미적분

문항 번호: 23:
해설: 주어진 극한

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{x-1}$$

은 도함수의 정의형태입니다. 함수 $f(x) = e^x$에 대해 $a = 1$일 때

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

이므로 이 극한은 $f'(1)$과 같습니다. 지수함수의 도함수는 자기 자신이므로

$$f'(x) = (e^x)' = e^x$$

이고, 따라서

$$f'(1) = e^1 = e$$

입니다. (참고로 로피탈의 정리를 사용해도 분자와 분모를 각각 미분하면 분자 e^x, 분모 1이 되어 $x = 1$에서 값이 e가 됨을 확인할 수 있습니다.) 따라서 정답은 ① e입니다.

문항 번호: 24

해설: 치환 $u = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 를 하면 미분은 $du = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\, dx$ 가 되어 적분식이 단순해집니다. 상한과 하한도 변환하면 $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $u = 0$, $x = \frac{3\pi}{4}$ 일 때 $u = 1$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\, dx = \int_0^1 e^u\, du.$$

지수함수의 부정적분은 e^u 이므로 정적분 값은

$$[e^u]_0^1 = e - 1.$$

따라서 정답은 선택지 (4) $e - 1$ 입니다.

문항 번호: 25

해설:
주어진 극한식은

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a\,n^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}} = 6$$

입니다. 분모의 두 제곱근의 차이를 처리하기 위해 켤레를 곱하여 유리화하면

$$\frac{a\,n^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}} = a\,n^b \cdot \frac{\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}}{(n^4+4n)-(n^4+n)} = \frac{a}{3}\,n^{b-1}\big(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}\big).$$

이제 각 제곱근의 주도항을 추출합니다. 큰 n에서

$$\sqrt{n^4+cn} = n^2\sqrt{1+\frac{c}{n^3}} = n^2 + \frac{c}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

따라서

$$\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n} = 2n^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \sim 2n^2.$$

이를 앞 식에 대입하면 전체 표현식은 대략

$$\frac{a}{3}\,n^{b-1}\cdot 2n^2 = \frac{2a}{3}\,n^{b+1}\big(1+o(1)\big)$$

로 근사됩니다. 극한이 유한하고 0이 아닌 상수 6이 되려면 지수 부분이 n^0이 되어야 하므로

$$b+1=0 \quad \Rightarrow \quad b=-1.$$

이때 극한값은 계수로 주어지므로

$$\frac{2a}{3} = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 9.$$

따라서 $a+b = 9+(-1) = 8$이며, 정답은 선택지 ②입니다.

문항 번호: 26

해설:
- 교점 구하기
y=1일 때 $1 = \frac{3}{x-1}$ 이므로 $x = 4$. 따라서 $A(4,1)$.
y=3일 때 $3 = \frac{3}{x-1}$ 이므로 $x = 2$. 따라서 $B(2,3)$.

- 직선 AB의 방정식
두 점 $A(4,1), B(2,3)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-1}{2-4} = -1$ 이고, 따라서 직선식은 $y = -x + 5$ 이다. 즉 이 직선에서의 x-좌표는 $x_{\text{line}} = 5 - y$ 이다.

- 곡선의 x-좌표 표현(수평분할을 위해)
곡선 $y = \frac{3}{x-1}$ 를 x에 대한 식으로 정리하면
$x = 1 + \frac{3}{y}$. 즉 곡선에서의 x-좌표는 $x_{\text{curve}} = 1 + \frac{3}{y}$ 이다.

- 넓이 계산(수평분할)
영역은 $y = 1$에서 $y = 3$까지이므로 가로 길이는

$$x_{\text{line}} - x_{\text{curve}} = (5-y) - \left(1 + \frac{3}{y}\right) = 4 - y - \frac{3}{y}.$$

따라서 넓이

$$S = \int_1^3 \left(4 - y - \frac{3}{y}\right) dy = \left[4y - \frac{y^2}{2} - 3\ln y\right]_1^3.$$

값을 계산하면

$$S = (12 - \tfrac{9}{2} - 3\ln 3) - (4 - \tfrac{1}{2}) = 4 - 3\ln 3.$$

따라서 정답은 선택지 ① $4 - 3\ln 3$ 입니다.

문항 번호: 27

해설:
합성함수 $h(x) = f(x^3 + x)$라 하면 주어진 조건에서 $f'(x) > 0$ 및 $3x^2 + 1 > 0$ 이므로 h는 단조증가하여 역함수 g가 존재한다.
주어진 $f(2) = 1$에서

$$h(1) = f(1^3 + 1) = f(2) = 1$$

이므로 $g(1) = 1$이다.

합성함수의 미분법으로

$$h'(x) = f'(x^3 + x)\,(3x^2 + 1)$$

이므로

$$h'(1) = f'(2)\,(3 \cdot 1^2 + 1) = 4f'(2).$$

역함수의 미분법에 따라

$$g'(1) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{4f'(2)}.$$

주어진 관계식 $f'(2) = 8g'(1) - 1$에 위 식을 대입하면

$$f'(2) = 8 \cdot \frac{1}{4f'(2)} - 1 = \frac{2}{f'(2)} - 1.$$

이를 정리하면

$$f'(2)^2 + f'(2) - 2 = 0,$$

따라서 $f'(2) = 1$ 또는 $f'(2) = -2$인데 $f'(2) > 0$이므로 $f'(2) = 1$이다. 그러므로

$$g'(1) = \frac{1}{4f'(2)} = \frac{1}{4}.$$

결국

$$g(1) + g'(1) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

정답: ①

문항 번호: 28

해설:
주어진 관계에서 양변을 미분하면 연쇄법칙에 의해

$$f'(x) = g'(x) - \sec^2(g(x))\, g'(x) = -g'(x)\tan^2(g(x))$$

이고 다시 미분하여

$$f''(x) = -\tan^2(g(x))\, g''(x) - 2\tan(g(x))\sec^2(g(x))\,(g'(x))^2$$

를 얻습니다.

(가)에서 $f(0) = 0$이므로

$$0 = f(0) = g(0) - \tan g(0) \quad \Rightarrow \quad \tan g(0) = g(0).$$

따라서 $f'(0) = -g'(0)\tan^2(g(0)) = -g'(0)(g(0))^2$이고, 구하고자 하는 값은

$$g'(0)\,(g(0))^2 = -f'(0).$$

이제 f가 삼차다항함수이므로 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$라 두고 조건을 대입합니다.
- $f(0) = 0$에서 $d = 0$.
- $f''(x) = 6ax + 2b$이므로 $f''(\pi) = 0$에서 $6a\pi + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a\pi$.

(나)의 조건 $\sin g(\pi) = 0$로 $g(\pi) = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 이므로 $\tan g(\pi) = 0$이고, 따라서

$$f'(\pi) = -g'(\pi)\tan^2(g(\pi)) = 0.$$

한편 다항식으로 계산하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \implies f'(\pi) = 3a\pi^2 + 2b\pi + c.$$

여기에 $b = -3a\pi$를 대입하면 $f'(\pi) = c - 3a\pi^2$. 따라서 $f'(\pi) = 0$에서 $c = 3a\pi^2$. 그러므로

$$f'(0) = c = 3a\pi^2,$$

따라서

$$g'(0)\,(g(0))^2 = -f'(0) = -3a\pi^2.$$

또한 $f(\pi) = g(\pi) - \tan g(\pi) = k\pi$이고 다항식으로는

$$f(\pi) = a\pi^3 + b\pi^2 + c\pi = a\pi^3 - 3a\pi^3 + 3a\pi^3 = a\pi^3.$$

따라서 $a\pi^3 = k\pi \Rightarrow a = \dfrac{k}{\pi^2}$. 이것을 위 식에 넣으면

$$g'(0)\,(g(0))^2 = -3a\pi^2 = -3k.$$

이제 k를 결정해야 합니다. 조건 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{3\pi}{2}$와 전역 미분가능성 때문에 $g(x)$는 정의역 전체에서 탄젠트의 발산점 $\frac{\pi}{2} + n\pi$을 건너뛰어야 하며, $g(x)$는 어떤 열린 구간 $\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}, \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$ 안에 머물러야 합니다. 극한이 $\frac{3\pi}{2}$이므로 $g(\pi) = k\pi$는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 또는 $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ 중 하나에 들어야 하며, 따라서 가능한 k는 1 또는 2입니다.

다음으로 극한이 $\frac{3\pi}{2}$로 수렴할 때 $f(x) = g(x) - \tan g(x)$의 발산 방향을 고려하면,
- 만약 $g(x) \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+$이면 $\tan g(x) \to -\infty$이므로 $f(x) \to +\infty$이고 이는 계수 $a > 0$을 의미합니다.
- 반대로 $g(x) \to \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$이면 $\tan g(x) \to +\infty$이므로 $f(x) \to -\infty$이고 이는 $a < 0$을 의미합니다.

$a = \dfrac{k}{\pi^2}$이므로 $k > 0$이어야 $a > 0$가 되고, 따라서 위의 경우에 맞추면 $k = 2$가 되어야 합니다. 결국

$$g'(0)\,(g(0))^2 = -3k = -6.$$

정답: (2) -6

문항 번호: 29

해설:
- 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 r^{n-1}$이고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 공비는 $|r| < 1$입니다. 공비 r가 유리수이므로 정수인 항이 존재하려면 첫항 a_1도 유리수여야 합니다.
- 문제에서 정수인 항의 개수가 정확히 3개라고 했으므로, 정수 조건을 만족하는 항들의 지수가 어떤 연속된 구간을 이룬다는 성질을 이용하면 이 세 정수 항은 연속한 세 항이라 볼 수 있습니다. 즉 어떤 k에 대하여 a_k, a_{k+1}, a_{k+2}가 정수이고 그들의 곱이 216입니다.
- 연속한 세 항의 곱은 등비성 때문에

$$a_k a_{k+1} a_{k+2} = a_{k+1}^3.$$

따라서 $a_{k+1}^3 = 216$이고, 이에 의해 $a_{k+1} = 6$입니다.
- 그러면 이 세 정수 항은 $\dfrac{6}{r},\ 6,\ 6r$이고, 이들이 모두 정수가 되려면 공비 r은 유리수이면서 분자·분모가 6의 약수여야 합니다. $|r| < 1$인 조건을 고려하면 후보로

$$r \in \{\pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{1}{3},\ \pm\tfrac{1}{6},\ \pm\tfrac{2}{3}\}$$

이 됩니다.
- 조건 (가) $a_1 + a_2 < 10$을 만족시키려면 경우를 따져야 합니다. 먼저 $r > 0$이면 $a_1(1+r) = a_1 + a_2$가 너무 커져 조건을 만족시키지 못하는 경우들이 제거됩니다(후에 계산으로 확인 가능). 따라서 음수 공비를 탐색합니다.
- 음수 공비일 때 $a_1 > 0$을 유지하려면 k는 짝수여야 합니다. 또한 정수 항이 정확히 3개여야 하므로 그 주변 항들이 정수가 되지 않아야 합니다. 후보들 중에서 $r = -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{6}$은 $6/r^2$ 등이 정수가 되어 추가로 정수 항이 생기므로 탈락합니다. 유일하게 남는 경우는

$$r = -\tfrac{2}{3}.$$

- 이때 $a_{k+1} = 6$이고 k는 짝수입니다. a_1은 $a_1 = 6/r^k$이므로 $a_1 + a_2 = a_1(1+r)$을 계산하면

$$a_1 + a_2 = 6\frac{1+r}{r^k} = 6 \cdot \frac{1 + (-\frac{2}{3})}{(-\frac{2}{3})^k} = 6 \cdot \frac{1/3}{(2/3)^k} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}.$$

이 값이 10보다 작아야 하므로 가능한 최소의 짝수 k를 택하면 $k = 2$만 가능합니다(그 이상이면 값이 커짐).
- 따라서 $k = 2$이면

$$a_1 = \frac{6}{r^2} = \frac{6}{(4/9)} = \frac{27}{2}, \qquad a_2 = a_1 r = \frac{27}{2} \cdot (-\tfrac{2}{3}) = -9,$$

그리고 연속한 항들은 $\dfrac{27}{2},\ -9,\ 6,\ -4, \ldots$가 되어 정수인 항은 정확히 세 개이고 이들의 곱은 216, 조건 (가)도 성립합니다($a_1 + a_2 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} < 10$).
- 급수의 합은 등비급수의 합 공식을 사용하여

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{27/2}{1-(-2/3)} = \frac{27/2}{1+2/3} = \frac{27/2}{5/3} = \frac{81}{10}.$$

이는 기약분수로 $\dfrac{q}{p} = \dfrac{81}{10}$이므로 $p = 10,\ q = 81$이고 따라서

$$p + q = 10 + 81 = 91.$$

정답: 91

문항 번호: 30

해설:
주어진 식을 지수화하면

$$e^{f(x)}\big(1+xf'(x)\big)=g(x).$$

왼쪽을 보면 곱의 미분법으로

$$\big(xe^{f(x)}\big)'=e^{f(x)}+xe^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}\big(1+xf'(x)\big)$$

이므로 결국

$$g(x)=\big(xe^{f(x)}\big)'.$$

따라서 적분값으로부터 경계값 차이를 얻을 수 있습니다:

$$\int_1^2 g(x)\,dx=\big[xe^{f(x)}\big]_1^2=34.$$

주어진 초기값 $f(1)=4\ln 2$에서 $e^{f(1)}=e^{4\ln 2}=2^4=16$이므로

$$2e^{f(2)}-1\cdot e^{f(1)}=34 \quad\Rightarrow\quad 2e^{f(2)}-16=34,$$

따라서

$$e^{f(2)}=25.$$

다음으로 $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$를 구하기 위해 $(x^2e^{f(x)})'$를 고려합니다:

$$(x^2e^{f(x)})'=2xe^{f(x)}+x^2e^{f(x)}f'(x).$$

한편 $xg(x)=xe^{f(x)}+x^2e^{f(x)}f'(x)$이므로

$$(x^2e^{f(x)})'-xe^{f(x)}=xg(x).$$

이를 1부터 2까지 적분하면

$$\int_1^2 xg(x)\,dx = \left[x^2 e^{f(x)}\right]_1^2 - \int_1^2 xe^{f(x)}\,dx.$$

주어진 $\int_1^2 xg(x)\,dx = 53$이고 경계값은

$$\left[x^2 e^{f(x)}\right]_1^2 = 4e^{f(2)} - 1 \cdot e^{f(1)} = 4 \cdot 25 - 16 = 84$$

이므로

$$53 = 84 - \int_1^2 xe^{f(x)}\,dx.$$

따라서

$$\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx = 84 - 53 = 31.$$

정답: 31