2026학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 수학 영역 해설

[공통(수학Ⅰ+수학Ⅱ) 해설]

총평

6월 모의평가보다 더 어려워졌습니다. 그리고 작년 6월 모의평가부터 올해 6월 모의평가까지 이어졌던 문제 번호 및 문제 유형에서 변주를 많이 주려는 시도가 보였습니다.

아마 10번에서 약간 멈칫했을 수 있습니다. 일단 '등차수열과 등비수열' 단원에서는 주로 등차수열을 4점 문항으로 내는데 등비수열에서 출제된 것부터 익숙하지 않았을 것이고, 난이도도 10번은 확실하게 쉽게 주던 기존 기조에 비해서는 어렵다고 할 수 있습니다.

그러다가 11, 12번에서는 다시 쉬워졌습니다.

13번은 함수의 극한만으로 어렵게 출제하는 기존 기조를 유지하였습니다. 대단히 어려운 문제는 아니지만, 2025학년도 수능 21번 사례만 봐도 학생들이 문제의 핵심을 파악하는 것을 어려워하기 때문에 2~3등급을 걸친 학생들이 한 번 변별됐을 수도 있겠다 싶습니다.

14번은 쉬운 건 아니지만 12번과 비슷한 느낌의 문제라 무난히 풀었을 것입니다.

15번이 복병인데, $f(6)\times g(2)<0$이 의미하는 바를 잘 이해해야 했습니다. 그리고, (나) 조건을 함수 $g(x)$가 $x=2$와 $x=6$에서만 극대/극소라고 잘못 읽은 학생들, 정말 삽질 많이 했을 겁니다.

16번은 어려운 문제는 아니지만, 이제 수열의 귀납적 정의로는 어렵게 내지 않으려는 것을 다시 확인해 준 문제라서 코멘트하겠습니다.

20번은 문제 풀이 과정 없이 제공되었다면 어려웠을 것이고, 교육과정 위반 논란이 일었을 것입니다. (두 삼각형 BPC와 DPA가 닮음임을 보이는 과정이 교육과정에서 빠진 원과 비례를 이용하면 쉽습니다.) 그래서 빈칸 채우기 문제로 나온 것 같네요. 하라는 것만 하면 어렵지 않았겠지만, 이 문제 유형이 언제나 그렇듯 정답률은 낮을 것 같습니다.

21번은 다소 발상적인 문제라고 평가하고 싶습니다. 주어진 상자 조건의 식의 의미를 도저히 찾을 수 없어 그냥 식을 계산해야 되고, 삼차함수의 계수에 대한 부등식을 해석하는 과정에서 사차함수의 접선, 이차함수의 판별식 등의 개념을 종합적으로 이해하여 적용해야 했습니다.

22번은 번호 대비해서는 쉬웠습니다. 그러나 15번과 21번에서 멘탈 털린 학생들이 여기까지 잘 도달했을지 모르겠네요 ㅠㅠ

1. [정답] ④ 5

$$5^{\sqrt{2}+1}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}+1}\times5^{-\sqrt{2}}$$
$$=5^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}$$
$$=5^1=5$$

2. [정답] ④ 4

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$이고 $f'(x)=2x-4$이므로

구하는 값은 $f'(4)=2\times4-4=4$

3. [정답] ⑤ 18

수열의 합의 기호의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{6}(2a_k-1)=2\left(\sum_{k=1}^{6}a_k\right)-6=30$$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k=18$

4. [정답] ① 1

$\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)=-1$, $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=2$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1$

5. [정답] ② 7

곱의 미분법에 의해

$$f'(x)=(x^2+2)'(x^2+x-3)+(x^2+2)(x^2+x-3)'$$
$$=2x(x^2+x-3)+(2x+1)(x^2+2)$$

이다. 따라서

$$f'(1)=2\times(-1)+3\times3=7$$

이다.

수학 영역

6. [정답] ⑤ $\frac{4}{5}$

$\cos(\theta-\pi)=-\cos\theta$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ 이다.

$\tan\theta<0$ 이므로 $\sin\theta>0$ 이다.

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{4}{5}$

7. [정답] ① 6

$\frac{dy}{dx}=3x^2-10x+6$ 이므로 $x=3$ 일 때 $y=0$, $y'=3$ 이다.

따라서 접선의 방정식은 $y=3(x-3)$ 이므로 $x=5$ 를 대입하면 $a=3\times(5-3)=6$ 이다.

8. [정답] ③ 8

$\log_{\sqrt{2}}a+\log_2 b=\log_2 a^2+\log_2 b=\log_2(a^2b)=2$,

$\log_2 a+\log_2 b^2=\log_2(ab^2)=7$ 이므로

$$a^2b=2^2,\quad ab^2=2^7$$

이다. 따라서

$$ab=\sqrt[3]{a^3b^3}=\sqrt[3]{(a^2b)\times(ab^2)}=\sqrt[3]{2^2\times2^7}=\sqrt[3]{2^9}=2^3=8$$

이다.

9. [정답] ② 2

$$\begin{aligned}G(x)&=\int\left(2f(x)+1\right)dx\\&=\int 2f(x)\,dx+\int 1\,dx\\&=2F(x)+x+C\end{aligned}\qquad (C\text{는 적분상수})$$

이다. $G(3)=2F(3)+3+C$ 인데, $G(3)=2F(3)$ 이므로 $C=-3$ 이다. 따라서

$$G(5)=2F(5)+5+C=2F(5)+2$$

이므로 $G(5)-2F(5)=2$

10. [정답] ③ 65

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $a_2=1$ 이므로

$a_n=\frac{1}{r}\times r^{n-1}$ 이다.

$$S_k=\frac{\frac{1}{r}(r^n-1)}{r-1}=\frac{1}{r^2-r}r^n-\frac{1}{r^2-r}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}(-1)^kS_k&=\frac{1}{r^2-r}\sum_{k=1}^{6}(-1)^k(r^k-1)\\&=\frac{1}{r^2-r}\sum_{k=1}^{6}(-r)^k\\&=\frac{1}{r^2-r}\times\frac{(-r)^7-(-r)^1}{-r-1}\\&=\frac{1}{r^2-r}\times\frac{r^7-r}{r+1}\\&=\frac{r^6-1}{r^2-1}\\&=r^4+r^2+1=21\end{aligned}$$

이므로 $r^2=4$ 에서 $r=2$ 이다. 따라서 $S_k=\frac{1}{2}(2^n-1)$ 이므로

$S_2=\frac{3}{2}$, $S_7=\frac{127}{2}$ 에서 $S_2+S_7=65$ 이다.

11. [정답] ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

$v(t)=(3t-7)(t-1)$ 이므로 $t=1$ 에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀐다.
따라서 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 위치는 3이다.

점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면 점 P가 시각 $t=0$ 에서 원점을 출발하므로

$$x(t)=0+\int_0^t v(\tau)d\tau=t^3-5t^2+7t$$

이다. 따라서 $x(1)=3$ 이다. (참)

ㄷ. 시각 $t=0$ 에서 시각 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

시각 $t=0$ 에서 시각 $t=2$ 까지 점 P의 운동 방향이 바뀔 때는 시각 $t=1$ 일 때뿐이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2|v(t)|\,dt&=\int_0^1 v(t)\,dt+\int_1^2-v(t)\,dt\\&=x(1)-x(0)+x(1)-x(2)\\&=3-0+3-2=4\end{aligned}$$

이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. [정답] ① $2^{\frac{9}{4}}$

세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $(t,\ a^t)$, $(2t,\ a^{2t})$, $(2t,\ 0)$이다.

두 점 A, B의 x좌표 차이와 두 점 A, C의 x좌표 차이가 모두 t이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이기 위해서는
두 점 A, B의 y좌표 차이와 두 점 A, C의 y좌표 차이가 서로 같아야 한다.

따라서 $a^{2t}=2a^t$에서 $a^t=2$이다.

선분 BC를 밑변으로 놓았을 때 삼각형 ACB의 높이의 길이는 t이므로

$$\triangle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times t=\frac{1}{2}\times a^{2t}\times t=2t$$

이고, $\triangle\mathrm{ACB}=8$이므로 $t=4$이다.

따라서 $a^t=2$으로부터 $a=2^{\frac{1}{4}}$이다.

$\therefore\ a\times t=2^{\frac{1}{4}}\times 4=2^{\frac{9}{4}}$

13. [정답] ④ 8

함수 $f(x)=x^2+6x+12$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. 따라서 극한

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{\left(f(x)\right)^2-k(x+2)f(x)}$$

가 수렴하기 위한 필요충분조건은 극한

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{f(x)-k(x+2)}=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x^2+6x+12-k(x+2)}$$

이 수렴하는 것이다.

(i) $x^2+6x+12-k(x+2)$의 값이 0이 되는 실수 a가 존재하지 않을 때

$$x^2+6x+12-k(x+2)=x^2-(k-6)x-2k+12$$

이고, 판별식을 이용하면

$$D=(k-6)^2-4(2k-12)=k^2-20k+84<0$$
$$\Rightarrow\ (k-10)^2<52$$

이다. 이를 만족시키는 정수 k는 $7\le k\le 13$의 7개다.

(ii) $x^2+6x+12-k(x+2)$이 0이 되는 실수 x가 존재할 때

$x^2+6x+12-k(x+2)=0$의 실근이 0을 제외하고 존재한다면, 그 실근에서 극한 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2}{x^2+6x+12-k(x+2)}$이 발산한다. 따라서 $x^2+6x+12-k(x+2)=0$의 실근이 0뿐이어야 하고, 이는 $k=6$일 때 가능하다.

따라서 정수 k는 6부터 13까지 총 8개가 가능하다.

14. [정답] ③ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$

점 A의 좌표를 $(kx_0,\ \tan x_0)$라 하자.

그러면 $p=\tan x_0$이고 $0<x_0<\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$의 주기가 $k\pi$이므로
점 B의 좌표는 $(k(x_0+\pi),\ \tan x_0)$이다.

그런데 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{PA}}$이므로

$$k\pi=3\times kx_0$$

에서 $x_0=\frac{\pi}{3}$이다. 그러면 $p=\tan x_0=\sqrt{3}$이다.

점 C는 직선 $y=-p$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점인데, $\frac{k\pi}{2}<x<\frac{3k\pi}{2}$에서 곡선 $y=f(x)$가 점 $(k\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표가 $(k\pi,\ 0)$이다.

삼각형 OCB의 넓이는 두 삼각형 OMB와 OMC의 합이고, 두 삼각형 모두 선분 OM을 밑변으로 할 때 높이가 p이므로

$$\triangle\mathrm{OCB}=\overline{\mathrm{OM}}\times p=k\pi p$$

이다. $\sqrt{3}k\pi=\frac{5\pi}{3}$이므로 $k=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$이다.

$\therefore\ k+p=\sqrt{3}+\frac{5\sqrt{3}}{9}=\frac{14}{9}\sqrt{3}$

15. [정답] ⑤ 40

$g(x)=\int_0^x (|f(t)|-|t|)\,dt$ 이므로 적분과 미분의 관계에 의해

$g'(x)=|f(x)|-|x|$ 이다.

방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로 두 그래프 $y=|f(x)|$와 $y=|x|$가 만나는 점의 개수가 4이다.
그런데 $f(0)=0$이므로 $x=0$은 방정식 $g'(x)=0$의 한 실근이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$와 $x=6$에서 극값을 가지므로 $g'(2)=0$, $g'(6)=0$임을 물론, $x=2$와 $x=6$에서
함수 $g'(x)=|f(x)|-|x|$의 부호가 바뀌어야 한다.
따라서 $|f(2)|=2$, $|f(6)|=6$이다.

(ⅰ) $f(6)=-6$인 경우

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(k)=k$인 실수 $k(k>6)$이 존재한다.

$g'(x)=|f(x)|-|x|$의 부호가 $x=6$에서 바뀌어야 하므로 $x=6$의 왼쪽 근방에서 $f(x)<-x$이고, $|f(x)|=|x|$의 실근이 0, 2, 6, k뿐이므로 $f(2)=-2$가 되어야 한다. 따라서

$$f(x)=px(x-2)(x-6)-x$$

라 놓을 수 있다. $|f(x)|=|x|$의 실근이 0, 2, 6, k뿐이기 위해서는 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 $x=0$에서 접해야 한다.
그런데 이 경우 $0<x<2$에서 $|f(x)|-|x|<0$이므로 $g(2)<0$이어서 $f(6)\times g(2)<0$과 모순이다.

(ⅱ) $f(6)=6$인 경우

$f(6)\times g(2)<0$이 되기 위해서는 $g(2)<0$이어야 하고,
이를 위해서 $0<x<2$에서 $|f(x)|-|x|<0$이어야 한다.

만약 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-x$에 접한다면 그 접점의 x좌표는 2가 되어야 하는데, 이는 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 갖는다는 조건에 모순이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-x$와 서로 다른 두 점 $(2,\,-2)$, $(k,\,-k)$에서 만난다. 그러면 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 $x=0$에서 접해야 한다.

$$f(x)=px^2(x-6)+x$$

라 놓으면 $f(2)=2-16p=-2$에서 $p=\frac{1}{4}$이다.

$f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-6)+x$이므로 $f(8)=\frac{1}{4}\times 8^2\times(8-6)+8=40$

이다.

16. [정답] 8

$a_1=1$이므로 $a_2=1\times a_1+2=3$이다.

$a_2=3$이므로 $a_3=2\times a_2+2=8$이다.

17. [정답] 17

$f'(x)=3x^2+2x+1$이므로 $f(x)=x^3+x^2+x+C$이고,
$f(1)=6$이므로 $C=3$이다.

따라서 $f(2)=8+4+2+3=17$

18. [정답] 30

$a_3=6$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_5=6+2d$,
$a_4=6+d$이다. $2a_5-a_4=6+3d=15$이므로 $d=3$이다.

$\therefore\ a_{11}=a_3+8d=6+24=30$

19. [정답] 10

$f(x)=2x^3-3ax^2+5a$의 도함수는
$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$이다.
함수 $f(x)$각 극값을 가지므로 $a\neq 0$이다.

(ⅰ) $a>0$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$$f(a)=2a^3-3a^3+5a=5a-a^3=a$$

에서 $a=2$이다. 따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=5a=10$이다.

(ⅱ) $a<0$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$$f(0)=5a=a$$

에서 $a=0$이다. 이는 $a<0$에 모순이다.

따라서 구하는 값은 10이다.

수학 영역

20. [정답] 12

$\angle \mathrm{BPC}=\theta$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}:\overline{\mathrm{BC}}=7:5:\sqrt{14}$ 이므로 삼까형 BPC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{7^2+5^2-14}{2\times 7\times 5}=\frac{60}{70}=\frac{6}{7}$$

이다.

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=7:5$ 에서 $\overline{\mathrm{PB}}=7k$, $\overline{\mathrm{PC}}=5k$,
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:3$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=l$, $\overline{\mathrm{CD}}=3l$ 이라 하자.

원의 성질에 의하여
삼각형 BPC와 삼각형 DPA가 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{PA}}$ 에서

$$7k:5k=(5k+3l):(7k+l)$$
$$\Rightarrow\ 25k+15l=49k+7l$$

이므로 $l=3k$ 이다. (가): 3

삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비가
$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{DP}}=7k:14k=1:2$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{13}$ 이다.

(나): 2

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 할 때, 삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{13}}{7},\quad \overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{13}$$
$$\Rightarrow\ 2R=\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=14$$

$R=7$ 이다. (다): 7

$\therefore\ p=3,\ q=2,\ r=7,\ p+q+r=12$

21. [정답] 296

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하자.

$$\frac{f(2x)-f(0)}{2x}=4x^2+2ax+b$$

이므로 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$x^4-4x^2-2ax-b\geq 0\ \Rightarrow\ 2ax+b\leq x^4-4x^2$$

이다. 따라서 직선 $y=2ax+b$ 가 곡선 $y=x^4-4x^2$ 아래에 있어야 한다. $y'=4x^3-8x$ 이므로 $2a=4t^3-8t$ 라 하면 곡선 $y=x^4-4x^2$ 위의 점 $(t,\,t^4-4t^2)\,(|t|\geq\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식이

$$y=(4t^3-8t)(x-t)+t^4-4t^2$$
$$=(4t^3-8t)x-3t^4+4t^2$$

이므로 $b\leq -3t^4+4t^2$ 이다. …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이므로

$$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2=\frac{5}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}-2$$

이고, 따라서 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{5}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}-2\leq 4x^2+2ax+b$$
$$\Rightarrow\ \frac{3}{2}x^2+ax+\frac{b}{2}+2\geq 0$$

이다. 따라서

$$D=a^2-4\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{b}{2}+2\right)=a^2-3b-12\leq 0$$

이다. $2a=4t^3-8t$ 를 대입하면

$$3b+12\geq a^2=4t^6-16t^4+16t^2$$
$$\Rightarrow\ b\geq\frac{4}{3}t^6-\frac{16}{3}t^4+\frac{16}{3}t^2-4$$

이다. 이를 ㉠과 연립하면

$$\frac{4}{3}t^6-\frac{16}{3}t^4+\frac{16}{3}t^2-4\leq b\leq -3t^4+4t^2$$

이다. 그런데

$$g(t)=\frac{4}{3}t^6-\frac{16}{3}t^4+\frac{16}{3}t^2-4-\left(-3t^4+4t^2\right)$$
$$=\frac{4}{3}t^6-\frac{7}{3}t^4+\frac{4}{3}t^2-4$$
$$=\frac{1}{3}(t^2-2)(4t^4+t^2+6)$$

이고 $|t|\geq\sqrt{2}$ 이므로 부등식

$$\frac{4}{3}t^6-\frac{16}{3}t^4+\frac{16}{3}t^2-4\leq b\leq -3t^4+4t^2$$

을 만족시키는 경우는 $t=\pm\sqrt{2}$ 인 경우뿐이다.

따라서 $b=-4$ 이고, 이때 $2a=4t^3-8t=0$ 에서 $a=0$ 이다.

$\therefore\ f'(10)=300+20a+b=296$

22. [정답] 73

점 A를 $(a, \log_2 a)$, 점 B를 $(b, \log_2 b)$라 할 때,
직선 AP는 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 직선 AP의 y절편은 $a+\log_2 a$이고,
직선 BQ는 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 직선 BQ의 y절편은 $b+\log_2 b$이다. 따라서

$$a+\log_2 a-(b+\log_2 b)=\frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow\ (a-b)+(\log_2 a-\log_2 b)=\frac{13}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{6}{7}$이므로

$$\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=\frac{6}{7}$$

이다. ㉠에 이를 대입하면

$$a-b=\frac{7}{2},\quad \log_2 a-\log_2 b=3$$

이다. $b=a-\frac{7}{2}$이므로 이를 $\log_2 a-\log_2 b=\frac{7}{2}$에 대입하면

$$\log_2\frac{a}{a-\frac{7}{2}}=3\ \Rightarrow\ a=8\left(a-\frac{7}{2}\right)$$

에서 $a=4$, $b=\frac{1}{2}$이다.

따라서 네 점 A, P, B, Q의 좌표는 각각

$$(4,2),\quad (3,3),\quad \left(\frac{1}{2},-1\right),\quad \left(-1,\frac{1}{2}\right)$$

이다. 선분 BQ의 중점을 M이라 하면 사각형 APQB는 선분 AP와 BQ를 각각 밑면으로 하고 높이가 선분 PM인 사다리꼴이므로
그 넓이는

$$\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}})\times\overline{\mathrm{PM}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\times\frac{13}{4}\sqrt{2}$$

$$=\frac{65}{8}$$

이다.

$\therefore\ p=8,\ q=65,\ p+q=73$

[확률과 통계 해설]

총평

다소 까다로웠습니다. 3점은 무난하지만 27번처럼 시간을 잡아먹을 수 있는 문제가 있었습니다.

28번은 전형적인 문제였으나 난이도가 높았습니다. 조건이 다소 많아 조심해서 경우의 수를 세지 않으면 헤매기 쉽습니다.

29, 30번은 문제에서 제시한 확률을 구해야 하는 상황이 낯설었지만, 막상 풀어보면 그렇게 어렵지는 않았습니다. 낯선 조건으로 어렵게 내면 거의 모든 학생이 손도 못 대는 대참사가 발생할 수 있어서 쉽게 출제하지 않았나 싶습니다.

요약하면, 전형적인 유형은 어렵게, 신유형은 쉽게.

예상 1등급 구분 점수는 84~88점, 2등급 구분 점수는 76~80점입니다.

23. [정답] ④ 81

$3^4 = 81$

24. [정답] ③ $\frac{5}{12}$

$\mathrm{P}(A^C) = \mathrm{P}(A^C \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B^C)$ 이다.

$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$ 에서

$$\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = \mathrm{P}((A \cup B)^C) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{6}$$

이므로 $\mathrm{P}(A^C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ 이다.

25. [정답] ⑤ $\frac{9}{28}$

8명의 학생 중에서 5명의 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$

1학년 학생이 1명이므로 2학년 학생과 3학년 학생이 각각 2명 뽑힌다. 이 경우의 수는 $1 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 1 \times 3 \times 6 = 18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{56} = \frac{9}{28}$

26. [정답] ② 0.49

표본평균의 표준편차는 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{128}} = 0.25$ 이다.

따라서 $c = 1.96 \times 0.25 = 0.49$ 이다.

27. [정답] ④ $\frac{7}{16}$

$\mathrm{P}(X=0)$은 두 상자의 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 서로 같은 경우의 확률이므로

$$\mathrm{P}(X=0) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

이다.

$\mathrm{P}(X=2)$는 두 상자의 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 $(1, 3)$ 또는 $(3, 1)$인 경우의 확률이므로

$$\mathrm{P}(X=2) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16}$$

이다.

$\mathrm{P}(X=1)$은 나머지 경우의 확률이므로

$$\mathrm{P}(X=1) = 1 - \frac{6}{16} - \frac{2}{16} = \frac{8}{16}$$

이다.

따라서

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{6}{16} + 1 \times \frac{8}{16} + 2 \times \frac{2}{16} = \frac{3}{4},$$

$$\mathrm{E}(X^2) = 0 \times \frac{6}{16} + 1 \times \frac{8}{16} + 4 \times \frac{2}{16} = 1$$

이므로

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \frac{7}{16}$$

이다.

28. [정답] ② 746

빨간색 카드와 파란색 카드를 세 명에게 나누어 주는 경우의 수는 각각 ${}_3\mathrm{H}_1 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$,
노란색 카드와 보라색 카드를 세 명에게 나누어 주는 경우의 수는 각각 ${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 이므로
네 종류의 카드를 그냥 나누어 주는 경우의 수는 900 이다.

이제 (가)를 만족시키는 경우의 수를 구해 보자.

A가 받는 카드가 0장인 경우의 수는
$({}_2\mathrm{H}_1)^2 \times ({}_2\mathrm{H}_3)^2 = 4 \times 16 = 64$ 이고,
마찬가지로 B가 받는 카드가 0장인 경우의 수는 64이다.

A와 B가 받는 카드가 모두 0장인 경우의 수는 1이므로

(가)를 만족시키는 경우의 수는
$900 - (64 + 64 - 1) = 900 - 127 = 773$ 이다.

(가)를 만족시키지만 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수를 구하자.
곧, A가 4종류의 카드를 갖고, B는 한 장 이상의 카드를 갖는 경우의 수를 구하자.

A에게 빨간색 카드와 파란색 카드, 노란색 카드, 보라색 카드를 모두 한 장씩 먼저 주고, 남은 노란색 카드 2장과 보라색 카드 2장을 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다.

노란색 카드 2장과 보라색 카드 2장을 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 $({}_3\mathrm{H}_2)^2 = 36$ 이다.

그 중에서 B가 한 장도 못 받는 경우의 수는 $({}_2\mathrm{H}_2)^2 = 9$ 이다.

따라서 (가)를 만족시키지만 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는
$36 - 9 = 27$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $773 - 27 = 746$ 이다.

29. [정답] 23

교집합의 원소의 개수가 1인 확률을 구하자.

교집합이 $\{2\}$ 라면 가능한 경우는 A 의 부분집합과 B 의 부분집합이 각각

$\{2\},\ \{2\}$
$\{2\},\ \{2, 3\}$
$\{2, 3\},\ \{2\}$
$\{2, 4\},\ \{2\}$
$\{2, 4\},\ \{2, 3\}$
$\{2, 3, 4\},\ \{2\}$

인 경우로 총 6가지이다. 마찬가지로 교집합이 $\{2\}$ 인 경우의 수도 6이다. 따라서 교집합의 원소의 개수가 1인 확률은 $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ 이다.

시행을 15360번 하여 기록한 수가 1인 횟수의 확률분포는
근사적으로 정규분포

$$\mathrm{N}\left(15360 \times \frac{3}{8},\ 15360 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}\right)$$
$$= \mathrm{N}(5760,\ 60^2)$$

을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{5880 - 5760}{60}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 2) = 0.023$$

이므로 $1000 \times k = 23$ 이다.

30. [정답] 80

학생 A가 카드를 내려놓을 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

B가 카드를 내려놓을 확률은 $\frac{n-1}{6}$ 이다.

두 학생 모두 카드를 내려놓을 확률은 $\frac{n-1}{12}$ 이다. 이때 더 큰 수가 적힌 카드를 내려놓은 학생은 A이므로 A가 귤을 얻는다.

A만 카드를 내려놓을 확률은 $\frac{7-n}{12}$ 이다. 이때는 B가 귤을 얻는다.

B만 카드를 내려놓을 확률은 $\frac{n-1}{12}$ 이다. 이때는 A가 귤을 얻는다.

따라서 $p = \frac{2n-2}{12}$ 이고 $q = \frac{7-n}{12}$ 이다. 두 확률이 같으므로

$n = 3$ 이고, 이때 $p = \frac{1}{3}$ 이다.

$$\therefore\ 24(n+p) = 24\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 80$$

[미적분 해설]

총평

매우 어려웠습니다. 문제 유형은 6월 모의평가와 유사했지만, 조건 해석이 더 까다로워졌습니다.

28번은 6월 모의평가 28번과 아이디어는 유사했다고 느껴집니다. 변곡점을 해석하는 문제였죠. 그런데 문제에서 나오는 두 가지 케이스 중에 하나로 추리는 과정이 6월 모의평가보다 훨씬 어려워졌고, 무엇보다 $\tan x = x$의 0이 아닌 실근이 식에 등장하여 일부 학생들은 멘붕에 빠졌을 겁니다.

29번도 6월 모의평가와 느낌은 비슷했던 것 같습니다. 가능한 케이스가 몇 가지 나오고 귀류법으로 가능한 한 가지를 찾는 것이었는데, 이번에는 소인수분해와 유리수의 성질에 대한 이해도 필요해서 체감 난이도는 더 높았을 것 같습니다.

30번은 이른바 '보이면 쉬운 문제'입니다. 적분 퍼즐 문제로, 많은 경험치가 중요한 문제라고 볼 수 있겠습니다. 이 문제를 틀렸다면 2017학년도 9월 모의평가 21번과 2025학년도 수능 28번을 복습해 보기 바랍니다.

예상 1등급 구분 점수는 82~85점, 2등급 구분 점수는 72~75점입니다.

23. [정답] ① e

함수 $f(x)=e^x$에 대하여 $f'(1)$의 값과 같다.

따라서 $f'(x)=e^x$이므로 $f'(1)=e$이다.

24. [정답] ④ $e-1$

$\frac{d}{dx}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$로 치환하면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$$
$$=\int_0^1 e^t\,dt$$
$$=\Big[e^t\Big]_0^1=e-1$$

이다.

25. [정답] ② 8

$$\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$$
$$=\frac{an^b\left(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\right)}{3n}$$
$$=\frac{an^bn^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3n}$$
$$=\frac{an^{b+1}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^{b+1}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2an^{b+1}}{3}=6$$

이므로 $b=-1$, $a=9$이다.

$\therefore\ a+b=8$

26. [정답] ① $4-3\ln 3$

곡선 $y=\frac{3}{x-1}$이 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(4,\,1)$, $\mathrm{B}(2,\,3)$이다.

직선 AB의 방정식은 $y=-x+5$이므로 곡선 $y=\frac{3}{x-1}$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_2^4\left(-x+5-\frac{3}{x-1}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x-3\ln(x-1)\right]_2^4$$
$$=(12-3\ln 3)-(8-3\ln 1)=4-3\ln 3$$

이다.

27. [정답] ① $\frac{5}{4}$

$h(x)=f(x^3+x)$라 하자.

함수 $h(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $h(1)=f(2)=1$이므로 $g(1)=1$이다.

한편, $h'(x)=(3x^2+1)f'(x^3+x)$이므로 $h'(1)=4f'(2)$인데, $g'(1)=\frac{1}{4f'(2)}$이므로

$$f'(2)=8g'(1)-1$$
$$\Rightarrow\ f'(2)=\frac{2}{f'(2)}-1$$

에서 $f'(2)=1$이다. ($\because\ f'(x)>0$)

따라서 $g'(1)=\frac{1}{4f'(2)}=\frac{1}{4}$이고 $g(1)+g'(1)=\frac{5}{4}$이다.

28. [정답] ② -6

$h(x)=x-\tan x$라 하자.

함수 $y=h(x)$의 그래프는 $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, $\cdots$ 에서 변곡점으로 가지고, 변곡점에서의 미분계수가 0이다. …… ㉠

한편, $f(x)=h(g(x))$이므로 $g(x)$는 $h(x)$가 정의되지 않는 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ 등의 값을 가지지 않는다.

그런데 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{3\pi}{2}$ 이므로

$\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{3\pi}{2}$ 이거나 $\frac{3\pi}{2}<g(x)<\frac{5\pi}{2}$ 이다.

(i) $\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{3\pi}{2}$ 인 경우

$f(x)=h(g(x))$가 삼차함수인데

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{3\pi}{2}$ 에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 이므로

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 에서 $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 $g(k)=\pi$이고 $x=k$에서 함수 $g(x)$가 증가하는 실수 k가 존재한다. 그러면 ㉠에 의해 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극값을 가지지 않지만 미분계수는 0이 된다. 곧, $x=k$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. 한편, $\sin g(\pi)=0$이므로 $k=\pi$임을 알 수 있다.

$f(0)=0$이므로

$$f(x)=\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^3+\pi$$

이다. $f(x)=h(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고 $h(x)$는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 에서 증가하는 함수이므로 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.

그런데 $f(0)=0$이므로 $h(\alpha)=0$이 되는 실수 $\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi\right)$에 대하여 $g(0)=\alpha$인데, $g(\pi)=\pi$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다. 따라서 모순이 발생한다.

(ii) $\frac{3\pi}{2}<g(x)<\frac{5\pi}{2}$ 인 경우

$f(x)=h(g(x))$가 삼차함수인데

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{3\pi}{2}$ 에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ 이므로

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ 에서 $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\frac{5\pi}{2}$ 이다.

따라서 $g(k)=2\pi$이고 $x=k$에서 함수 $g(x)$가 감소하는 실수 k가 존재한다. 그러면 ㉠에 의해 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극값을 가지지 않지만 미분계수는 0이 된다. 곧, $x=k$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. 한편, $\sin g(\pi)=0$이므로 $k=\pi$임을 알 수 있다.

$f(0)=0$, $f(\pi)=2\pi$이므로

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+2\pi$$

이다. $f(x)=h(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이고 $h(x)$는 $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$ 에서 증가하는 함수이므로 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다.

$f(0)=0$이므로 $h(\alpha)=0$이 되는 실수 $\alpha\left(2\pi<\alpha<\frac{5}{2}\pi\right)$에 대하여 $g(0)=\alpha$인데, $g(\pi)=2\pi$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다.

$$\frac{2}{\pi^2}(x-\pi)^3+2\pi=g(x)-\tan g(x)$$
$$\Rightarrow\ \frac{6}{\pi^2}(x-\pi)^2=g'(x)\left(1-\frac{1}{\cos^2 g(x)}\right)$$

이고 $x=0$을 대입하면

$$g(0)-\tan g(0)=0\ \Rightarrow\ g(0)=\alpha,$$
$$6=g'(0)\left(1-\frac{1}{\cos^2 g(0)}\right)$$
$$=g'(0)\left(1-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$$
$$=-\tan^2\alpha\times g'(0)$$

이다. 따라서

$$g'(0)\times(g(0))^2=-\frac{6}{\tan^2\alpha}\times\alpha^2$$

이고, 그런데 $\alpha=\tan\alpha$이므로 $g'(0)\times(g(0))^2=-6$이다.

29. [정답] 91

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 유리수이고 수열 $\{a_n\}$의 정수인 항 3개의 값의 곱이 $216=2^3\times3^3$이다. 이 세 항의 절댓값을

$$2^{a_1}\times3^{b_1},\ 2^{a_2}\times3^{b_2},\ 2^{a_3}\times3^{b_3}$$

라 하자. 그러면 a_i와 b_i는 0 이상의 정수이고 $a_1+a_2+a_3=3$, $b_1+b_2+b_3=3$이다. 또한 a_i들은 모두 같거나 모두 다르며, b_i들도 모두 같거나 모두 다르다. 따라서

$$(36,\ 6,\ 1),\quad (12,\ 6,\ 3),\quad (18,\ 6,\ 2),\quad (9,\ 6,\ 4)$$

가 가능하다. 위의 어느 경우에 대해서도 세 항이 서로 이웃하지 않으면 공비가 무리수이므로 세 항은 모두 이웃한다.
또한, 앞의 세 순서쌍에 대해서는 $|a_1|$이 가장 큰 값이 아니라면 수열 $\{a_n\}$의 정수가 아닌 항의 개수가 3 이상이므로 $|a_1|$이 가장 큰 값이다.

앞의 세 순서쌍에서 $a_1+a_2<10$을 만족시키려면 $a_1=12$, $a_2=-6$, $a_3=3$인 경우만 가능한데, 이 경우 세 정수의 항의 곱이 -216이므로 모순이다.

따라서 세 정수의 절댓값의 순서쌍은 $(9,\ 6,\ 4)$이다.
$a_1+a_2<10$이고 세 정수의 항이 곱이 216이려면

$$a_1=\frac{27}{2},\quad a_2=-9,\quad a_3=6,\quad a_4=-4$$

이어야 한다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합은

$$\frac{\frac{27}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{27}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{81}{10}$$

이다.

$\therefore\ p=10,\ q=81,\ p+q=91$

30. [정답] 31

$f(x)=\ln\left(\dfrac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$이므로

$$e^{f(x)}=\frac{g(x)}{1+xf'(x)}$$
$$\Rightarrow\ e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}=g(x)$$
$$\Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left(xe^{f(x)}\right)=g(x)$$

이다.

$$\begin{aligned}\int_1^2 g(x)\,dx&=\int_1^2\frac{d}{dx}\left(xe^{f(x)}\right)dx\\&=\left[xe^{f(x)}\right]_1^2\\&=2e^{f(2)}-e^{f(1)}=34\end{aligned}$$

이고, $f(1)=4\ln2$이므로 $e^{f(2)}=25$이다.

함수 $g(x)$의 한 부정적분 $G(x)$에 대하여 $xe^{f(x)}=G(x)$라면

$$G(1)=e^{f(1)}=16,\quad G(2)=2e^{f(2)}=50$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx&=\int_1^2 G(x)\,dx\\&=\Big[x\,G(x)\Big]_1^2-\int_1^2 xg(x)\,dx\\&=2G(2)-G(1)-\int_1^2 xg(x)\,dx\\&=2\times50-16-53\\&=31\end{aligned}$$

이다.

[기하 해설]

총평

다소 어려웠습니다. 2022학년도 수능 기하가 어려웠다고 평가받는데, 거의 그 정도 난이도 아니었나 싶습니다.

27번이 의외의 복병이었을 것입니다. 점 P의 좌표를 구하는 과정에서 계산이 꼬였다면 이 해설을 보고 아이디어를 얻어보세요.

28번은 아주 어렵지는 않았지만 준킬러~킬러 밥값은 하는 문제입니다. 수능특강 연계 문제로 보이고, $\sin\alpha = 3\sin\beta$의 기하학적 의미를 이해할 수 있어야 했습니다.

29번도 아주 어렵지는 않았지만 신유형이라서 풀이 방향을 못 잡은 학생들이 많았을 것 같습니다. 27번도 그렇고, 이차곡선에서 이차곡선의 정의만으로 끝나지 않고 구체적인 점의 좌표를 구하는 되는 문제가 출제되었습니다. 수능에서도 이럴 수 있으니 대비가 필요합니다.

30번은 어려웠습니다. 올해 6월 30번도 어려웠는데 그것보다 더 어려웠던 것 같습니다. 보통 사각형은 좌표, 삼각형은 순수 기하라는 고정관념이 있는데, 이 문제는 삼각형이었음에도 좌표로 계산하면 쉬웠던 것 같아서 좌표를 통한 접근과 순수 기하학적인 접근 모두 자유자재로 할 수 있어야겠습니다.

예상 1등급 구분 점수는 82~84점, 2등급 구분 점수는 74~76점입니다.

23. [정답] ② 2

초점의 좌표가 $(p, 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$이므로 $p = 2$이다.

24. [정답] ④ 4

직선 $\frac{x-1}{2} = y-4$의 방향벡터는 $(2, 1)$이고,

직선 $\frac{x+2}{8} = \frac{y+5}{a}$의 방향벡터는 $(8, a)$이다.

두 방향벡터가 평행해야 하므로 $a = 4$이다.

25. [정답] ① 10

점 $\mathrm{A}(4, 3, -9)$를 xy평면에 대하여 대칭이동하면 $\mathrm{B}(4, 3, 9)$이고,
점 A를 원점에 대하여 대칭이동하면 $\mathrm{C}(-4, -3, 9)$이므로
선분 BC의 길이는 $\sqrt{8^2+6^2} = 10$이다.

26. [정답] ① $\sqrt{21}$

점 A에서 직선 FH에 내린 수선의 발 I는
삼수선의 정리에 의해 점 A에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발 E에서 직선 FH에 내린 수선의 발이다.

점 E에서 직선 FH까지의 거리를 d라고 하면

$$\triangle \mathrm{EFH} = 25 = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{FH}} \times d$$

$$\Rightarrow\ d = \frac{50}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AI}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2 + \overline{\mathrm{EI}}^2} = \sqrt{21}$$

이다.

27. [정답] ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$c = \sqrt{9+16} = 5$이다. 삼각형 $\mathrm{PFF'}$의 둘레의 길이가 30이므로

$$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 30 - \overline{\mathrm{FF'}} = 20$$

이다. 쌍곡선의 주축의 길이가 8이므로 $\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{PF}} + 8$이어서 $\overline{\mathrm{PF}} = 6$, $\overline{\mathrm{PF'}} = 14$이다.

점 P의 좌표를 구하자. 점 P는 두 점 F, F′을 초점으로 하고 장축의 길이가 20인 타원 위의 점이기도 하므로

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1,\quad \frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$$

을 연립하면 $x = -3\sqrt{3}$, $y = 8$이다.

따라서 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-3\sqrt{3}}{9}x - \frac{8}{16}y = -1$$

이므로 그 기울기는 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

28. [정답] ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

점 C는 선분 OA를 $2:1$로 내분하는 점이다. 그리고 직선 BC와 xy평면이 서로 평행하므로 두 점 B, C의 z좌표는 서로 같다.

두 직선 OA, AB와 xy평면이 이루는 예각의 크기 α, β에 대하여 $\sin\alpha = 3\sin\beta$인데, 두 점 O와 A의 z좌표 차이를 $3k$라 하면, 두 점 B, C의 z좌표는 $2k$이므로 두 점 A, B의 z좌표 차이는 k이므로 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AB}}$이다.

점 A를 xy평면에 정사영한 점을 A$'$이라 하고, 점 B를 xy평면에 정사영한 점을 B$'$이라 하자.

$$\overline{\mathrm{OA'}} = \sqrt{36-9k^2},$$
$$\overline{\mathrm{OB'}} = \sqrt{36-4k^2},$$
$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{36-k^2}$$

인데, 삼각형 OA$'$B$'$이 직각삼각형이므로
$36-k^2 = (36-9k^2)+(36-4k^2) = 72-13k^2$에서 $k=\sqrt{3}$이다.

따라서 삼각형 OA$'$B$'$의 세 변의 길이는

$$\overline{\mathrm{OA'}} = 3,\ \overline{\mathrm{OB'}} = 2\sqrt{6},\ \overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{33}$$

이므로 넓이는 $3\sqrt{6}$이다.

삼각형 OAB의 세 변의 길이는

$$\overline{\mathrm{OA}} = 6,\ \overline{\mathrm{OB}} = 6,\ \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OA}} = 6$$

이므로 넓이는 $9\sqrt{3}$이다. 따라서 $\cos\theta = \frac{3\sqrt{6}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

29. [정답] 396

타원 C_1의 장축의 길이를 $2a$, 타원 C_2의 장축의 길이를 $2b$라 하자.

$$\overline{\mathrm{F'R}} = 2a - \overline{\mathrm{FR}},\quad \overline{\mathrm{PR}} = 2b - \overline{\mathrm{FR}}$$

이므로 $\overline{\mathrm{F'R}} - \overline{\mathrm{PR}} = 2a-2b = 7\sqrt{2}$이다.

한편, 두 삼각형 PFF$'$과 QOF$'$은 $2:1$ 닮음이고 $\overline{\mathrm{PQ}} = b$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}} = 2b$이다. 따라서 점 P의 x좌표는 $2\sqrt{b^2-36}$이다.

$$2a = \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 2\sqrt{b^2-36} + 2b = 2a$$

이고 $2a-2b = 7\sqrt{2}$를 대입하면

$$2\sqrt{b^2-36} = 7\sqrt{2}$$

에서 $b = \frac{11}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 $a = 9\sqrt{2}$이므로
$2a\times 2b = 18\sqrt{2}\times 11\sqrt{2} = 396$이다.

30. [정답] 69

삼각형 ABC를 좌표평면 위에

$$\mathrm{A}(0,\ 16),\quad \mathrm{B}(-8,\ 0),\quad \mathrm{C}(8,\ 0)$$

으로 옮기자.

$(\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$에서 선분 BQ의 중점 M에 대하여 선분 PM과 선분 BC가 수직임을 알 수 있다.

마찬가지로 $(\overrightarrow{\mathrm{RC}} + \overrightarrow{\mathrm{RQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$에서 선분 CQ의 중점 N에 대하여 선분 RN과 선분 BC가 수직임을 알 수 있다.

따라서 점 Q의 좌표를 $(2t,\ 0)\ (-4<t<4)$이라 하면

$$\mathrm{P}(t-4,\ 2t+8),\quad \mathrm{R}(t+4,\ 8-2t)$$

이다.

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} = |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2$로 t의 값을 확정하자.

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (-t-4,\ 2t+8),\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}} = (4-t,\ 8-2t)$$

이므로

$$t^2-16+64-4t^2 = t^2+8t+16+4t^2+32t+64$$
$$\Rightarrow -16-4t^2 = 8t+16+4t^2+32t$$
$$\Rightarrow 8t^2+40t+32 = 0$$
$$\Rightarrow t^2+5t+4 = 0$$

에서 $t=-1$이다.

따라서

$$\mathrm{P}(-5,\ 6),\quad \mathrm{Q}(-2,\ 0),\quad \mathrm{R}(3,\ 10)$$

이다.

선분 PR을 $1:3$으로 내분하는 점을 M이라 하면 M$(-3,\ 7)$이고, $3\overrightarrow{\mathrm{XP}} + \overrightarrow{\mathrm{XR}} = 4\overrightarrow{\mathrm{XM}}$이다. 그리고 $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}| = 4\sqrt{5}$이다.
따라서 $|3\overrightarrow{\mathrm{XP}} + \overrightarrow{\mathrm{XR}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$는 점 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위의 점이다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{BM}}| = \sqrt{74}$$

이므로 $M = \sqrt{74} + \sqrt{5}$, $m = \sqrt{74} - \sqrt{5}$이어서 $M\times m = 69$이다.