

2026 9월 평가원

필기자료

손우혁 T

13. 함수 $f(x) = x^2 + 6x + 12$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 개수는? [4점]

모든 실수 a 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{(f(x))^2 - k(x+2)f(x)}$ 의 값이 존재한다.

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{f(x) \times \{f(x) - k(x+2)\}} \text{의 값이}$$

모든 a 에 대하여 존재하려면 $\frac{0}{0} \rightarrow 0$ 되는

분명이 존재하지 않거나 $k=0$ 에서만 가능 (두번까지)

$$f(x) = (x+3)^2 + 3 \text{에서 } f(x) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$y = f(x) \text{와 } y = k(x+2) \text{가 만나지 않거나}$$

$k=0$ 에서만 만나면 (접하면) 된다.

$$x^2 + (6-k)x + 12 - 2k = 0 \text{에서}$$

$$D = (6-k)^2 - 48 + 8k = k^2 - 4k - 12 = (k-6)(k+2) \text{ 이므로}$$

$$-1 \leq k \leq 5 \text{일때 만나지 않고}$$

$k=6$ 일때 $k=0$ 을 뺀것으로 가지며 ($k=0$ 에서 접한다.)

k 의 개수는 8개

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|) dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
 (나) 함수 $g(x)$ 는 $x=2, x=6$ 에서 극값을 갖는다.

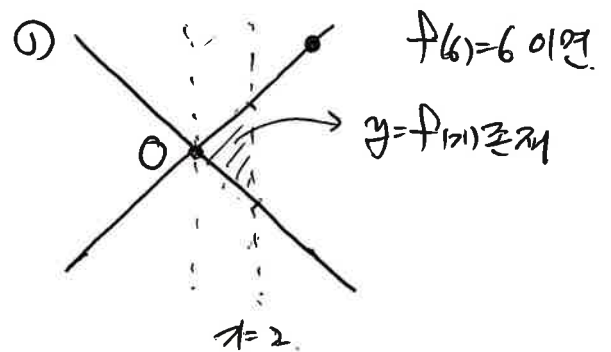
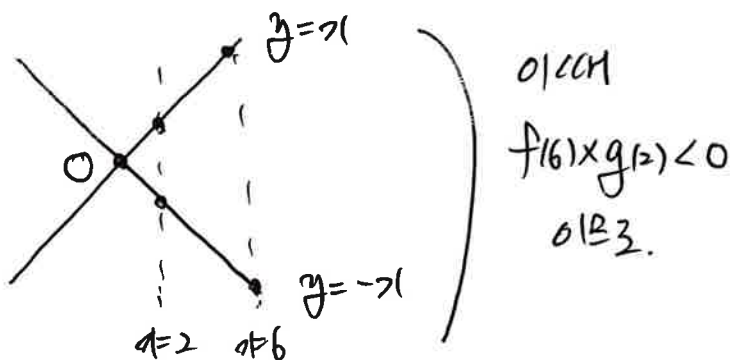
$f(6) \times g(2) < 0$ 일 때, $f(8)$ 의 값은? [4점]

- ① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

$g'(x) = |f(x)| - |x| = 0$ 은 $f(0) = 0$, (나)에서

$x=0, 2, 6$ 을 포함한 4개의 근을 가진다.

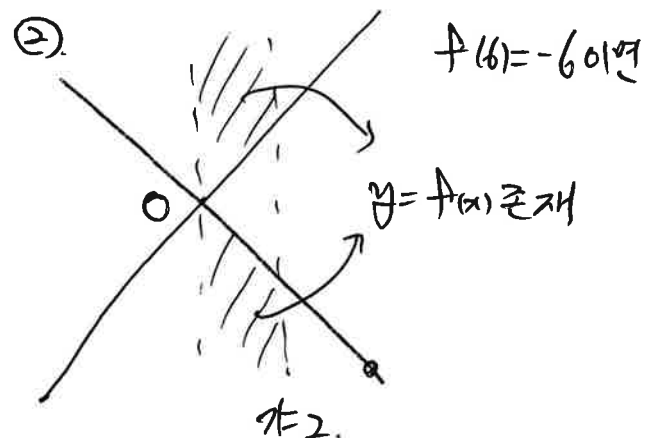
$|f(x)| = |x|$ 는 $y=f(x)$ 와 $y=\pm x$ 의 교점을 조사하면 된다.



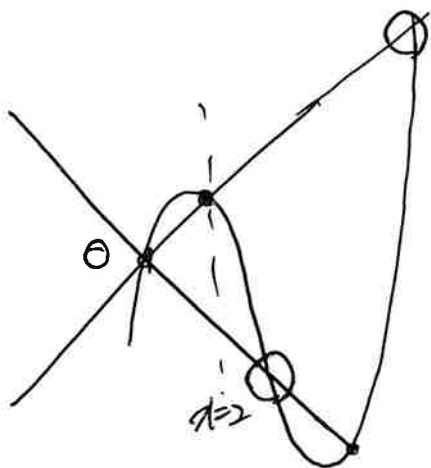
이때 $f(x)$ 는 $(f(2)=\pm 2)$ 가능하지만 $f(6)=\pm 6$.

$g(x)$ 가 $x=2, 6$ 에서 극값을 가지려면

$f'(2) \neq \pm 1, f'(6) \neq \pm 1$ 정할 수 없다.

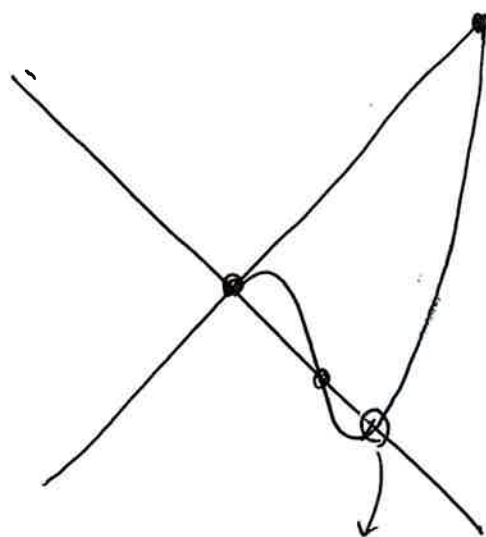


②의 경우 $f(2)=2$ 이며



$f'(x)=0$ 이 5개의 근 (x)

①의 경우 $f(2)=-2$ 이며



무조건 추가근이므로
또다른 근 존재 X
 $\Rightarrow f'(0)=1$

이상에서

$$f(0)=0, f(2)=-2, f(6)=6, f'(0)=1$$

$$f(x) = ax^2(x+6) + x, \quad a = \frac{1}{4}$$

$$f(8) = 16 \times 2 + 8 = 40$$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$ 의 값을 구하시오. [4점]

0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2} + x^2 - 2 \leq \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \leq x^4$$

$$O(L)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f'(x)}{2} + x^2 - 2 \right| = \frac{1}{2} f'(0) - 2 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x} = f'(0)$$

↓
사실 결과적으로
불라도 되는 정보

과정 변화의 해석으로는 더 이상 전적 접근이 없다.

바르게 계신 전환

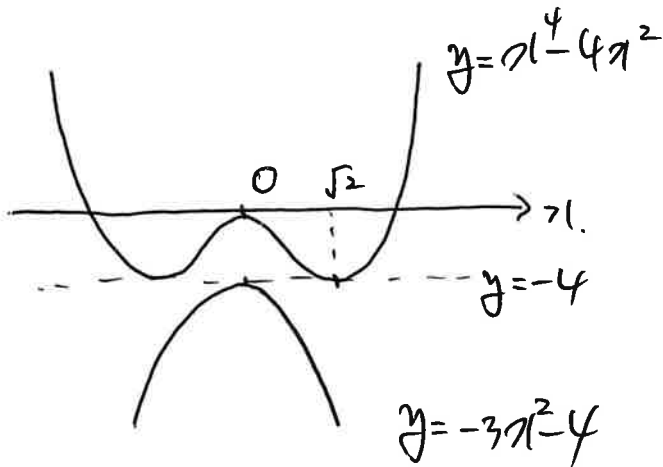
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ 가 주어졌을 때 } (-4 \leq b \leq 0)$$

$$\frac{5}{2}x^2 + ax + \frac{b}{2} - 2 \leq \frac{8x^3 + 4ax^2 + 2bx + c - c}{2x} \leq x^4$$

||
 $4x^2 + 2ax + b$

↙ ↘
 보려서 정리 ② 보려서 정리 ①

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x^4 - 4x^2 - 2ax - b &\geq 0 \\ \textcircled{2} \quad 3x^2 + 2ax + b + 4 &\geq 0 \end{aligned} \quad) \Rightarrow -3x^2 - 4 \leq 2ax + b \leq x^4 - 4x^2.$$



$y = 2ax + b$ 가 두 사이에 존재

$$b = -4, a = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$f'(10) = 296$$

22. 곡선 $y = \log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다.

점 A에서 직선 $y = x$ 에 내린 수선의 발을 P라 하고,

점 B를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때,

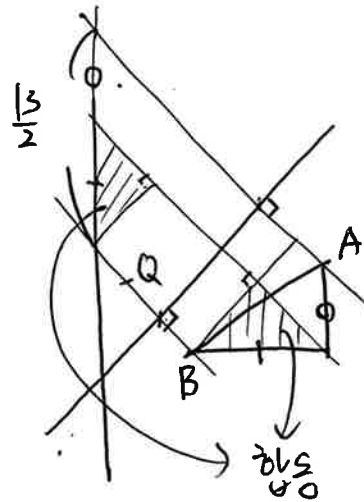
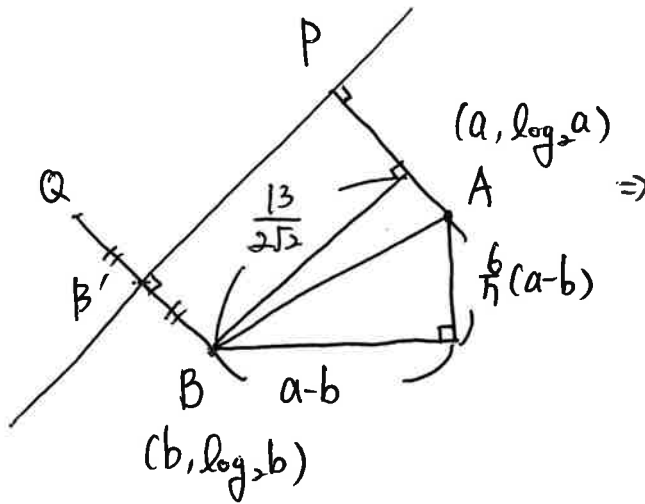
네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \text{ (직선 AP의 } y \text{ 성분)} - \text{(직선 BQ의 } y \text{ 성분)} = \frac{13}{2}$$

$$(나) \text{ 직선 AB의 기울기는 } \frac{6}{7} \text{ 이다.}$$

사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$$\begin{aligned} \frac{13}{2\sqrt{2}}(a-b) &= \frac{13}{2} \text{ 이므로 } a-b = \frac{7}{2} \\ \log_2 a - \log_2 b &= 3 \text{ 이므로 } a = 8b \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{13}{2\sqrt{2}}(a-b) &= \frac{13}{2} \\ \log_2 a - \log_2 b &= 3 \end{aligned}} \right\} a=4, b=\frac{1}{2}$$

$$B\left(\frac{1}{2}, -1\right) \quad A(4, 2)$$

$$\overline{BB'} = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad \overline{AP} = \sqrt{2}$$

$$\square APQB = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \times \frac{13}{2\sqrt{2}} = \frac{65}{8}$$

73

28. 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = g(x) - \tan g(x)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0) \times (g(0))^2$ 의 값은? [4점]

(가) $f(0) = 0, f''(\pi) = 0$
 (나) $\sin g(\pi) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$

- ① -12 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) - g'(x) \cdot \sec^2 g(x) \\ &= -g'(x) \cdot \tan^2 g(x) \end{aligned}$$

$$f'(0) = -g'(0) \cdot \tan^2 g(0)$$

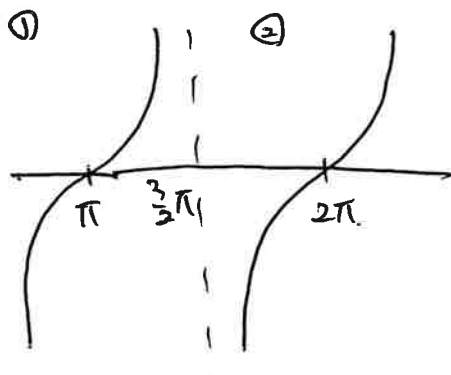
$$f(0) = g(0) - \tan g(0) = 0 \text{ 에서 } \tan g(0) = g(0)$$

$$g'(0) \cdot (g(0))^2 = (-f'(0))$$

(나) 에서 $\sin g(\pi) = 0, g(\pi) = n\pi, \tan g(\pi) = 0$
 $f(\pi) = g(\pi) = n\pi, f'(\pi) = 0 \rightarrow$ 정답 1개만 더 있으면 끝

* 이 문제의 핵심은 여기 *

$g(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k 는 정수) 가 될 수 없다. ($\because f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 뚫린)



$g(x)$ 는 ① 영역 또는 ② 영역에서만 치역이 존재해야 한다.

① 일 경우 $\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{3}{2}\pi$ 이며

$$g(\pi) = \pi \rightarrow f(\pi) = \pi$$

$$f(x) = a(x-\pi)^3 + b \text{ 이며 } b = \pi$$

$$f(0) = 0 \text{ 이므로 } -a\pi^3 + \pi = 0 \text{ 이며 } a = \frac{1}{\pi^2}$$

② 일 경우 $\frac{3}{2}\pi < g(x) < \frac{5}{2}\pi$ 이며

$$g(\pi) = 2\pi \rightarrow f(\pi) = 2\pi$$

$$f(x) = a(x-\pi)^3 + b \text{ 이며 } b = 2\pi$$

$$f(0) = 0 \rightarrow -a\pi^3 + 2\pi = 0 \rightarrow a = \frac{2}{\pi^2}$$

①, ② 모두 $f(x)$ 는 증가 함수 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underset{\downarrow \frac{3}{2}\pi}{g(x)} - \tan \underset{\downarrow \frac{3}{2}\pi}{g(x)} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \tan g(x) = -\infty \text{ 따라서 ② 경우가 맞다.}$$

$$\therefore g'(0) \times [g(0)]^2 = -f'(0) = -\left(\frac{6}{\pi^2} \times (-\pi)^2\right) = -6$$

29. 첫째항이 양수이고 공비가 유리수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고, 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 + a_2 < 10$

(나) 수열 $\{a_n\}$ 의 정수인 항의 개수는 3이고,

이 세 항의 곱은 216이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(나)에서 a_n 중 최초의 정수를 m 이라 하면 외면적으로

$m \times r^k = \text{정수인 } k \text{가 존재한다. } r = \frac{b}{a} \text{ (} a, b \text{ 정수, } |a| > |b|, a, b \neq 0 \text{)}$

$m \times \frac{b^k}{a^k} = \text{정수}$ 이면 m 이 a^k 의 배수이며 이 경우

$k \geq 2$ 일때도 $m \times \frac{b}{a}$ 가 항상 정수가 된다.

$\Rightarrow$ 한 번 정수가 등장하면 연속된 세 항이 정수가 된다.

처음부터 정수의 필요는 없다. (ex) $\frac{81}{2} \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} 27 \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} 18 \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} 12 \dots$

(나) 만족하는 연속된 세 항을 m, mr, mr^2 이라 하면

$$m^3 \times r^3 = 216 \rightarrow mr = 6 \text{ 이며 다시}$$

$\frac{6}{r}, 6, 6r$ 3 표현 할 수 있다.

세 항 모두 정수가 되는 $r = \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}$ 이며

각각의 경우 우선 무효를 무시하고 짝댓값만 나열해보면

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cancel{36} \leftarrow & 36 & 6 & 1 & \frac{1}{6} & \dots & \\
 \cancel{18} \leftarrow & 18 & 6 & 2 & \frac{2}{3} & \dots & \\
 \cancel{12} \leftarrow & 12 & 6 & 3 & \frac{3}{2} & \dots & \\
 \dots \frac{81}{4} \leftarrow \frac{21}{2} \leftarrow 9 & 6 & 4 & \frac{8}{3} & \dots & \Rightarrow 9 \text{가 첫째항일 필요} \times
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} 36 \\ 18 \\ 12 \end{array}} \right\} 36, 18, 12 \text{가 무조건 첫째항}$$

위의 3가지 경우는 $a_1 > 0$, $a_1 + a_2 < 10$, $a_1 \times a_2 \times a_3 = 216$

만족시키지 못한다. ($\because a_2 < 0$ 인 경우도 세번째만 만족 하며 세항곱 음수)

네 번째 경우에서

$$\begin{array}{cccccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\
 \frac{21}{2} & -9 & 6 & -4 & \frac{8}{3} & \dots
 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{곱 } 216}$

$$\left. \begin{array}{l}
 a_1 + a_2 = \frac{21}{2} - 9 < 10 \\
 a_1 > 0
 \end{array} \right\}$$

모든 조건 유망하게 만족 $\therefore a = \frac{21}{2}, r = -\frac{2}{3}$

$$\frac{\frac{21}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{81}{10}$$

$\therefore 91$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 와
 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 는
 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1) = 4\ln 2$ 이고

$$\int_1^2 g(x) dx = 34, \quad \int_1^2 xg(x) dx = 53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)} dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$e^{f(x)} \times (1 + x \cdot f'(x)) = g(x)$$

$$\rightarrow e^{f(x)} + x \cdot f'(x) \cdot e^{f(x)} = g(x)$$

$$\rightarrow \underbrace{(x \cdot e^{f(x)})'}_{G(x) \text{라 하자.}} = g(x)$$

$$\int_1^2 1 \times G(x) dx = [x \cdot G(x)]_1^2 - \int_1^2 x \cdot g(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= 2 \times G(2) - G(1) - 53 \\ &= 68 + 2G(1) - G(1) - 53 \\ &= 15 + G(1) = 15 + e^{f(1)} = 15 + 16 = \boxed{31} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 g(x) dx = G(2) - G(1) = 34$$