확률과 통계

문항 번호: 23

해설: 세 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 길이 4의 순서를 만들 때는 각 자리마다 서로 독립적으로 세 가지 중 하나를 고를 수 있습니다. 따라서 곱의 법칙을 적용하면 전체 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$

입니다. 제시된 보기에서 81은 네 번째 선택지이므로 정답은 ④번입니다.

문항 번호: 24

해설:
주어진 식들에서 $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ 이고, 또한 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 입니다.
먼저 $P(A^C \cap B) = \frac{1}{4}$ 이므로

$$P(B) = \frac{1}{4} + P(A \cap B).$$

이를 합집합 식에 대입하면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + \left(\frac{1}{4} + P(A \cap B)\right) - P(A \cap B) = P(A) + \frac{1}{4}.$$

주어진 $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ 이므로

$$P(A) + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

따라서

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

정답은 (3)번입니다.

문항 번호: 25

해설:
전체 경우의 수는 8명 중 5명을 선택하는 경우의 수로

$$\binom{8}{5} = 56$$

입니다.

선택된 2학년 학생 수와 3학년 학생 수가 같아야 하므로, 1학년에서 선택한 학생 수를 x_1, 2학년과 3학년에서 각각 선택한 학생 수를 x_2, x_3라 하면 조건은

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \qquad x_2 = x_3$$

입니다. 따라서 $x_1 + 2x_2 = 5$이고, x_1은 0 또는 1(1학년 학생이 1명뿐이므로)밖에 될 수 없습니다. 이 방정식을 만족하는 정수 해는 $x_2 = x_3 = 2$이고 $x_1 = 1$뿐입니다.

따라서 유리한 경우의 수는

$$\binom{1}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$$

이고, 확률은

$$\frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

입니다.

정답: (5) $\frac{9}{28}$

문항 번호: 26

해설:
모평균의 신뢰구간 반폭은 다음과 같은 공식을 사용합니다.
$c = z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$

문제에서 주어진 값은 $z_{\alpha/2} = 1.96$, $\sigma = 2\sqrt{2}$, $n = 128$입니다. 따라서 분모의 제곱근을 계산하면 $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{2}{8} = 0.25.$$

이에 따라

$$c = 1.96 \times 0.25 = 0.49.$$

따라서 정답은 ② 0.49 입니다.

문항 번호: 27

해설:
각 상자에서 나올 수 있는 값의 분포는

$$P(1) = \tfrac{1}{4}, \quad P(2) = \tfrac{1}{2}, \quad P(3) = \tfrac{1}{4}$$

이고 두 상자는 독립이므로 순서 있는 16개의 경우에 대해 곱셈법칙을 적용한다. 문제에서의 차 X는 비음수로 취한 절댓값 $X = |A - B|$로 해석한다.

가능한 값은 $0, 1, 2$이며 확률은 다음과 같다.

$$P(X=0) = P(A=B) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8},$$

$$P(X=1) \quad = P\{(2,1),(1,2),(3,2),(2,3)\} = 4 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{2},$$

$$P(X=2) = P\{(3,1),(1,3)\} = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{8}.$$

따라서 기댓값과 제곱기댓값은

$$E[X] = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}, \qquad E[X^2] = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1.$$

분산은

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

정답: ④ ($\frac{7}{16}$)

문항 번호: 28

해설:
총 8장의 카드는 색별로 동일하므로 색별로 분배 경우를 곱하여 셉니다.

1) 색별 전체 분배 수
- 빨강 1장 → 3명에게 분배: 3가지
- 파랑 1장 → 3가지
- 노랑 3장 → 동일한 3개를 3명에게 분배하는 경우 수: $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$
- 보라 3장 → 역시 10

따라서 전체 분배 수는 $3 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

2) 조건 (가): A, B가 각각 최소 1장 받기 (C는 0장 가능)
포함배제법을 사용합니다.
- A가 0장인 경우: 각 색을 B,C에게만 분배

빨강·파랑: 2씩, 노랑·보라: $\binom{3+2-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$씩 → $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
- B가 0장인 경우도 대칭적으로 64
- A,B 모두 0장(모두 C에게): 1

따라서 (가)를 만족하는 경우 수는

$$900 - 64 - 64 + 1 = 773.$$

3) 조건 (나): A가 받는 색의 가짓수는 3 이하 → A가 4색 모두 받는 경우를 제외
먼저 (가)를 만족하는 773에서 A가 4색 모두 받는 경우를 빼야 합니다.

A가 4색 모두 받으려면 빨강·파랑(각 1장)은 반드시 A에게 가야 하고, 노랑 3장·보라 3장에 대해서도 A가 각 색에서 최소 1장씩 가져야 합니다.
- 노랑을 A,B,C에게 분배하되 A가 최소 1장인 경우 수: 전체(10)에서 A가 0장인 경우(노랑을 B,C만에게 분배 → 4)를 빼면 $10 - 4 = 6$.
- 보라도 마찬가지로 6. 따라서 노랑·보라에 대해 A가 각각 최소 1장인 경우의 곱은 $6 \cdot 6 = 36$.

하지만 여기서 (가)를 만족해야 하므로 B가 전체에서 0장이 되는 경우(즉 B가 노랑·보라에서 각각 0장을 받는 경우)를 제외해야 합니다.
- B가 노랑에서 0장인 경우 수는 3 (노랑 3장을 A,C만에게), 보라도 3 → $3 \cdot 3 = 9$. 이 9는 B가 0장인 경우로 (가)에서 허용되지 않으므로 A가 4색 받는 경우 중 (가)를 만족하는 것은 $36 - 9 = 27$입니다.

따라서 (가)와 (나)를 동시에 만족하는 전체 경우 수는

$$773 - 27 = 746.$$

정답: ② 746

문항 번호: 29

해설:
- 한 번의 시행에서 교집합의 원소 개수가 1일 확률 p를 구합니다.
전체 경우의 수는 집합 A의 부분집합 8개와 B의 부분집합 4개를 곱하여 $8 \times 4 = 32$입니다. 경우들을 세면 교집합의 원소 개수가 1인 경우는 총 12가지이므로

$$p = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

- 15360번 독립 시행하므로 성공(교집합 원소 개수가 1) 횟수 X는 이항분포를 따릅니다:

$$X \sim \mathrm{Bin}\left(n = 15360,\ p = \tfrac{3}{8}\right).$$

이때 평균과 분산은

$$\mu = np = 15360 \times \frac{3}{8} = 5760, \qquad \sigma^2 = np(1-p) = 15360 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 3600,$$

따라서 표준편차는 $\sigma = 60$입니다.

- 구하려는 확률은 $P(X \geq 5880)$입니다. 정규근사와 연속성 보정을 적용하면

$$P(X \geq 5880) \approx P\left(Z \geq \frac{5879.5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5879.5 - 5760}{60}\right) = P(Z \geq 1.9917) \approx P(Z \geq 2.0).$$

표준정규분포표에서 주어진 값으로는 $P(0 \leq Z \leq 2.0) = 0.477$ 이므로

$$P(Z \geq 2.0) = 0.5 - 0.477 = 0.023.$$

따라서 $k \approx 0.023$이고

$$1000 \times k \approx 23.$$

정답: 23.

문항 번호: 30

해설:
학생 A가 카드를 내려놓는 사건의 확률은 A가 8을 뽑을 때이므로

$$P(A \text{ 내려놓음}) = \tfrac{1}{2}.$$

학생 B가 카드를 내려놓는 확률을 b라 두면, B는 숫자 $2, 3, 4, 5, 6, 7$ 중에서 선택하므로 $n \geq 2$일 때

$$b = \frac{2, \ldots, n\text{의 개수}}{6} = \frac{n-1}{6},$$

(참고로 $n = 1$이면 $b = 0$이다.)

이제 A와 B가 귤을 받는 확률을 각각 구한다.

A가 귤을 받는 경우는
- 둘 다 내려놓는 경우: 확률 $\frac{1}{2} \cdot b$. 이때 A가 내려놓은 수는 8로 항상 더 크므로 A가 귤을 받음.
- A는 내려놓지 않고 B만 내려놓는 경우: 확률 $\frac{1}{2} \cdot b$. 이 경우 내려놓지 않은 A가 귤을 받음.

따라서

$$p = P(A \text{ 가 귤}) = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}b = b.$$

B가 귤을 받는 경우는
- A만 내려놓는 경우: 확률 $\frac{1}{2} \cdot (1-b)$. 이 경우 내려놓지 않은 B가 귤을 받음.

따라서

$$q = P(B \text{ 가 귤}) = \tfrac{1}{2}(1-b).$$

조건 $p = q$를 대입하면

$$b = \tfrac{1}{2}(1-b) \quad \Rightarrow \quad 3b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \tfrac{1}{3}.$$

또한 $b = \dfrac{n-1}{6}$이므로

$$\frac{n-1}{6} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad n - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad n = 3.$$

이때 $p = b = \frac{1}{3}$이다. 따라서

$$24(n+p) = 24\left(3 + \tfrac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{10}{3} = 80.$$

정답: 80