기하

문항 번호: 23

해설: 포물선의 표준형은 $y^2 = 4ax$입니다. 주어진 식 $y^2 = 8x$와 비교하면 $4a = 8$이므로 $a = 2$입니다. 표준형에서 초점의 좌표는 $(a, 0)$이므로 주어진 포물선의 초점은 $(2, 0)$입니다. 따라서 p의 값은 2입니다.

문항 번호: 24

해설: 주어진 두 직선을 각각 $y = mx + b$ 형태로 정리하여 기울기를 비교하면 됩니다.

첫 번째 직선

$$\frac{x-1}{2} = y - 4$$

을 정리하면

$$y = \frac{1}{2}x + 4 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

이므로 기울기는 $m_1 = \frac{1}{2}$입니다.

두 번째 직선

$$\frac{x+2}{8} = \frac{y+5}{a}$$

를 정리하면 양변에 $8a$를 곱하거나 우변을 풀어

$$a(x+2) = 8(y+5)$$

$$\Rightarrow 8y = ax + 2a - 40$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{8}x + \frac{2a-40}{8} = \frac{a}{8}x + \frac{a-20}{4}$$

이므로 기울기는 $m_2 = \frac{a}{8}$입니다.

두 직선이 평행하려면 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{8}$$

이고 이를 풀면 $a = 4$입니다($a \neq 0$ 조건도 만족).

따라서 정답은 4번입니다.

문항 번호: 25

해설:
주어진 점은 $A(4, 3, -9)$입니다.

1. xy-평면에 대한 대칭이동은 z좌표의 부호만 반대로 바뀌므로,

$$B = (4, 3, 9)$$

2. 원점에 대한 대칭이동은 모든 좌표의 부호가 바뀌므로,

$$C = (-4, -3, 9)$$

3. 두 점 B와 C 사이의 거리(선분 BC의 길이)는 3차원 거리 공식에 따라

$$BC = \sqrt{(4-(-4))^2 + (3-(-3))^2 + (9-9)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

따라서 정답은 ① 10입니다.

문항 번호: 26:
편의상 좌표계를 잡아 직육면체를 배치하겠습니다. 아래면을 $z = 0$ 평면 위에 두고 꼭짓점들의 좌표를 다음과 같이 정합니다.

$$E(0,0,0), \quad A(0,0,1), \quad B(10,0,1), \quad D(0,5,1).$$

따라서 아래층의 대응점들은

$$F(10,0,0), \quad H(0,5,0)$$

입니다. 우리가 구하려는 것은 점 A와 직선 FH 사이의 거리이므로, 직선 FH상의 한 점으로 F를 택하고 방향벡터를

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{FH} = H - F = (-10,\ 5,\ 0)$$

로 잡습니다. 그리고 점 A에서 직선 위의 택한 점 F로 가는 벡터는

$$\overrightarrow{AF} = F - A = (10, 0, -1),$$

또는 문제 풀이에서 사용한 표기는 $\overrightarrow{PA} = A - F = (-10, 0, 1)$로 쓸 수 있으나, 거리 계산에서는 절대값이 중요합니다.

점과 직선 사이의 거리 공식

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

를 사용합니다. 여기서 $\overrightarrow{AP} = A - F = (-10, 0, 1)$로 취하면 외적은

$$\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v} = (-10, 0, 1) \times (-10, 5, 0) = (-5,\ -10,\ -50).$$

이 벡터의 크기는

$$\|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2 + (-50)^2} = \sqrt{25 + 100 + 2500} = 5\sqrt{105}.$$

한편 방향벡터의 크기는

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{100 + 25} = 5\sqrt{5}.$$

따라서 거리

$$d = \frac{5\sqrt{105}}{5\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{105}{5}} = \sqrt{21}.$$

따라서 정답은 $\sqrt{21}$이고 선택지로는 1번이 정답입니다.

문항 번호: 27

해설:
- 주어진 쌍곡선을 형태를 바꿔 쓰면

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

이므로 $a^2 = 16,\ b^2 = 9$ 이고 $c^2 = a^2 + b^2 = 25$ 이므로 $c = 5$. 초점은 $F(0,5),\ F'(0,-5)$ 이고 $FF' = 10$ 이다.
- 삼각형 $PF'F$의 둘레가 30이므로

$$PF + PF' + FF' = 30 \quad \Rightarrow \quad PF + PF' = 20.$$

쌍곡선 정의로 초점까지 거리의 차의 절댓값은 $2a = 8$. P는 제2사분면($y > 0, x < 0$)에 있으므로 위쪽 초점 $F(0,5)$에 더 가깝고, 따라서

$$PF' - PF = 8, \quad PF + PF' = 20$$

를 풀면 $PF = 6,\ PF' = 14$.
- 거리 공식을 써서 좌표를 구하면

$$x^2 + (y-5)^2 = 6^2 = 36, \qquad x^2 + (y+5)^2 = 14^2 = 196.$$

두 식을 빼면

$$(y+5)^2 - (y-5)^2 = 196 - 36 \implies 20y = 160 \implies y = 8.$$

따라서 첫 식에서 $x^2 = 36 - (8-5)^2 = 36 - 9 = 27$ 이고, 제2사분면이므로 $x = -3\sqrt{3}$. 즉 $P(-3\sqrt{3}, 8)$.
- 접선의 기울기는 암묵미분으로 구하면 원래 식 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서

$$\frac{2x}{9} - \frac{2y}{16}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{16x}{9y}.$$

점 $P(-3\sqrt{3}, 8)$에서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{16(-3\sqrt{3})}{9 \cdot 8} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

따라서 정답은 (2) 입니다.

문항 번호: 28:

해설:
- 구 $S: x^2+y^2+z^2=36$이므로 점 A, B에 대해 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=6$. 벡터 표기로 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$라 하자. 조건에서 A의 z좌표는 양수이고 6이 아니다.

- (가) 선분 OA 위에 있고 $|OC|=4$이므로 점 C는 $C=\frac{2}{3}A$ 즉 벡터로 $\mathbf{c}=\frac{2}{3}\mathbf{a}$이다. 직선 BC가 xy평면과 평행하므로 B와 C의 z좌표가 같아

$$b_z=c_z=\tfrac{2}{3}a_z.$$

- (나) 직선과 xy평면이 이루는 각의 사인은 그 직선의 z성분(수직성분)과 벡터 길이의 비이다. 따라서

$$\sin\alpha=\frac{a_z}{6}, \qquad \sin\beta=\frac{|b_z-a_z|}{|AB|}=\frac{\frac{1}{3}a_z}{|AB|}.$$

주어진 $\sin\alpha=3\sin\beta$로부터

$$\frac{a_z}{6}=3\cdot\frac{\frac{1}{3}a_z}{|AB|}=\frac{a_z}{|AB|}$$

이고 $a_z\neq 0$이므로 $|AB|=6$. 따라서

$$|AB|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=72-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=36,$$

즉 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=18$. 그러므로 $\angle AOB=60^\circ$이고

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin 60^\circ=36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}.$$

- 삼각형 OAB의 xy평면 위 정사영을 생각하자. $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$를 각각 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$의 xy평면 정사영이라 하면

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-a_zb_z=18-\frac{2}{3}a_z^2,$$

$$|\mathbf{a}'|^2=36-a_z^2, \qquad |\mathbf{b}'|^2=36-\frac{4}{9}a_z^2.$$

정사영이 직각삼각형이므로 세 경우를 검토하면(직각이 O', A', B' 중 하나):
- O'에서 직각이면 $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = 0$이고 이는 $18 - \frac{2}{3}a_z^2 = 0$에서 $a_z^2 = 27$을 준다(가능).
- A'이나 B'에서 직각이 되는 경우는 구의 반지름 제약 등으로 불가능함을 확인할 수 있다.

따라서 정사영의 직각은 O'에서 일어나며

$$a_z^2 = 27.$$

- 평면 OAB과 xy평면이 이루는 예각 θ는 두 평면의 법선벡터 사이의 각이다. 법선벡터는 $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$이고 xy평면의 법선은 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$이므로

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

한편 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z$는 $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$가 이루는 평행사변형의 면적으로, $\mathbf{a}' \perp \mathbf{b}'$이므로

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z| = |\mathbf{a}'|\,|\mathbf{b}'|.$$

위에서 $a_z^2 = 27$이므로

$$|\mathbf{a}'| = \sqrt{36 - 27} = 3, \qquad |\mathbf{b}'| = \sqrt{36 - \tfrac{4}{9} \cdot 27} = \sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}.$$

따라서

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z| = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}, \qquad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 18\sqrt{3}.$$

최종적으로

$$\cos\theta = \frac{6\sqrt{6}}{18\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

정답: (4) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

문항 번호: 29

해설:
- 타원 C_1의 초점이 $\mathrm{F}(0,6),\ \mathrm{F}'(0,-6)$이므로 중심은 원점이고 초점거리 $c_1 = 6$이다. 문제 조건에 따라 점 P는 $y = 6$ 위의 C_1 위의 점이므로 $P = (x, 6)$ $(x > 0)$로 둔다.

- 타원의 정의에 의해 C_1에서

$$2a_1 = |PF| + |PF'| = x + \sqrt{x^2 + 144},$$

따라서

$$a_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 144}}{2}.$$

- 직선 PF'의 기울기는 $\dfrac{6-(-6)}{x-0} = \dfrac{12}{x}$이므로 이 직선의 x축과의 교점 Q는 $y = 0$일 때의 x좌표로서

$$6 = \frac{12}{x} \cdot X \implies X = \frac{x}{2},$$

즉 $Q = \left(\frac{x}{2}, 0\right)$이다.

- 타원 C_2는 초점이 $F(0,6),\ P(x,6)$이고 점 Q가 꼭짓점(타원 위의 점)이므로 타원의 정의로

$$2a_2 = |QF| + |QP|.$$

그런데

$$|QF| = |QP| = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 36} = \frac{\sqrt{x^2 + 144}}{2},$$

이므로

$$a_2 = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 36} = \frac{\sqrt{x^2 + 144}}{2}.$$

- 교점 R에 대해 주어진 거리조건을 이용하면

$$|F'R| - |PR| = \big(|FR| + |F'R|\big) - \big(|FR| + |PR|\big) = 2a_1 - 2a_2 = 2(a_1 - a_2).$$

주어진 값 $7\sqrt{2}$로부터

$$a_1 - a_2 = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

- a_1, a_2 식을 대입하면

$$a_1 - a_2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 144}}{2} - \frac{\sqrt{x^2 + 144}}{2} = \frac{x}{2}.$$

따라서

$$\frac{x}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \implies x = 7\sqrt{2}.$$

- 이제 $\sqrt{x^2 + 144} = \sqrt{98 + 144} = \sqrt{242} = 11\sqrt{2}$이므로

$$a_1 = \frac{7\sqrt{2} + 11\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}, \qquad a_2 = \frac{11\sqrt{2}}{2}.$$

따라서 장축의 길이는 각각 $2a_1 = 18\sqrt{2},\ 2a_2 = 11\sqrt{2}$이고 그 곱은

$$(2a_1)(2a_2) = (18\sqrt{2})(11\sqrt{2}) = 18 \cdot 11 \cdot 2 = 396.$$

정답: 396.

문항 번호: 30

해설:
- 좌표 배치: 삼각형이 이등변(AB = AC)이므로 편의상 BC를 x-축 위에 두고 중점을 원점에 놓으면

$$B = (-8, 0), \quad C = (8, 0), \quad A = (0, 16)$$

로 놓을 수 있고 주어진 길이 조건을 만족합니다.

- 점들의 매개화: 선분 위의 점들을 매개변수로 나타내면

$$P = A + t(B - A) = (-8t,\ 16(1-t)),$$

$$Q = B + s(C - B) = (-8 + 16s,\ 0),$$

$$R = C + u(A - C) = (8 - 8u,\ 16u),$$

여기서 $t, s, u \in [0, 1]$ 입니다.

- 조건 (가): $(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 및 $(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RQ}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$
$\overrightarrow{BC}$가 x-축 방향이므로 이 내적들이 0이라는 것은 해당 벡터들의 x-성분이 0임을 의미합니다. 이를 계산하면

$$s + t - 1 = 0, \qquad s + u - 1 = 0.$$

따라서 $u = t$이고 $s = 1 - t$ 입니다.

- 조건 (나): $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = |\overrightarrow{QP}|^2.$
$s = 1 - t$을 대입하여

$$Q = (8 - 16t, 0), \quad \overrightarrow{QP} = P - Q = (8(t-1),\ 16(1-t)),$$

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (8t,\ 16t).$$

내적과 제곱을 계산하면

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = 192t(1-t),$$

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = 320(1-t)^2.$$

주어진 관계로부터(단 $|\overrightarrow{PQ}| > 0$이므로 $t \neq 1$)

$$192t(1-t) = 320(1-t)^2 \implies t = \frac{5}{8}.$$

따라서 $s = 1-t = \frac{3}{8}$, $u = t = \frac{5}{8}$ 이고

$$P = (-5, 6), \quad Q = (-2, 0), \quad R = (3, 10).$$

- PR의 길이:

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (8, 4) \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{PR}| = 4\sqrt{5}.$$

- 점 X의 자리: 조건 $|3\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XR}| = |\overrightarrow{PR}|$을 다루면

$$3\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XR} = 3(P - X) + (R - X) = (3P + R) - 4X,$$

따라서

$$|(3P + R) - 4X| = |\overrightarrow{PR}| = 4\sqrt{5}.$$

양변을 4로 나누면

$$|X - \tfrac{3P+R}{4}| = \sqrt{5}.$$

즉 X는 중심

$$C_0 = \frac{3P + R}{4} = (-3, 7)$$

반지름 $r = \sqrt{5}$인 원 위의 점들입니다.

- $|BX|$의 최대·최솟값: 원 위의 한 점 X에서 BX의 거리는 원의 중심 C_0에서 B까지의 거리에 반지름을 더하거나 빼는 것으로 얻습니다. 먼저

$$|BC_0| = \sqrt{(-3+8)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}.$$

그러므로

$$M = \max|BX| = |BC_0| + r = \sqrt{74} + \sqrt{5}, \quad m = \min|BX| = |BC_0| - r = \sqrt{74} - \sqrt{5}.$$

그 곱은

$$M \times m = (\sqrt{74} + \sqrt{5})(\sqrt{74} - \sqrt{5}) = 74 - 5 = 69.$$

따라서 구하는 값은 69입니다.