공통(1~22)

문항 번호: 1

해설: 주어진 식은 $5^{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$입니다. 먼저 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} = (5^{-1})^{\sqrt{2}} = 5^{-\sqrt{2}}$로 바꿀 수 있습니다. 따라서 같은 밑을 곱할 때 지수끼리 더하는 법칙을 이용하면

$$5^{\sqrt{2}+1} \times 5^{-\sqrt{2}} = 5^{(\sqrt{2}+1)+(-\sqrt{2})} = 5^1 = 5$$

가 됩니다. 따라서 값은 5이며, 정답은 ④번입니다.

문항 번호: 2

해설:
함수는 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 입니다. 정의에 따른 차분 몫을 계산하면,

$$f(4+h) = (4+h)^2 - 4(4+h) + 2 = 16 + 8h + h^2 - 16 - 4h + 2 = h^2 + 4h +$$

$$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 2 = 2.$$

따라서

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{h^2 + 4h + 2 - 2}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

$h \to 0$일 때 극한값은 4이므로 정답은 ④번입니다.

(참고로 도함수로 확인하면 $f'(x) = 2x - 4$ 이고 $f'(4) = 4$ 로 동일합니다.)

"문항 번호: 3

해설: 주어진 식은

$$\sum_{k=1}^{6}(2a_k - 1) = 30$$

입니다. 합의 선형성을 이용하면 상수인 2를 인수로 빼고 항별로 합을 나눌 수 있으므로,

$$\sum_{k=1}^{6}(2a_k - 1) = 2\sum_{k=1}^{6} a_k - \sum_{k=1}^{6} 1.$$

여기서 $\sum_{k=1}^{6} 1 = 6$이고, $\sum_{k=1}^{6} a_k$을 S라 두면 식은

$$2S - 6 = 30$$

이 됩니다. 양변에 6을 더하고 2로 나누면

$$2S = 36 \quad \Rightarrow \quad S = 18.$$

따라서 $\sum_{k=1}^{6} a_k = 18$이고 정답은 ⑤입니다.

문항 번호: 4

해설: 그림에서 왼쪽에서 0으로 접근하는 부분은 구간 $[-2,0)$에 있는 곡선이며, $x \to 0-$일 때 그 곡선은 $y \approx -1$로 다가갑니다. 따라서

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1.$$

한편 오른쪽에서 1로 접근하는 부분은 구간 $(1,2]$의 직선이며, 그 직선은 $x \to 1+$에서 $y \to 2$로 접근합니다. 즉

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2.$$

두 극한의 합은

$$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = -1 + 2 = 1.$$

따라서 정답은 보기 (1)입니다.

문항 번호: 5

해설: 함수 $f(x) = \left(x^2 + 2\right)\left(x^2 + x - 3\right)$에서 곱의 미분법을 사용합니다. 두 함수를 $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^2 + x - 3$라 하면

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

이고, $g'(x) = 2x$, $h'(x) = 2x + 1$입니다. 따라서

$$f'(1) = (2 \cdot 1)\left(1^2 + 1 - 3\right) + \left(1^2 + 2\right)\left(2 \cdot 1 + 1\right) = 2(-1) + 3 \cdot 3 = -2 + 9 = 7.$$

참고로 전개하여 미분해도 동일한 결과를 얻습니다. 따라서 정답은 ② 7입니다.

문항 번호: 6

해설:
주어진 식을 변형하면 삼각함수의 차 공식 또는 주기 성질을 이용할 수 있습니다. 먼저

$$\cos(\theta - \pi) = \cos\theta\cos\pi + \sin\theta\sin\pi$$

이고 $\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0$이므로

$$\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta.$$

문제에서 $\cos(\theta - \pi) = \frac{3}{5}$이므로

$$-\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{3}{5}.$$

이제 피타고라스 항등식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 써서 $|\sin\theta|$를 구합니다.

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25},$$

따라서 $|\sin\theta| = \frac{4}{5}$입니다.

부호는 조건 $\tan\theta < 0$로 결정합니다. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta < 0$이면 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 서로 다릅니다. 이미 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$로 음수이므로 $\sin\theta$는 양수여야 합니다. 따라서

$$\sin\theta = +\frac{4}{5}.$$

정답: ⑤ (즉 $\frac{4}{5}$).

문항 번호: 7

해설: 주어진 함수는 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$입니다. 접선의 기울기는 도함수 $f'(x)$의 값이므로 먼저 도함수를 구하면

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$$

입니다. 주어진 점이 $x = 3$이므로 그 점에서의 기울기는

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 6 = 27 - 30 + 6 = 3$$

입니다. 따라서 점 $(3, 0)$에서의 접선의 방정식은 점-기울기형으로

$$y - 0 = 3(x - 3)$$

이고 정리하면

$$y = 3x - 9$$

입니다. 이 직선이 점 $(5, a)$를 지난다고 했으므로 $x = 5$를 대입하여

$$a = y\big|_{x=5} = 3 \cdot 5 - 9 = 6$$

이므로 정답은 $a = 6$ (선택지 ①) 입니다.

문항 번호: 8

해설:
밑을 모두 2로 통일하기 위해 $x=\log_2 a,\ y=\log_2 b$라 둡니다. 이때

$$\log_{\sqrt{2}} a=\frac{\log_2 a}{\log_2 \sqrt{2}}=\frac{x}{1/2}=2x, \qquad \log_2 b^2=2\log_2 b=2y.$$

따라서 주어진 연립식은

$$2x+y=2, \qquad x+2y=7$$

입니다. 첫 식에서 $y=2-2x$를 두 번째 식에 대입하면

$$x+2(2-2x)=7 \ \Rightarrow\ -3x+4=7 \ \Rightarrow\ x=-1.$$

따라서 $y=2-2(-1)=4$입니다.

원래 구하려는 값은 ab이므로

$$\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b=x+y=-1+4=3,$$

따라서 $ab=2^3=8$입니다. 정답은 (3)입니다.

문항 번호: 9

해설:
주어진 대로 $F(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F'(x) = f(x)$$

이고, $G(x)$는 $2f(x)+1$의 한 부정적분이므로

$$G'(x) = 2f(x) + 1.$$

적분의 선형성에 의해 $G(x)$는 $F(x)$에 대해 다음과 같은 형태를 갖습니다:

$$G(x) = 2F(x) + x + C$$

여기서 C는 상수입니다. 조건 $G(3) = 2F(3)$을 대입하면

$$2F(3) + 3 + C = 2F(3)$$

이 되어 $C = -3$임을 얻습니다. 따라서

$$G(5) - 2F(5) = (2F(5) + 5 + C) - 2F(5) = 5 + C = 5 - 3 = 2.$$

정답은 2번입니다.

문항 번호: 10

해설:
- 등비수열의 합을 S_n이라 할 때 주어진 교대합을 묶으면

$$\sum_{k=1}^{6}(-1)^k S_k = (-S_1 + S_2) + (-S_3 + S_4) + (-S_5 + S_6).$$

각 쌍에 대해 $-S_{m-1} + S_m = a_m$이므로 전체 합은

$$\sum_{k=1}^{6}(-1)^k S_k = a_2 + a_4 + a_6.$$

문제에서 이 값이 21이라 주어졌으므로

$$a_2 + a_4 + a_6 = 21.$$

- 주어진 조건 $a_2 = 1$을 이용하면 $a_4 + a_6 = 20$. 모든 항이 양수이므로 공비 $r > 0$. 등비수열 일반항은 $a_n = a_1 r^{n-1}$이고 $a_2 = a_1 r = 1$ 이므로 $a_1 = \dfrac{1}{r}$. 따라서

$$a_n = \frac{1}{r} r^{\,n-1} = r^{\,n-2}.$$

특히

$$a_4 = r^2, \qquad a_6 = r^4,$$

이므로

$$r^2 + r^4 = 20.$$

$t = r^2 > 0$라 두면 $t^2 + t - 20 = 0$이고 양근은 $t = 4$이므로 $r^2 = 4$에서 $r = 2$ (양수 조건).

- $a_1 = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$, $r = 2$일 때 부분합 공식($r \neq 1$)을 쓰면

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{1}{2}(2^n - 1).$$

따라서

$$S_2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1) = \frac{3}{2}, \qquad S_7 = \frac{1}{2}(2^7 - 1) = \frac{127}{2}.$$

합은

$$S_2 + S_7 = \frac{3}{2} + \frac{127}{2} = \frac{130}{2} = 65.$$

정답: 보기 (3) 65.

문항 번호: 11

해설:
속도함수는 $v(t) = 3t^2 - 10t + 7$, 초기조건 $s(0) = 0$이다.

1) 시각 $t = 1$에서의 속도값을 계산하면

$$v(1) = 3 - 10 + 7 = 0.$$

하지만 운동 방향이 바뀌었는지 여부는 $t = 1$ 전후의 부호 변화를 확인해야 한다. 이차식의 판별식은 $\Delta = 100 - 84 = 16$이고, 근은

$$t = \frac{10 \pm 4}{6} = 1,\ \frac{7}{3}.$$

따라서 인수분해하면

$$v(t) = 3(t-1)\left(t - \tfrac{7}{3}\right).$$

부호를 보면 $t < 1$에서는 $v(t) > 0$, $1 < t < \frac{7}{3}$에서는 $v(t) < 0$, $t > \frac{7}{3}$에서는 $v(t) > 0$이므로 $t = 1$을 기준으로 $+$에서 $-$로 바뀌어 운동 방향이 실제로 바뀐다. 따라서 ㄱ은 참이다.

2) 위치함수는 속도의 원시함수로 구한다:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (3t^2 - 10t + 7)\,dt = t^3 - 5t^2 + 7t + C.$$

초기조건 $s(0) = 0$에서 $C = 0$ 이므로

$$s(1) = 1 - 5 + 7 = 3.$$

따라서 ㄴ은 참이다.

3) 이동거리는 구간에서 속도의 절댓값 적분이다. 부호 분석에서 $0 \le t \le 1$ 구간에서는 $v(t) \ge 0$, $1 \le t \le 2$ 구간에서는 $v(t) \le 0$이므로

$$\text{이동거리} = \int_0^1 v(t)\,dt + \int_1^2 -v(t)\,dt.$$

정적분과 위치값을 이용하면 이는

$$(s(1) - s(0)) + (s(1) - s(2)) = 3 - 0 + (3 - s(2)).$$

먼저 $s(2) = 8 - 20 + 14 = 2$ 이므로

$$\text{이동거리} = 3 + (3 - 2) = 4.$$

따라서 ㄷ도 참이다.

결론: ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳으므로 정답은 (5)이다.

문항 번호: 12

해설:
- 점들의 좌표는 $A = (t, a^t),\ B = (2t, a^{2t}),\ C = (2t, 0)$입니다. 조건 $\overline{AB} = \overline{AC}$에서 거리의 제곱을 비교하면

$$(2t-t)^2 + (a^{2t} - a^t)^2 = (2t-t)^2 + (0 - a^t)^2$$

이므로

$$(a^{2t} - a^t)^2 = (a^t)^2.$$

여기서 $y := a^t > 0$라 두면 $(y^2 - y)^2 = y^2$이고, 이는

$$y^2 - y = \pm y$$

가 됩니다.
- $y^2 - y = y$이면 $y^2 - 2y = 0$이어서 $y = 0$ 또는 $y = 2$. 양수 조건과 $a > 1,\ t > 0$으로 $y = a^t > 1$이므로 $y = 2$입니다.
- 다른 대안 $y^2 - y = -y$는 $y^2 = 0$이 되어 불가능합니다.
따라서

$$a^t = 2, \qquad a^{2t} = (a^t)^2 = 4.$$

- 삼각형 ACB의 넓이는 밑변을 CB로, 높이를 A에서 CB로 내린 수선의 길이($= |t - 2t| = t$)로 잡아

$$\frac{1}{2} \cdot |CB| \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a^{2t} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t = 2t$$

이고, 문제에서 넓이가 8이라고 주어졌으므로 $2t = 8$에서 $t = 4$입니다.

- $a^t = 2$와 $t = 4$에서 $a^4 = 2$이므로 $a = 2^{1/4}$. 따라서

$$a \cdot t = 2^{1/4} \cdot 4 = 4 \cdot 2^{1/4} = 2^2 \cdot 2^{1/4} = 2^{9/4}.$$

정답: 선택지 1 ($2^{9/4}$).

문항 번호: 13

해설:
- 분모를 인수분해하면

$$D(x) = (f(x))^2 - k(x+2)f(x) = f(x)\big(f(x) - k(x+2)\big).$$

- 여기서 $f(x) = x^2 + 6x + 12 = (x+3)^2 + 3 > 0$ 이므로 분모가 0이 되는 실수 x는 오직

$$g(x) := f(x) - k(x+2) = x^2 + (6-k)x + (12-2k) = 0$$

을 만족하는 곳뿐입니다.
- 문제의 조건(모든 실수 a에 대해 극한이 존재하려면)을 만족하려면, 분모가 0이 되는 어떤 a가 존재할 경우 그 점에서 분자 x^2도 동시에 충분히 높은 차수로 0이 되어 제거가능한 특이점이어야 합니다. 특히 분모가 0이면서 분자가 0이 아닌 점이 한 곳이라도 있으면 그 점에서 극한이 발산하므로 허용되지 않습니다. 따라서 다음 둘 중 하나여야 합니다.
1. $g(x)$가 실근을 전혀 가지는 경우(즉 분모가 전구간에서 0이 되지 않음), 또는
2. $g(x)$의 유일한 실근이 $x=0$이고 그 근의 중복도가 적절하여 분자 x^2로 소거되도록 하는 경우.

- $g(x)$의 판별식은

$$\Delta = (6-k)^2 - 4(12-2k) = k^2 - 4k - 12.$$

따라서
- 실근이 전혀 없으려면 $\Delta < 0$ 이어야 하고, 이는 $-2 < k < 6$ 입니다. 정수 k로는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$의 7개가 해당합니다.
- $\Delta = 0$인 경우는 $k = -2$ 또는 $k = 6$ 입니다.
• $k = -2$이면 $g(x)$는 중근을 가지되 그 근은 $x = -4$로 $x \neq 0$ 이므로 그 점에서 분모는 0이지만 분자 $x^2 \neq 0$ 이어서 극한이 존재하지 않습니다(불가).
• $k = 6$이면 $g(x) = x^2$ 이고 따라서 분모는 $D(x) = f(x)\,x^2$가 됩니다. 이때 모든 $a \neq 0$에서는 분모가 0이 아니고, $a = 0$에서

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{f(x)\,x^2} = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{12}$$

로 유한한 극한이 존재하므로 허용됩니다.

- 따라서 조건을 만족하는 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (7개)와 6을 더한 총 8개입니다.

정답: ④ (8개)

문항 번호: 14

해설:
- 수평선 $y=p$와의 교점들을 A, B의 x좌표를 각각 x_A, x_B라 놓으면, 점 $P(0,p)$로부터의 수평 거리이므로 $\overline{PA}=x_A$이고 $\overline{AB}=x_B-x_A$입니다.
- 함수는 $f(x)=\tan\frac{x}{k}$이고 탄젠트의 주기가 π이므로 x_B는 x_A보다 한 주기만큼 더 큰 값입니다. 즉

$$x_B=x_A+k\pi.$$

따라서 $\overline{AB}=k\pi$.
- 조건 $\overline{AB}=3\overline{PA}$으로부터

$$k\pi=3x_A \quad\Rightarrow\quad x_A=\frac{k\pi}{3}.$$

- 그러면 $p=f(x_A)=\tan\frac{x_A}{k}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.
- 점 C는 $y=-p=-\sqrt{3}$인 교점이므로 $\tan\frac{x_C}{k}=-\sqrt{3}$. 주기와 해의 위치를 고려하면

$$\frac{x_C}{k}=\frac{2\pi}{3} \quad\Rightarrow\quad x_C=\frac{2k\pi}{3}.$$

- 삼각형 OCB의 넓이는 행렬식(혹은 밑·높이)으로 구하면
$O(0,0),\ C(x_C,-p),\ B(x_B,p)$에 대해

$$[OCB]=\frac{1}{2}\cdot p\cdot(x_B+x_C).$$

이미 $x_B=x_A+k\pi=\frac{k\pi}{3}+k\pi=\frac{4k\pi}{3}$이고 $x_C=\frac{2k\pi}{3}$이므로

$$x_B+x_C=\frac{4k\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}=k\pi.$$

따라서

$$[OCB]=\frac{1}{2}p\,(k\pi)=\frac{1}{2}\,(\sqrt{3})\,(k\pi)=\frac{\sqrt{3}k\pi}{2}.$$

(또는 주어진 식 정리로 $\frac{1}{2}p(x_B + x_C) = pk\pi/2$, 여기서 계산을 일치시켜도 됩니다.)

- 문제에서 주어진 넓이가 $\dfrac{5\pi}{3}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}k\pi}{2} = \frac{5\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

- 따라서

$$k + p = \frac{5\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3} = \frac{14\sqrt{3}}{9}.$$

정답: 보기 (3) $\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$.

문항 번호: 15

해설:
- 조건에 따라 삼차함수 $f(x)$는 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = x\,p(x)$로 쓸 수 있고, $p(x) = ax^2 + bx + c$는 이차다항식이며 최고차항 계수 $a > 0$이다.
- $g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|)\,dt$ 이므로 기본정리에 의해

$$g'(x) = |f(x)| - |x| = |x|\big(|p(x)| - 1\big).$$

따라서 $g'(x) = 0$ 의 해는 $x = 0$ 및 $p(x) = \pm 1$ 인 점들이다.
- (가)에서 서로 다른 실근의 개수가 4개라는 것은 $g'(x) = 0$ 이 서로 다른 실근으로 총 4개를 가짐을 의미하므로 $x = 0$ 외에 $p(x) = 1$ 또는 $p(x) = -1$ 의 해들이 합쳐서 3개여야 한다. 이차식 p는 각각의 수평선과 교차할 때 최대 두 해를 가지며, 문제 조건(나)에서 g가 $x = 2, 6$에서 극값을 가지므로 $x = 2, 6$은 $g'(x) = 0$ 이고 부호가 바뀌는 지점(횡단점)이어야 한다. 즉 $2, 6$은 $p(x) = \pm 1$의 해이다.
- p는 이차이므로 두 해는 축 $x = h = -\dfrac{b}{2a}$에 대해 대칭이다. 서로 다른 네 근을 $0, 2, 6$과 또 하나로 배치하려면 축이 적절히 맞아야 한다. 가능한 배치 가운데 문제의 모든 조건(최고차항 계수 양수, $2, 6$에서 횡단, 그리고 부호조건 $f(6) \times g(2) < 0$)을 만족시키는 유일한 배치는 다음과 같다.
- $p(0) = 1$ 이고 $p = 1$의 해가 $\{0, 6\}$, $p = -1$의 해가 $\{2, 4\}$ 인 경우. 이때 축은 $(0 + 6)/2 = 3$ 으로 일치한다.
- 이 배치에서 $p(x)$를 구하면

$$p(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1 \quad (a = \tfrac{1}{4} > 0).$$

구간 $[0, 2]$에서는 $|p(t)| < 1$ 이므로 $g'(t) = t(|p(t)| - 1) < 0$ 이고 따라서 $g(2) < 0$.
한편 $f(6) = 6p(6) = 6 > 0$ 이므로 $f(6) \times g(2) < 0$ 조건도 만족한다.
- 따라서 최종적으로

$$f(8) = 8\,p(8) = 8\Big(\tfrac{1}{4} \cdot 8^2 - \tfrac{3}{2} \cdot 8 + 1\Big) = 8(16 - 12 + 1) = 8 \cdot 5 = 40.$$

결론: 정답은 5번(40)입니다.

문항 번호: 16

해설: 주어진 점화식은 $a_{n+1} = na_n + 2$이고 초기값은 $a_1 = 1$입니다. 차례대로 대입하여 구하면 됩니다.

- $n = 1$일 때:

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 2 = 1 \cdot 1 + 2 = 3.$$

- $n = 2$일 때:

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8.$$

따라서 $a_3 = 8$입니다.

문항 번호: 17

해설: 주어진 도함수 $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$를 항별로 부정적분하면 원시함수 $f(x)$는

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x + 1)\, dx = x^3 + x^2 + x + C$$

(적분 상수 C는 아직 미정)입니다. 초기조건 $f(1) = 6$을 이용하여 C를 구하면

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + C = 1 + 1 + 1 + C = 3 + C = 6$$

이므로 $C = 3$입니다. 따라서 완전한 함수식은

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$$

이고, $x = 2$를 대입하면

$$f(2) = 2^3 + 2^2 + 2 + 3 = 8 + 4 + 2 + 3 = 17$$

따라서 $f(2) = 17$ 입니다.

문항 번호: 18

해설: 등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$입니다.

주어진 조건을 일반항에 대입하여 식을 세웁니다.
- $a_3 = a_1 + 2d = 6$ (식 1)
- $a_5 = a_1 + 4d,\ a_4 = a_1 + 3d$ 이므로
$2a_5 - a_4 = 2(a_1 + 4d) - (a_1 + 3d) = a_1 + 5d = 15$ (식 2)

식(2)에서 식(1)을 빼면

$$(a_1 + 5d) - (a_1 + 2d) = 3d = 9$$

이므로 $d = 3$입니다. 이를 식(1)에 대입하면

$$a_1 + 2 \cdot 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0.$$

따라서

$$a_{11} = a_1 + 10d = 0 + 10 \cdot 3 = 30.$$

정답: 30.

문항 번호: 19

해설:
도함수를 구하면
$f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x-a)$ 이므로 임계점은 $x=0,\ x=a$이다. 또한 이차도함수는
$f''(x) = 12x - 6a$ 이다.

각 임계점에서의 함수값을 계산하면

$$f(0) = 5a, \qquad f(a) = 2a^3 - 3a \cdot a^2 + 5a = -a^3 + 5a.$$

문제에서 "극솟값이 a"라고 했으므로 두 경우를 검토한다.

(1) $x=0$에서 극솟값인 경우: $f(0)=a$ 이므로 $5a = a \rightarrow a = 0.$
하지만 $a=0$이면 $f(x) = 2x^3$으로 단조증가하여 극값이 존재하지 않으므로 배제한다.

(2) $x=a$에서 극솟값인 경우: $f(a) = a$ 이므로

$$-a^3 + 5a = a \quad \Rightarrow \quad -a^3 + 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a(4-a^2) = 0,$$

따라서 $a = 0, \pm 2$. 이 가운데 $x=a$에서 극솟값이 되려면 $f''(a) = 12a - 6a = 6a > 0$이어야 하므로 $a > 0$인 값만 허용된다. 따라서 유효한 해는 $a=2$뿐이다($a=-2$는 $f''(a) < 0$로 극댓값, $a=0$은 앞과 동일하게 배제).

따라서 $a=2$일 때 다른 임계점 $x=0$에서의 값은

$$f(0) = 5a = 10$$

이므로 함수의 극댓값은 10이다.

문항 번호: 20

해설:
주어진 비에서 먼저 각도 θ에 대한 사인·코사인을 구하면 이후 닮음과 길이비를 이용해 (가),(나),(다)를 결정할 수 있습니다.

1) 코사인과 사인 구하기
주어진 비 $\overline{PB} : \overline{PC} : \overline{BC} = 7 : 5 : \sqrt{14}$ 에서 삼각형 BPC 에 대해 코사인법칙을 쓰면

$$\cos\theta = \frac{7^2 + 5^2 - (\sqrt{14})^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{60}{70} = \frac{6}{7}.$$

따라서

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta = \ 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{7}.$$

2) 닮음과 길이 관계로 (가) 구하기
치환으로 $\overline{PB} = 7k,\ \overline{PC} = 5k,\ \overline{AB} = l,\ \overline{CD} = 3l$ 로 두었습니다. 문제에서 원의 성질로 $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ 이므로

$$\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PA} = 7 : 5.$$

따라서 $\overline{PD} = 7t,\ \overline{PA} = 5t$ 라고 두면 직선상의 길이 관계로

$$\overline{AB} = \overline{PA} - \overline{PB} = 5t - 7k = l, \qquad \overline{CD} = \overline{PD} - \overline{PC} = 7t - 5k = 3l.$$

비 $AB : CD = 1 : 3$ 을 대입하면

$$5t - 7k : 7t - 5k = 1 : 3 \Longrightarrow 3(5t - 7k) = 7t - 5k.$$

이를 풀면 $t = 2k$. 그러므로

$$l = 5t - 7k = 5(2k) - 7k = 3k.$$

따라서 (가) = 3.

3) 닮음비로 (나) 구하기

닮음비 $\triangle BPC : \triangle DPA$ 는 대응변 PB:PD = $7 : 7t$ 이지만 $t = 2k$ 이므로 실제 비는 $PB : PD = 7k : 14k = 1 : 2$. 즉 닮음비가 $1 : (\text{나})$ 이므로 (나) = 2. 그러므로

$$\overline{BC} = \frac{1}{(\text{나})} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{13} = 2\sqrt{13}.$$

4) 외접원 반지름 (다) 구하기

삼각형 BPC 의 외접원 반지름 R 은 사인법칙에서

$$R = \frac{\overline{BC}}{2\sin\theta}.$$

여기에 $\overline{BC} = 2\sqrt{13}$ 과 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$ 를 대입하면

$$R = \frac{2\sqrt{13}}{2 \cdot (\sqrt{13}/7)} = 7.$$

따라서 (다) = 7.

결과적으로 $p = (\text{가}) = 3,\ q = (\text{나}) = 2,\ r = (\text{다}) = 7$ 이므로

$$p + q + r = 3 + 2 + 7 = 12.$$

문항 번호: 21

해설:
문제에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 일반형을

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

라 두면 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

이고

$$\frac{f(2x) - f(0)}{2x} = \frac{(2x)^3 + a(2x)^2 + b(2x) + c - c}{2x} = 4x^2 + 2ax + b.$$

따라서 주어진 부등식은 모든 실수 $x \neq 0$에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2} + x^2 - 2 \leq \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \leq x^4$$

가 되므로 이를 전개하면

$$\frac{3x^2 + 2ax + b}{2} + x^2 - 2 \leq 4x^2 + 2ax + b \leq x^4.$$

1) 왼쪽 부등식에 $x \to 0$의 극한을 취하면 상수항들에 대해

$$\frac{b}{2} - 2 \leq b$$

가 되어 $b \geq -4$를 얻는다.

2) 오른쪽 부등식은 x와 $-x$에 대해 더하면

$$(4x^2 + 2ax + b) + (4x^2 - 2ax + b) = 8x^2 + 2b \leq 2x^4$$

즉

$$4x^2 + b \le x^4 \quad (\text{모든 } x \ne 0).$$

여기서 $x^2 = 2$를 대입하면 $8 + b \le 4$가 되어 $b \le -4$. (1)과 합쳐서

$$b = -4.$$

3) 이제 오른쪽 부등식 $4x^2 + 2ax - 4 \le x^4$에 $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$를 대입하면

$$x = \sqrt{2}: \quad 4 + 2a\sqrt{2} \le 4 \Rightarrow a \le 0,$$

$$x = -\sqrt{2}: \quad 4 - 2a\sqrt{2} \le 4 \Rightarrow a \ge 0.$$

따라서 $a = 0$.

4) 따라서 도함수는

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3x^2 - 4$$

이고 원하는 값은

$$f'(10) = 3 \cdot 10^2 - 4 = 300 - 4 = 296.$$

정답: 296.

문항 번호: 22

해설:
- 점들을 다음과 같이 놓습니다: $A=(a,\log_2 a),\ B=(b,\log_2 b)$ $(a,b>0,\ a\neq b)$.
- 직선 $y=x$에 대한 투영과 대칭에 의해
- P는 A의 $y=x$에 대한 수선의 발이므로 좌표는 $P=\left(\frac{a+\log_2 a}{2},\frac{a+\log_2 a}{2}\right)$.
- Q는 B의 $y=x$에 대한 대칭이므로 좌표는 $Q=(\log_2 b,\ b)$.
- 문제에서 제시된 두 직선 AP와 BQ는 모두 기울기 -1인 형태 $y=-x+c$로 쓸 수 있고, 이때의 y절편은 해당 직선 위 임의의 점의 $x+y$값과 같습니다. 따라서

$$(\text{직선 AP의 y절편})=a+\log_2 a,\qquad (\text{직선 BQ의 y절편})=b+\log_2 b.$$

- 조건 (가)로부터

$$(a+\log_2 a)-(b+\log_2 b)=\frac{13}{2},$$

즉

$$(a-b)+(\log_2 a-\log_2 b)=\frac{13}{2}.$$

- 조건 (나)에서 직선 AB의 기울기가 $\frac{6}{7}$이므로

$$\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=\frac{6}{7},$$

따라서

$$\log_2 a-\log_2 b=\frac{6}{7}(a-b).$$

- 위 두식을 결합하면

$$(a-b)+\frac{6}{7}(a-b)=\frac{13}{2}\quad\Longrightarrow\quad\frac{13}{7}(a-b)=\frac{13}{2},$$

그래서 $a-b=\frac{7}{2}$. 이에 따라

$$\log_2 a-\log_2 b=\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{2}=3,$$

즉 $\dfrac{a}{b}=2^3=8$. 한 해로서 $a=4,\ b=\frac{1}{2}$를 취하면 좌표는

$$A=(4,2),\quad P=(3,3),\quad B=\left(\tfrac{1}{2},-1\right),\quad Q=(-1,\tfrac{1}{2}).$$

- 사각형 $APQB$는 밑변들이 서로 평행한 사다리꼴이며, 넓이를 구할 때 편리하게 높이와 두 평행변 길이를 구합니다.
- 두 직선의 y절편 차이가 문제에서 주어진 $\frac{13}{2}$이므로, 이 차이는 직선들의 형태가 $y=-x+c$인 점을 이용하면 사다리꼴의 높이(직선들 사이의 거리)에 대해

$$h=\frac{\text{y절편 차}}{\sqrt{2}}=\frac{13/2}{\sqrt{2}}=\frac{13}{2\sqrt{2}}.$$

- AP의 길이는 점 A에서 직선 $y=x$까지의 수선 거리로 계산하여

$$|AP|=\frac{|a-\log_2 a|}{\sqrt{2}}=\frac{4-2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

- BQ의 길이는 B에서 직선 $y=x$까지의 거리와 같으므로

$$|BQ|=\frac{|b-\log_2 b|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{\sqrt{2}}=\frac{3/2}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

- 사다리꼴의 넓이 공식에 따라

$$\text{넓이}=\frac{|AP|+|BQ|}{2}\times h=\frac{\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}}{2}\times\frac{13}{2\sqrt{2}}=\frac{65}{8}.$$

- 따라서 넓이는 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{65}{8}$이고, 서로소인 자연수 p,q에 대해 $p+q=8+65=73$.

정답: 73