

직선 $y=-\frac{1}{\pi}x+k$가 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{1}{2}=-\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{3}+k$ $\quad\therefore\ k=\frac{5}{6}$

답 ⑤

11

해설

$F(x)=f(x)+f(-x)$하면 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$ 이므로

조건 (가) 에서

$$\int_{-2}^{2}F(x)dx=2\int_{0}^{2}F(x)dx=12$$

$\therefore\int_0^2F(x)dx=\int_0^2f(x)dx+\int_0^2f(-x)dx=6$ ⋯ ㉠

$G(x)=|f(x)-f(-x)|=G(x)$이므로

조건 (나)에서

$\int_{-2}^{2}G(x)dx=2\int_0^2G(x)dx=6$

$\therefore\int_0^2G(x)dx=\int_0^2|f(x)-f(-x)|dx=3$ ⋯ ㉡

한편, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$ 이므로 함수 $f(x)$는 감소함수이다. 이때

$0\le x\le2$에서 $x\ge-x$이므로 $f(x)\le f(-x)$

㉡에서 $\int_0^2f(-x)dx-\int_0^2f(x)dx=3$ ⋯ ㉢

㉠, ㉢에서

$\int_0^2f(x)dx=\frac{6-3}{2}=\frac{3}{2}$, $\int_0^2f(-x)dx=\frac{6+3}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore 2\int_0^2\{2f(x)-f(-x)\}dx=2\left(2\times\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\right)=-3$

답 ②

12

해설

수열 $\{S_{3n-2}\}$는 첫째항이 $S_1=a_1=2$이고 공비가 2인 등비수열이므로 모든 자연수 n에 대하여

$S_{3n-2}=2^n$이다.

수열 $\{S_{3n-1}\}$은 첫째항이 $S_2=a_1+a_2=2+a_2$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$S_{3n-1}=(2+a_2)\times2^{n-1}$이라 하자.

$a_8+a_{10}=a_9+12 \Rightarrow S_8-S_7+S_{10}-S_9=S_9-S_8+12$

$\Rightarrow 2S_8=2S_9+S_7-S_{10}+12$

$\Rightarrow 8(2+a_2)=8+8-16+12$

$\Rightarrow a_2=-\frac{1}{2}$

이므로 $S_{3n-1}=\frac{3}{2}\times 2^{n-1}$이다.

$a_{12}=S_{12}-S_{11}=4-12=-8$이고

$S_{14}=24$이므로

$\frac{S_{14}}{a_{12}}=-3$이다.

답 ④

13

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & (x<0) \\ -x^2+4x+a & (x\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases} (x+2)^2+a-4 & (x<0) \\ -(x-2)^2+a+4 & (x\ge 0)\end{cases}$

에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x<0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접해야 한다.

따라서 $a=4$이다.

$f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & (x<0) \\ -(x-2)^2+8 & (x\ge 0)\end{cases}$에서

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$에 대하여 대칭이므로

$\int_{-2}^{0} f(x)dx=2\times 8-\int_{0}^{2} f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx=16$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} f(x)dx=16$

이다.

$A+B=\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{k} f(x)dx=16$

$\Leftrightarrow \int_{2}^{k} f(x)dx=0$

$\int_{2}^{k}(-x^2+4x+4)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_2^k$

$=\left(-\frac{1}{3}k^3+2k^2+4k\right)-\left(-\frac{8}{3}+8+8\right)$

$=-\frac{1}{3}k^3+2k^2+4k-\frac{40}{3}$

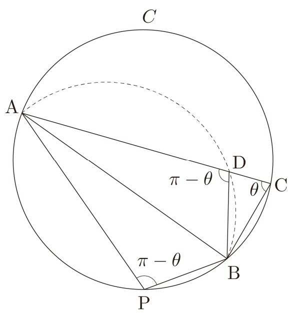
$=0$

$\therefore\ -k^3+6k^2+12k=40$

답 ③

14

해설



$\angle ACB=\theta$라 하자. 점 D를 선분 AB에 대하여 대칭이동시킨 점 P는 점 C를 포함하지 않는 호 AB 위에 있다.

$\angle APB=\pi-\angle ACB=\pi-\theta$

이므로

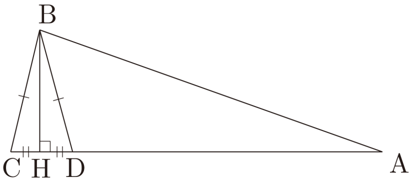
$\angle ADB=\pi-\theta$

이다.

$\angle BDC=\pi-\angle ADB=\pi-(\pi-\theta)=\theta$

이므로

삼각형 BCD는 $\overline{BC}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이다.



점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H이라 하자. 이때

$\overline{CH}=\overline{HD}$

이다. $\overline{CD}=x$라 할 때,

$\overline{CH}=\frac{1}{2}x,\ \overline{BC}=3-x$

이며

$\cos\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{BC}}=\frac{x}{2(3-x)}$

이다.

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}=x+5$

이며 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{BC}\times\overline{AC}}=\frac{(3-x)^2+(x+5)^2-(\sqrt{34})^2}{2(3-x)(x+5)}$

$=\frac{(3-x)^2+(x+5)^2-(\sqrt{34})^2}{2(3-x)(x+5)}$

$\cos\theta=\frac{x}{2(3-x)}$이므로

$\frac{(3-x)^2+(x+5)^2-(\sqrt{34})^2}{2(3-x)(x+5)}=\frac{x}{2(3-x)}$

$\frac{(x-3)^2+(x+5)^2-34}{x+5}=x$

$\frac{2x^2+4x}{x+5}=x,\ 2x^2+4x=x^2+5x,\ x^2-x=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ x>0)$

이다. 따라서

$\cos\theta=\frac{1}{4},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

이다. 원 C의 반지름을 r이라 할 때 사인법칙에 의하여

$2r\sin\theta=\overline{AB}$

$\frac{\sqrt{15}}{2}r=\sqrt{34}$

$r=\frac{2\sqrt{34}}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{510}}{15}$

이다.

답 ②

15

해설

$f(-5)<0$이며 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수가 양수이므로 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이다. $f(-5)<0,\ f(5)>0$ 방정식 $f(x)=0$은 -5보다 작은 실근 하나와 -5보다 크고 5보다 작은 실근을 가진다.

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha<-5<\beta<5,\ k>0)$

라 할 수 있다. $h(x)=f(x-7)-f(-1)$라 하자.

$g(x)=\begin{cases}|f(x)| & (x\le a) \\ h(x) & (x>a)\end{cases}$

이며 $\alpha<0<a$이므로

$\lim_{x\to-\alpha+}\frac{g(x)}{g(-x)}=\lim_{x\to-\alpha+}\frac{g(x)}{|f(-x)|}=\lim_{x\to-\alpha+}\frac{g(x)}{-f(-x)}$

$=-\lim_{x\to-\alpha+}\frac{g(x)}{k(x+\alpha)(x+\beta)}$

$\lim_{x\to-\alpha-}\frac{g(x)}{g(-x)}=\lim_{x\to-\alpha-}\frac{g(x)}{|f(-x)|}=\lim_{x\to-\alpha-}\frac{g(x)}{f(-x)}$

$=\lim_{x\to-\alpha-}\frac{g(x)}{k(x+\alpha)(x+\beta)}$

이다. $\lim_{x\to-\alpha}\frac{g(x)}{g(-x)}$가 수렴해야 하므로

$g(-\alpha)=0$

이다. $g(x)=\begin{cases}|f(x)| & (x\le a) \\ h(x) & (x>a)\end{cases}$이므로 $g(-\alpha)=0$가 되려면

$a\ge-\alpha$라면 $g(-\alpha)=|f(-\alpha)|=0$이므로 $\beta=-\alpha$이다.

$a<-\alpha$라면 $g(-\alpha)=h(-\alpha)=0$

이다. 정리하면

『 $a\ge-\alpha,\ \beta=-\alpha$ 』 또는 『 $a<-\alpha,\ \ h(-\alpha)=0$ 』

여야 한다.

ⅰ) $a\ge-\alpha,\ \beta=-\alpha$인 경우

$f(x)=k(x-\alpha)(x+\alpha)$이고

$f(5)=f(-5)=k(25-\alpha^2)$

이므로 $f(-5)<0,\ f(5)>0$을 만족하지 못한다.

ⅱ) $a<-\alpha,\ \ h(-\alpha)=0$ 인 경우

$x>a$이면 $g(x)=h(x)$이다.

$\lim_{x\to-\alpha+}\frac{g(x)}{g(-x)}=-\lim_{x\to-\alpha+}\frac{h(x)}{k(x+\alpha)(x+\beta)}$

$\lim_{x\to-\alpha-}\frac{g(x)}{g(-x)}=\lim_{x\to-\alpha-}\frac{h(x)}{k(x+\alpha)(x+\beta)}$

$\lim_{x\to-\alpha+}\frac{g(x)}{g(-x)}=\lim_{x\to-\alpha-}\frac{g(x)}{g(-x)}$이므로

$\lim_{x\to\alpha}\frac{h(x)}{k(x+\alpha)(x+\beta)}=0$

이다. 그러므로

$h(x)=k(x+\alpha)^2$

이다. $h(6)=f(-1)-f(-1)=0$이므로

$\alpha=-6$

$h(x)=k(x-6)^2,\ f(x)=k(x+6)(x-\beta)$

이다. $h(x)=k(x-6)^2$이므로

$f(x-7)-f(-1)=k(x-6)^2,$

$f(x-7)=k(x-6)^2+f(-1)$

$f(x)=k(x+1)^2+f(-1)$

이다. $k(x+6)(x-\beta)$와 $k(x+1)^2+f(-1)$의 일차항의 계수가 같으므로

$(6-\beta)k=2k,\ 6-\beta=2,\ \therefore\ \beta=4$

이다. $g(x)$는 $x=-a$에서 연속이므로 $g(-x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{g(-x)}$의 값이 존재하려면

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이어야 한다.

따라서

$|f(a)|=h(a)$

$f(a)=k(a+6)(a-4)$이고 $a<6\ (\because\ \ a<-\alpha,\ \alpha=-6)$이므로

$|f(a)|=-f(a)$

이다. $f(a)=h(a)$에서

$-k(a+6)(a-4)=k(x-6)^2$

$-(a+6)(a-4)=(a-6)^2,\quad 2a^2-10a+12=0,$

$2(a-2)(a-3)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=3$

이다. $a=2$인 경우

$2a-2=a$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다. 따라서

$\therefore\ a=3$

이다.

$g(2a-2)=g(4)=h(4)=k(4-6)^2=4k$

$g(a)=g(3)=h(3)=k(3-6)^2=9k$

이며 $g(2a-2)=g(a)-1$이므로

$4k=9k-1$

$\therefore\ k=\frac{1}{5},\ f(x)=\frac{1}{5}(x+6)(x-4)$

$\therefore\ f(9)=15$

이다.

답 ③

16

해설

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x+4)$$
$$=2$$

답 2

17

해설

$a_n=a_1+(n-1)d$를 열심히 대입해서 계산하면 된다. 첫 번째 식을 대입하여 정리하면 $a_1=d$이다.

$$\sum_{k=1}^{12}a_k=\left(\frac{a_1+a_{12}}{2}\right)12=\left(\frac{d+12d}{2}\right)12=78d$$

에서 $78d=156\Leftrightarrow d=2$이다. 즉 $a_{10}=10d=20$

답 20

18

해설

두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 $a(t)$, $b(t)$라 하면

$$a(t)=\frac{d}{dt}(18t^2-2t)=36t-2$$
$$b(t)=\frac{d}{dt}(4t^3-2t)=12t^2-2$$

이때 출발 후 가속도가 처음으로 같아지는 시각은
$a(t)=b(t)$에서

$$36t-2=12t^2-2,\ 12t(t-3)=0$$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

한편, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$$f(t)=0+\int_0^t(18t^2-2t)dt$$
$$=\left[6t^3-t^2\right]_0^t=6t^3-t^2$$
$$g(t)=0+\int_0^t(4t^3-2t)dt$$
$$=\left[t^4-t^2\right]_0^t=t^4-t^2$$

따라서 가속도가 처음으로 같아지는 시각 $t=3$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|f(3)-g(3)|=|3^4-6\times3^3|$

$=|81-162|$

$=81$

답 81

19

해설

함수 $f(x)$는 이차함수이므로 대칭축의 방정식은 $x=3$임을 알 수 있다. 마찬가지로 포물선 $y=f(x-2)$의 대칭축의 방정식은 $x=5$임을 알 수 있다.

로그부등식을 풀 때는 뭐다? 진수조건과 밑조건을 먼저 봐야 한다. 일단 밑은 모두 1이 아닌 양수이므로 일단 넘어가고, 진수조건에 의해

$$f(x)>0\ \rightarrow\ 1<x<5$$
$$f(x-2)>0\ \rightarrow\ 1<x-2<5\ \rightarrow\ 3<x<7$$

이므로, 일단 가장 먼저 $3<x<5$에서만 생각한다.

이제 밑을 1보다 큰 양수로 바꾸고 로그를 소거하자.

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}f(x-2)\ge0$$
$$\rightarrow\log_3 f(x)-\log_3 f(x-2)\ge0$$
$$\rightarrow\ \log_3 f(x-2)\le\ \log_3 f(x)\ \rightarrow f(x-2)\le f(x)$$

이차함수의 대칭성에 의해, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f(x-2)$는 $x=4$에서 만난다. 따라서 $f(x-2)\le f(x)$를 만족시키는 x의 범위는 $x\le4$이다.

$\therefore\ x\le4$ and $3<x<5\ \rightarrow3<x\le4$

$\rightarrow3+4=7$

답 7

20

해설

$\triangle\mathrm{OAM}=\triangle\mathrm{OBM}$이므로 점 M은 선분 AB의 중점이다.
양수 t에 대하여 두 점 A, B의 좌표를
$\mathrm{A}(-t,\ a^{-t})$, $\mathrm{B}(t,\ a^t)$
로 놓을 수 있고, 직선 OA의 기울기가 $\tan\frac{3}{4}\pi=-1$이므로
$a^{-t}=t$
이다. 즉,
$\mathrm{A}(-t,\ t)$, $\mathrm{B}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{M}\left(0,\ \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)$

이고 $\triangle\mathrm{OAM}=\frac{5}{16}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\times t=\frac{5}{16}$$

$\therefore t=\frac{1}{2}\ \ (\because t>0)$

이때 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$$\frac{1}{2}=a^{-\frac{1}{2}}$$

$\therefore a=4$

답 4

21

해설

$\lim_{x\to t}(x-t)=0$이므로 $\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2-f(t)}{x-t}$의 극한값이 존재하려면

$$\lim_{x\to t}\left[\{f(x)\}^2-f(t)\right]=0$$

이여야 한다. 따라서 $\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2-f(t)}{x-t}$의 극한값이 존재하려면

$$\{f(t)\}^2-f(t)=0$$
$$f(t)=0\ \text{또는}\ f(t)=1$$

여야 한다.

i) $f(t)=0$인 경우

$$\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2-f(t)}{x-t}=\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2}{x}=f(t)\times\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{x}$$
$$=f(t)f'(t)$$
$$=0$$

이다.

ii) $f(t)=1$

$$\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2-1}{x-t}=\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)-1\}\{f(x)+1\}}{x}$$
$$=\{f(t)+1\}\times\lim_{x\to t}\frac{f(x)-1}{x}$$
$$=2f'(1)$$

이다. 따라서

$f(t)=1$, $\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2-f(t)}{x-t}=0$이면 $f'(1)=0$이다.

$f(t)=1$, $f'(1)=0$라면 함수 $f(x)$는

$$f(x)=b(x-t)^2(x-c)+1\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

라 할 수 있다. 방정식 $f(x)=1$의 실근은 $x=t$, $x=b$ 뿐이며

$$f'(x)=b(x-t)(3x-2c-t)$$

이다. 따라서 $t\ne c$일 때, $f'(c)\ne0$이므로

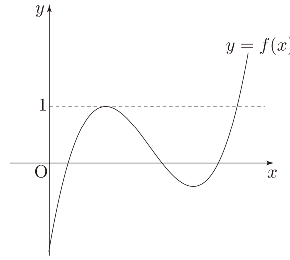
$f(t)=1$, $f'(1)=0$을 만족하는 실수 t의 개수는 최대 1개다.

방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 최대 3개이므로

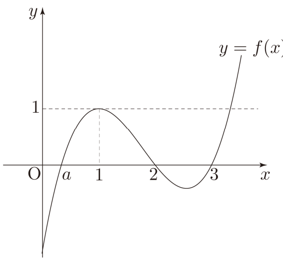
$\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2-f(t)}{x-t}=0$을 만족시키는 실수 t의 개수가 4개가 되려면

방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 최대 3개이며 $f(t)=1$, $f'(1)=0$을 만족하는 실수 t의 개수는 1개다.

㉠에 의하여 $f(x)=1$의 실근은 2개다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림과 같아야 한다.



$\lim_{x\to t}\frac{\{f(x)\}^2-f(t)}{x-t}=0$을 만족시키는 실수 t는 a, 1, 2, 3이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림과 같아야 한다.



㉠에 의하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=b(x-1)^2(x-c)+1$$

라 할 수 있다.

$$f(2)=f(3)=0$$

이므로

$$b(2-c)+1=0,\quad -bc+2b+1=0$$
$$4b(3-c)+1=0,\ -4bc+12b+1=0$$
$$b=\frac{3}{4},\ bc=\frac{5}{2}$$
$$c=\frac{10}{3}$$

이다. 그러므로

$$f(x)=\frac{3}{4}(x-1)^2\left(x-\frac{10}{3}\right)+1$$

이다. $f(a)=f(2)=f(3)=0$이며 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{3}{4}$이므로

$$f(x)=\frac{3}{4}(x-a)(x-2)(x-3)$$

이다. $f(1)=1$이므로

$$1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}a,\ a=\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $f(x)=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)(x-3)$

$$18\times f(2a)=18\times f\left(\frac{2}{3}\right)=18\times\frac{7}{9}=14$$

이다.

답 14

22

해설

$a_1 > a_{20}$이므로 $a_{n+1}^2 = a_n$을 만족하는 자연수 n이 존재한다. 이러한 자연수 n을 작은 순서대로 N_1, N_2, N_3, $\cdots$ 라 부르자.

$a_{N_1} = 81$인 경우, $1 \le k \le N_1$인 모든 자연수 k에 대하여

$a_{k+1} - a_k = 2$

이다. $a_1 = 17$이므로

$2(N_1 - 1) = 81 - 17, \quad N_1 = 32$

이다. $1 \le k \le 32$인 모든 자연수 k에 대하여

$a_{k+1} - a_k = 2$

이므로

$a_{20} = a_1 + 19 \times 2 = 55$

이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다. $a_{N_1} > 17$이므로 따라서

$a_{N_1} = 25$ 또는 $a_{N_1} = 49$

이다.

ⅰ) $a_{N_1} = 25$인 경우

$a_1 = 17$이므로

$2(N_1 - 1) = 25 - 17, \quad N_1 = 5$

이다.

$a_5 = 25, \ a_6 = 5$

이다. $a_{N_2} \ge 49$인 경우

$2(N_2 - 6) \ge 49 - 5$

$N_1 = 28$

이다. 그러므로 $6 \le k \le 28$인 모든 자연수 k에 대하여

$a_{k+1} - a_k = 2$

이므로

$a_{20} = a_6 + 14 \times 2 = 5 + 28 = 33$

이다. 따라서 문제의 조건을 만족시키지 못한다. 그러므로 $a_{N_2} < 49$이며 N_2가 존재한다면

$a_{N_2} = 25$

이다.

$2(N_2 - 6) \ge 25 - 5$

$N_2 = 16$

이다. 따라서

$a_{16} = 25, \ a_{17} = 5$

이다. 그 뒤로는

n	16	17	18	19	20
a_n	25	5	7	9	3

인 경우나

n	16	17	18	19	20
a_n	25	5	7	9	11

뿐이며 $a_{20} = 3$이므로

$1 \le k \le 5$일 때, $a_k = 2k + 15$

$6 \le k \le 16$일 때, $a_k = 2k - 7$

$17 \le k \le 19$일 때, $a_k = 2k - 29$

$a_{20} = 3$

이다.

ⅱ) $a_{N_1} = 49$인 경우

$a_1 = 17$이므로

$2(N_1 - 1) = 49 - 17, \quad N_1 = 17$

이다.

$a_{17} = 49, \ a_{18} = 7$

이다. $a_{20} = 3$이 되려면

$a_{19} = 9, \ a_{20} = 3$

이다. 따라서

$1 \le k \le 17$일 때, $a_k = 2k + 15$

$a_{18} = 7, \ a_{19} = 9, \ a_{20} = 3$

이다.

ⅰ)의 경우

$$\sum_{k=11}^{20} a_k = \sum_{k=11}^{16} (2k-7) + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$$
$$= \frac{6(15+25)}{2} + 5 + 7 + 9 + 3$$
$$= 144$$

이다. ⅱ)의 경우

$$\sum_{k=11}^{20} a_k = \sum_{k=11}^{17} (2k+15) + a_{18} + a_{19} + a_{20}$$
$$= \frac{7(37+49)}{2} + 7 + 9 + 3$$
$$= 320$$

이다. 따라서

$\left(\sum_{k=11}^{20} a_k\text{의 값이 될 수 있는 모든 실수의 합}\right)$

$= 144 + 320$

$= 464$

이다.

답 464

선택 확률과 통계

23

해설

$${}_4H_4 - {}_4P_2 = {}_{4+4-1}C_4 - 4 \times 3$$
$$= {}_7C_3 - 12$$
$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} - 12$$
$$= 35 - 12 = 23$$

답 ④

24

해설

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = a$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = b$라 하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}^C) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\{1 - \mathrm{P}(\mathrm{B})\} = a(1-b) = \frac{21}{64} \quad \cdots ㉠$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = ab = \frac{3}{64} \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$\frac{1-b}{b} = 7 \quad \therefore \ b = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{8}$

답 ②

25

해설

백의 자리의 수가 4 또는 5이면 주어진 조건을 만족시킨다.

이와 같은 세 자리 자연수의 개수는 $2 \times {}_5\Pi_2 = 50$

백의 자리의 수가 3이면 십의 자리는 3또는 4또는 5이어야 한다.

이와 같은 세 자리 자연수의 개수는 $3 \times 1 \times 1 \times 5 = 15$

따라서 구하는 경우의 수는 $50 + 15 = 65$

답 ①

26

해설

주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 같은 색의 공이 2개 나오는 경우는 '빨간 공 2개 ' 혹은 '흰 공 2개' 인 두 가지 경우뿐이고 그에 대한 확률은

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} + \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}$$

이다. 이 중에서 '빨간 공 2개'에 대한 확률은 $\frac{2}{15}$이므로

구하고자 하는 확률은

$$\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{15}} = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$$

답 ⑤

27

해설

$\left(x+\dfrac{k}{x}\right)^7$의 전개식에서 일반항은

$${}_7\mathrm{C}_r \mathrm{x}^{7-r}\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{x}}\right)^{r} = {}_7\mathrm{C}_r \times \mathrm{k}^{r} \times \mathrm{x}^{7-2r} \quad (\mathrm{r}=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$$

$f(3)$는 x^3의 계수는 $7-2\mathrm{r}=3$에서 $\mathrm{r}=2$
$f(1)$는 x의 계수는 $7-2\mathrm{r}=1$에서 $\mathrm{r}=3$

$$\frac{f(3)}{f(1)}=\frac{{}_7\mathrm{C}_2k^2}{{}_7\mathrm{C}_3k^3}=\frac{21}{35\times k}=\frac{3}{5k}=6$$

$$k=\frac{1}{10}$$

$\therefore 10k=1$

답 ①

28

해설

학생 A의 위치를 통해

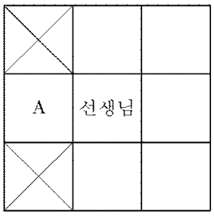
두 학생 A, B가 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구해보자.

① 학생 A가 선생님과 이웃하게 앉는 경우

학생 A가 앉을 수 있는 경우의 수는 4이고

학생 B가 학생 A와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 5이므로

구하고자하는 경우의 수는 20이다.

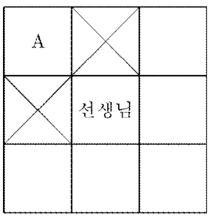


② 학생 A가 선생님과 이웃하지 않게 앉는 경우

학생 A가 앉을 수 있는 경우의 수는 4이고

학생 B가 학생 A와 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 5이므로

구하고자하는 경우의 수는 20이다.

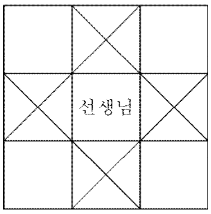


따라서 두 학생 A, B가 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 40이다.

두 학생 모두 선생님과 이웃하지 않게 앉으려면

그림과 같이 4가지에 두 학생이 모두 앉아야 하므로

그 경우의 수는 $4\times3=12$이다.



따라서 구하고자하는 확률은 $\dfrac{12}{40}=\dfrac{3}{10}$이다.

답 ③

29

해설

함수 f의 치역을 A라 하자. 문제의 조건을 만족하는 모든 함수 f의 개수는 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때 $f(n)\le f(n+1)$을 만족하는 함수 f 중에서
$f(n+1)>f(n)+1$이 존재하는 함수 f를 제외한 것의 개수를 구하는 것과 같다.
X에서 Y로의 함수 중에서 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때, $f(n)\le f(n+1)$을 만족시키는 함수 f의 개수는 서로 다른 4개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택하는 방법의 수와 같다.
${}_4\mathrm{H}_6=84$
한편, $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때, $f(n)\le f(n+1)$을 만족시키면서
$f(n+1)>f(n)+1$인 n이 존재하는 경우는 다음 중 하나이다.
(i) $A=\{1,\ 3\}$ 또는 $A=\{1,\ 4\}$ 또는 $A=\{2,\ 4\}$인 경우,
이를 만족하는 함수 f의 개수는
서로 다른 2개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택할 때, 2개의 숫자를 각각 적어도 한 개 이상 선택하는 방법의 수와 같다.
따라서 이 경우 함수 f의 개수는 $3\times{}_2\mathrm{H}_{6-2}=15$

(ii) $A=\{1,\ 2,\ 4\}$ 또는 $A=\{1,\ 3,\ 4\}$인 경우,
이를 만족하는 함수 f의 개수는
서로 다른 3개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택할 때,
3개의 숫자를 각각 적어도 한 개 이상 선택하는 방법의 수와 같다.
따라서 이 경우 함수 f의 개수는
$2\times{}_3\mathrm{H}_{6-3}=20$

(i), (ii)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 f의 개수는
$84-15-20=49$이다.

답 49

30

해설

가능한 모든 경우의 수는 $12\times6=72$이다.
주머니 A에 6이 적혀 있는 공이 남아 있지 않는 경우는
① 처음에 주머니 A에서 6가 적혀 있는 공을 꺼낸 경우
② 처음에 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱이 6인 경우
의 두 가지가 있다.

①의 경우 공에 적혀 있는 숫자로 가능한 경우는 다음과 같다.

처음에 A에서 꺼낸 공	처음에 B에서 꺼낸 공	이후 A에서 꺼낸 공
6	1	x
6	2	12
6	3	x
6	4	x
6	5	x
6	6	x

②의 경우 공에 적혀 있는 숫자로 가능한 경우는 다음과 같다.

처음에 A에서 꺼낸 공	처음에 B에서 꺼낸 공	이후 A에서 꺼낸 공
1	6	6
2	3	6
3	2	6

주머니 A에 6이 적혀 있는 공이 남아 있지 않을 확률은
$\dfrac{9}{12\times6}$이고
주머니 A에 6이 적혀 있는 공이 남아 있지 않으면서
남아 있는 공의 개수가 10일 확률, 즉 꺼낸 공의 개수가 2일 확률은
위 표에서 '이후 A에서 꺼낸 공'이 존재하는 경우만을 포함한
$\dfrac{4}{12\times6}$이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{4}{72}}{\frac{9}{72}}=\dfrac{4}{9}$이므로
$p=9,\ q=4$에서 $p+q=13$이다.

답 13

선택 미적분

23

해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2^{-n}}{2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n^2\times 2^n}}{2+\dfrac{1}{n}}$$

$$=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

답 ③

24

해설

$3x^2+xy+y^2=1$에서

$$6x+y+x\times\frac{dy}{dx}+2y\times\frac{dy}{dx}=0$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{6x+y}{x+2y}$ $(x+2y\neq 0)$이므로

점 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{\dfrac{6}{\sqrt{3}}+0}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}+0}=-6$$

답 ①

25

해설

$\log_3\left(27+\dfrac{1}{2n}\right)^n\le n\log_3 a_n\le 3n+81$에서

$$n\log_3\left(27+\frac{1}{2n}\right)\le n\log_3 a_n\le 3n+81$$

$$\therefore\ \log_3\left(27+\frac{1}{2n}\right)\le\log_3 a_n\le\frac{3n+81}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\log_3\left(27+\dfrac{1}{2n}\right)=\log_3 27=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+81}{n}=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\log_3 a_n=3$ $\qquad\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=27$

답 ④

26

해설

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 상수)라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-2)=3\alpha-2$이므로 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3a_n-4)$은 수렴한다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4)=0$이므로

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-2)=\lim\limits_{n\to\infty}\{(3a_n-4)+2\}$

$$=\lim_{n\to\infty}(3a_n-4)+2$$

$$=0+2=2$$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3a_n-4)=2$이므로 급수의 성질에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(45a_k-60)=15\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(3a_k-4)$$

$$=15\times\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-4)$$

$$=15\times 2=30$$

답 ③

27

해설

$f(\alpha-\beta)+f(\alpha+\beta)\le k^2(\alpha^2-\beta^2)$에서

$k\ln(\alpha-\beta)+k\ln(\alpha-\beta)\le k^2(\alpha^2-\beta^2)$

$k\{\ln(\alpha-\beta)+k\ln(\alpha-\beta)\}\le k^2(\alpha^2-\beta^2)$

$k\ln(\alpha^2-\beta^2)\le k^2(\alpha^2-\beta^2)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(i) $k<0$이라 가정할 때

㉠의 양변을 $k(\alpha^2-\beta^2)$으로 나누면

$\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}\ln(\alpha^2-\beta^2)\ge k$

임의의 양수 t에 대하여 $\alpha^2-\beta^2=t$를 만족시키는 두 실수 α, β가 존재하므로 $\alpha^2-\beta^2=t$로 치환하면

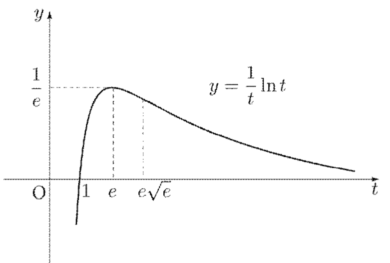
$\dfrac{1}{t}\ln t\ge k\cdots\cdots$ ㉡

이때 $g(t)=\dfrac{1}{t}\ln t$에서

$g'(t)=-\dfrac{1}{t^2}\ln t+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{1}{t^2}(1-\ln t)$

$g''(t)=-\dfrac{2}{t^3}(1-\ln t)-\dfrac{1}{t^3}=-\dfrac{1}{t^3}(3-2\ln t)$

이므로 $y=\dfrac{1}{t}\ln t$의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 임의의 양수 t에 대하여 부등식 ㉡을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ii) $k>0$이라 가정할 때

(i)과 같은 방법으로 ㉠의 양변을 $k(\alpha^2-\beta^2)$으로 나누고 $\alpha^2-\beta^2=t$로 치환하면

$\dfrac{1}{t}\ln t\le k$

이 부등식을 만족시키는 k의 값의 범위는 $k\ge\dfrac{1}{e}$이다.

(i), (ii)에서 k의 최솟값은 $\dfrac{1}{e}$이다.

답 ②

28

해설

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\pi$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=2\pi$에서

$\quad a+2=b$

이다.

$g(x)=\cos^2\pi x\sin\pi x+b\sin^3\pi x$라 하자.

$g'(x)=-2\pi\cos\pi x\sin^2\pi x+\pi\cos^3\pi x+3b\pi\sin^2\pi x\cos\pi x$

$\qquad=\pi\cos\pi x\{\cos^2\pi x+(3b-2)\sin^2\pi x\}$

$\qquad=\pi\cos\pi x\{1-(3-3b)\sin^2\pi x\}$

이다.

$g(x)$가 $x=\alpha$에서 최솟값을 가질 때

$$\sin\pi\alpha=-\sqrt{\frac{1}{3-3b}}\ \left(b\le\frac{2}{3}\right)$$

이다.

$$g(\alpha)=\cos^2\pi\alpha\sin\pi\alpha+b\sin^3\pi\alpha$$
$$=\sin\pi\alpha-(1-b)\sin^3\pi\alpha$$
$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3-3b}}$$

이다. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\pi$이고 함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\dfrac{1}{2}<\beta<\dfrac{5}{2}$이고 $f(\beta)=\dfrac{\pi}{2}$인 실수 β가 존재한다.

이다. $a<0$이므로 $y=a\sin f(x)+a+2$는 $x=\beta$에서 최솟값을 가진다.

함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 가진다. 따라서

$$2a+2=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3-3b}},\qquad 2b-2=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3-3b}}$$

$$4(1-b)^2=\frac{4}{27(1-b)},\quad (1-b)^3=\frac{1}{27},\ b=\frac{2}{3}$$

이다. $a+2=b$이므로

$$a=-\frac{4}{3},\ a^2+b^2=\frac{20}{9}$$

이다.

답 ③

29

해설

$x=t^3+1$, $y=g(t)$일 때

$$f'(x)=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{3t^2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이며 $x=|s|s+2$, $y=f(s)$일 때,

$$g'(x)=\frac{\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dx}{ds}}=\begin{cases}-\dfrac{f'(s)}{2s} & (s<0)\\ \dfrac{f'(s)}{2s} & (s>0)\end{cases}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

이다. ㉠에서 $t=1$을 대입하면 $f'(2)=3$이므로

$f'(2)=\dfrac{g'(1)}{3}$

$g'(1)=3$

이다. ㉡에 $s=-1$을 대입하면

$g'(1)=\dfrac{f'(-1)}{2}$

$\therefore\ f'(-1)=6$

이다.

답 6

30

해설

$g(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x^2+a}-2a$라 할 때

$$g'(x)=\frac{2(x-a)(x^2+a)-(x-a)^2\times 2x}{(x^2+a)^2}$$

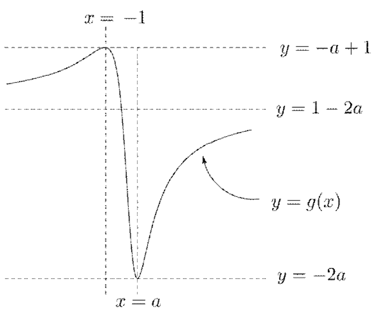
$$=\frac{(x-a)\{2(x^2+a)-2x(x-a)\}}{(x^2+a)^2}$$

$$=\frac{2a(x-a)(x+1)}{(x^2+a)^2}$$

이므로 함수 $g(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	a	$\cdots$	∞
$g'(x)$	$\to 0$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\to 0$
$g(x)$	$\to (1-2a)$	$\nearrow$	$-a+1$	$\searrow$	$-2a$	$\nearrow$	$\to(1-2a)$

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

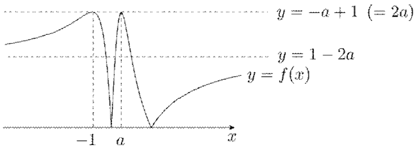


$A=\{f(x)+f(y)\mid x,\ y$는 서로 다른 실수$\}$라 하자.

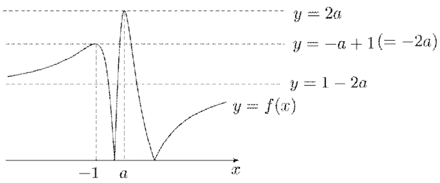
$0\in A$이므로 $-2a<0<-a+1$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)(=|g(x)|)$의 그래프는 아래와 같다.

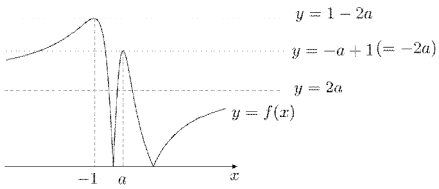
i) $-a+1=2a$



ii) $-a+1<2a$



iii) $-a+1>2a$



이때

	i) $-a+1=2a$ $\left(a=\frac{1}{3}\right)$	ii) $-a+1<2a$	iii) $-a+1>2a$
A	$\left\{x\mid 0\le x\le \frac{4}{3}\right\}$ $\left(\because\ a<\frac{1}{2}\right)$	$\{x\mid 0<x<4a\}$ 또는 $\{x\mid 0\le x<4a\}$	$\{x\mid 0\le x<-2a+2\}$ $\left(\because\ a<\frac{1}{2}\right)$

따라서

$$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3},\ f(x)=\left|\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{x^2+\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}\right|$$

이다. 그러므로

$$\therefore\ f(ab)=f\left(\frac{4}{9}\right)=\left|\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2}{\frac{16}{81}+\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{1}{43}-\frac{2}{3}\right|=\left|-\frac{83}{129}\right|$$

$=\frac{83}{129}$

$\therefore\ p=129,\ q=83,\ p+q=212$

이다.

답 212

선택 기하

23

해설

$\vec{a}-\vec{b}=(-1,\ 2)-(1,\ 1)=(-2,\ 1)$이므로

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

답 ③

24

해설

포물선 $y^2=-12x$의 준선의 방정식은 $x=3$, 초점의 좌표는 $(-3,0)$이므로

포물선 $y^2=-12(x-a)$의 준선의 방정식과 초점의 좌표는 각각 $x=a+3,\ (a-3,0)$입니다. 이때 문제에서 포물선 $y^2=-12(x-a)$의 준선의 방정식과 초점의 좌표가 각각 $x=-1,\ (b,0)$이라 하였으므로 $a+3=-1$에서 $a=-4$을, $a-3=b$에서 $b=-7$를 얻습니다. 따라서 구하는 값은 $a+b=(-4)+(-7)=-11$

답 ⑤

25

해설

정사각형 ABCD의 두 대각선은 서로 수직으로 만난다. 따라서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$가 이루는 각도는 $\frac{\pi}{2}$이다.

또 삼각형 ABD가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{EA}}=2\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{BD}}=3\sqrt{2}$이다.

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{EA}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{EA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

$=(2\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2$

$=26$

답 ①

26

해설

포물선 $y^2=36x$에서 $y^2=4\times 9\times x$이므로

초점의 좌표는 $\mathrm{F}(9,0)$, 준선의 방정식은 $x=-9$이다.

$\overline{\mathrm{PH}}=25$이므로 점 P의 x좌표는

$25-9=16$

$y^2=36x$에서 $x=16$일 때 $y^2=36\times 16$이므로 $y=24$

즉, $\mathrm{P}(16,24)$이고 $\mathrm{H}(-9,24)$

두 점 $\mathrm{F}(9,0),\mathrm{H}(-9,24)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}(x-9)$, 즉 $4x+3y-36=0$

따라서 점 $\mathrm{P}(16,24)$과 직선 $4x+3y-36=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\times 16+3\times 24-36|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{100}{5}=20$$

답 ③

27

해설

타원 E의 두 초점의 좌표는

$\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right),\ \left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$

쌍곡선 H의 두 초점의 좌표는

$\left(\sqrt{c^2+d^2},\ 0\right),\ \left(-\sqrt{c^2+d^2},\ 0\right)$

타원 E가 쌍곡선 H의 초점을 지나고, 쌍곡선 H가 타원 E의 초점을 지나므로

$a=\sqrt{c^2+d^2},\ c=\sqrt{a^2-b^2}$

즉, $a^2=c^2+d^2,\ c^2=a^2-b^2$

$\therefore\ b^2=d^2$ ……㉠

쌍곡선 H의 두 점근선의 방정식은

$y=\frac{d}{c}x,\ y=-\frac{d}{c}x$

한편, 두 점근선이 이루는 예각의 크기가

$\frac{\pi}{3}$이므로 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{d}{c}$에서 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{d}{c}$

$\therefore\ c^2=3d^2$ ……㉡

㉠, ㉡을 $c^2=a^2-b^2$에 대입하면

$3d^2=a^2-d^2$

$\therefore\ a^2=4d^2$ ……㉢

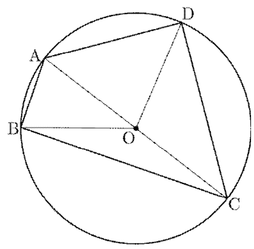
따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\frac{c^2+b^2}{a^2+d^2}=\frac{3d^2+d^2}{4d^2+d^2}=\frac{4}{5}$$

답 ①

28

해설



(가)에서 $\overparen{\mathrm{AC}}$의 원주각이 $\frac{\pi}{2}$이므로 선분 $\overline{\mathrm{AC}}$는 원의 지름이다.

원의 중심을 O라 할 때 점 O는 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(나)에서

$3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\Rightarrow 3(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=6$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$

$36=36+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+16$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-12$

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=96$

답 ④

29

해설

$(x+3)^2+y^2=9,\ (x-3)^2+y^2=1$의 중심을 각각 $\mathrm{F}'(-3,0),\ \mathrm{F}(3,0)$이라 하고 원 C의 중심을 C라 하자.

원 C가 이 두 원에 동시에 외접하므로

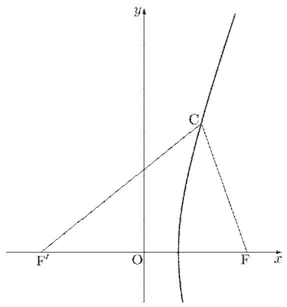
원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{CF}'}=r+3,\ \overline{\mathrm{CF}}=r+1$이다. 즉 $\overline{\mathrm{CF}'}-\overline{\mathrm{CF}}=2$이므로

점 C는 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (x>0)$ 위의 점이다.

이때 초점의 좌표가 $F(3,0)$이므로 $1+a^2=3^2$에서 $a^2=8$이다.

삼각형 $CF'F$가 이등변삼각형이므로
$\overline{F'F}=\overline{CF'}$ 또는 $\overline{F'F}=\overline{CF}$이다.
① $\overline{F'F}=\overline{CF'}$



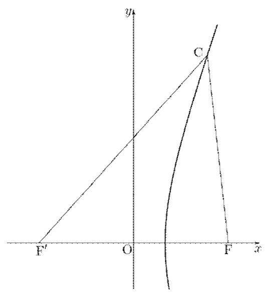
$\overline{F'F}=6$이므로 $\overline{CF'}=6$이다.
이때 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{CF}=4$이다.
$\angle CF'F=\theta$라 하면 코사인법칙에 의해

$$6^2+6^2-2\cdot 6\cdot 6\cos\theta=4^2$$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{7}{9}$이다. 따라서 $\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$이므로

삼각형 $CF'F$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=8\sqrt{2}$이다.

② $\overline{F'F}=\overline{CF}$



$\overline{F'F}=6$이므로 $\overline{CF}=6$이다.
이때 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{CF'}=8$이다.
$\angle CF'F=\theta$라 하면 코사인법칙에 의해

$$8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cos\theta=6^2$$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$이다. 따라서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로

삼각형 $CF'F$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 8\times 6\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=8\sqrt{5}$이다.

①, ②에 의해 $M=8\sqrt{5}$, $m=8\sqrt{2}$이므로
$M^2-m^2=192$이다.

답 192

30

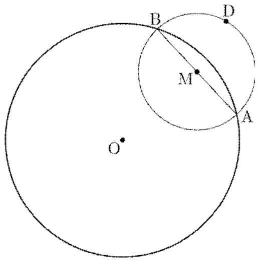
해설

조건 (가)에 의해 세 점 A, B, C는

원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

조건 (나)에 의해 점 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



선분 AB의 중점을 M이라 하자.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$이고 조건 (다)에 의해

$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}-(\vec{a}+\vec{b})=2\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{MD}$이고

$|\vec{c}|=1$이므로 $|\overrightarrow{MD}|=\dfrac{1}{2}$이다.

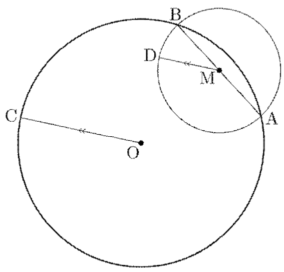
$|\overrightarrow{MD}|$는 선분 AB를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{AB}=1$이다.

위 결과들을 정리하면

1. 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고,
2. 점 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이고
3. 두 벡터 $\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{MD}$는 평행하다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이 때, 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OD}$는 평행하므로 점 D는 선분 OB 위의 점이다.

두 점 O, B의 중점을 N이라 할 때, $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}$이므로

점 N은 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

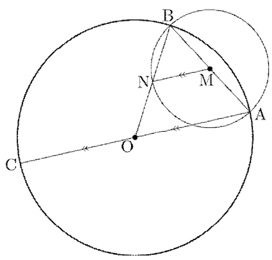
따라서 점 D는 점 N이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{MD}$는 평행하므로

점 C는 직선 OA와 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인

원과의 교점 중 점 A가 아닌 점이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $k=2$이고 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

그러므로 $100(k^2+S^2)=100\left(4+\dfrac{3}{4}\right)=475$이다.

답 475