제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}\right)^6$의 값은? [2점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

$(2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}})^6 = 2^{4-3}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+8}+4x}{x+6}$ 의 값은? [2점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

2+4

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 a_4 = 8,\ a_2 = 12$$

일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{2}{3}$　④ $\dfrac{5}{6}$　⑤ 1

$\frac{12}{r}\cdot 12r^2 = 8$　$r = \frac{1}{18}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x\le -2) \\ -2 & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [3점]

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

$4-2a=-2$　$2a=6$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

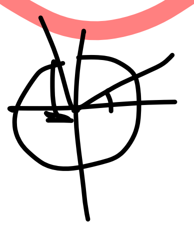
라 하자. $f(3)=0$, $f'(3)=2$일 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$g'(3)=2\cdot3f(3)+3^2\cdot f'(3)=18$

6. $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\frac{\sin^3\theta}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\cancel{\frac{1}{3}}$ ⑤ $\cancel{\frac{2}{3}}$



$-\frac{s^3}{s}=-s^2$

$s^2=\frac{1}{3}$

7. $\int_{-2}^{1}(t^2-1)\,dt+\int_{1}^{2}t^2\,dt$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$-3+\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=-3+\frac{16}{3}=\frac{7}{3}$

8. 상수 $m\,(m>1)$에 대하여 수직선 위의 세 점 $\mathrm{A}(\log_m 3)$, $\mathrm{B}(\log_m 6)$, $\mathrm{C}(\log_m 24)$이 있다. 선분 AB의 중점 P, 선분 BC의 중점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=6$일 때, $\log_2 m$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\log_m 8=\frac{3}{2}\log_m 2=6$

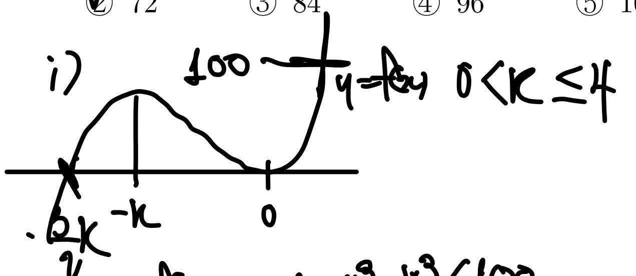
$\log_m 2=4$

9. 정수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=2x^3+3kx^2$$

이라 하자. 방정식 $f(x)=100$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 k에 대하여 $f'(2)$의 최댓값은? [4점]

① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108



$f(-k)=-2k^3+3k^3=k^3<100$

$f'(x)=6x^2+6kx$ $f'(2)=24+12k$

$=24+12\cdot 4$

$=24+48$

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_5$의 최댓값은? [4점]

모든 자연수 n에 대하여 $\lvert S_n\rvert=n^2$이다.

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 96

$a_1=1$ $S_n=\pm n^2$ $S_2=\pm 4$ $S_3=\pm 9$ $S_4=\pm 16$ $S_5=\pm 25$

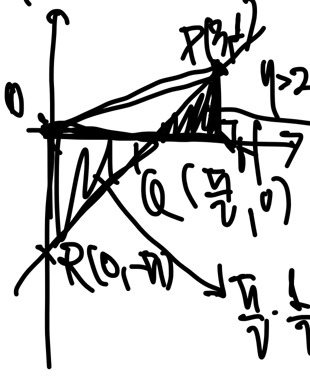
$a_5=41$

$1+13+41=55$

11. 곡선 $y=x^3-5x^2+5x+4$ 위의 점 P(3, 1)에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H이라 하자. 삼각형 PHQ의 넓이를 S_1, 삼각형 ROQ의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_2}{S_1}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 81 ② 64 ③ 49 ④ 36 ⑤ 25

$f'(x)=3x^2-10x+5$ $f'(3)=27-30+5=2$



$y=2(x-3)+1$

$S_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{25}{4}$

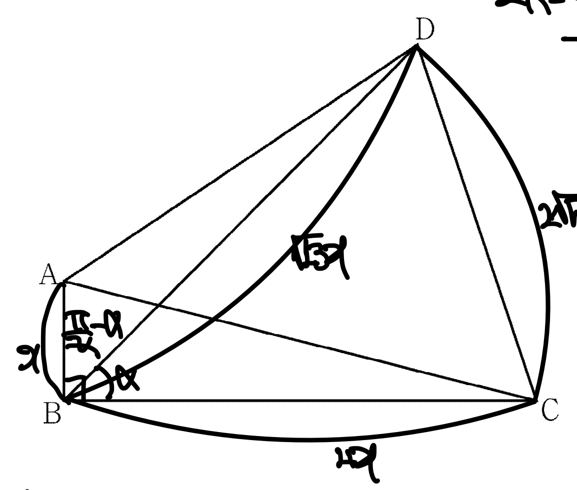
12. 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:4$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이다. 삼각형 ABD의 넓이는 6이고

$$\sin(\angle BCD):\sin(\angle BDC)=\sqrt{13}:4,\quad \overline{CD}=2\sqrt{5}$$

일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

① $\sqrt{65}$ ② $\frac{\sqrt{130}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{195}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{65}}{2}$ ⑤ $\sqrt{13}$

$2R=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{2}{\sqrt{13}}}=\sqrt{65}$



$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos\alpha\cdot\sqrt{13}x=6$ $x^2\cos\alpha\cdot\sqrt{13}=12$ $x^2=4$ $x=2$

$20=13x^2+16x^2-2\cdot\sqrt{13}x\cdot 4x\cdot\cos\alpha$

$=29x^2-2\cdot x^2\cdot 4\cdot\sqrt{13}\cos\alpha$

$=29x^2-2\cancel{x^2}\cdot 4\cdot\frac{12}{\cancel{x^2}}=29x^2-96$

$29x^2=116$ $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$

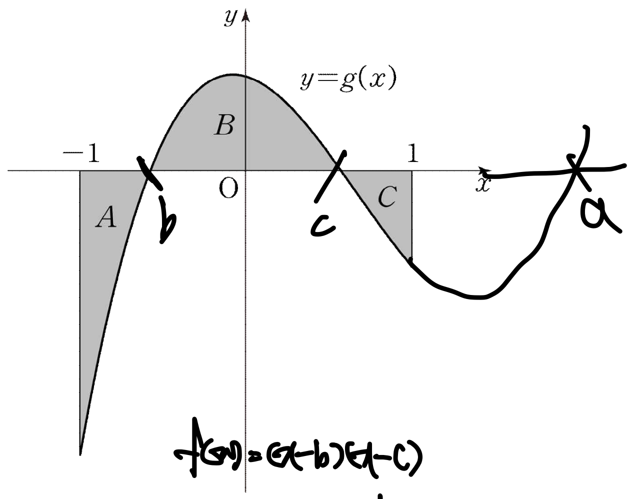
$\cos\alpha\sqrt{13}=3$

13. 최고차항의 계수가 1이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는 이차함수 $f(x)$와 $a>1$인 실수 a에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 함수 $g(x)$를 $g(x)=(x-a)f(x)$라 하자. 그림과 같이
곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=-1$으로 둘러싸인 영역을 A,
곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 영역을 B,
곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역을 C라 하자.
$a\,(a>1)$의 값에 관계없이

$$(A\text{의 넓이})+(C\text{의 넓이})=(B\text{의 넓이})$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

✓ ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{7}{12}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$



$f(x)=(x-b)(x-c)$

$g(x)=(x-a)f(x) \quad = x^2-\frac{1}{3}$

$=xf(x)-af(x)$

$\int_{-1}^{1} g = \int_{-1}^{1} x^3-(b+c)x^2+bcx\,dx - a\int_{-1}^{1}(x^2-(b+c)x+bc)\,dx$

$=-\frac{2(b+c)}{3}x^3\Big|_0^1-2a\left(\frac{1}{3}x^3+bcx\Big|_0^1\right)$

$0=-\frac{2}{3}(b+c)-\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{3}+bc\right) \qquad bc=-\frac{1}{3}$

$a\left(\frac{1}{3}+bc\right)=-(b+c)=0$

14. 첫째항이 양의 홀수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2^n & (a_n\geq 0) \\ a_n+2^n & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_6<0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 개수는? [4점]

① 18 ✓② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

1+1+1+1+16

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$(k\geq 0)$
$2k+1 - 2k-1 - 2k-5 - 2k-13 - 2k-29 - 2k-61$
$(k\geq 1) \quad (k\geq 3) \quad (k\geq 7) \quad 15\leq k\leq 30$
$-1+4 \quad 2k+8 \quad 2k+3 \quad 2k+3$
$3 \quad (k=3,4) \quad (k=3,4,5,6) \quad 2k-29$
$(k=0) \quad -5 \quad 2k-13$
$11 \quad 2k+19$
0

15. 두 실수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=-x(x-a)(x-b)$라 하자. 실수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\int_k^x \frac{|f(t)-f(k)|+f(t)-f(k)}{2}\,dt$$

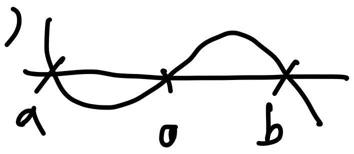
의 최댓값을 $h(k)$라 할 때, 함수 $h(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(a)=h(b)=\int_{-3}^{0}|f(x)|\,dx$
(나) 함수 $h(x)$는 $x=-4$에서 최대이다.

$f(-1)$의 값은? [4점]

① $\frac{33}{5}$ ② $\frac{38}{5}$ ③ $\frac{43}{5}$ ④ $\frac{48}{5}$ ⑤ $\frac{53}{5}$

i)



단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-4)+2=\log_2(x-1)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>4$

$4(x-4)=(x-1)$

$4x-16=x-1$

$3x=15$ ⑤

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2+4x+1$이고 $f(0)=2$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(2)-2=\left[3x^3+2x^2+x\right]_0^2$

$=24+8+2=34$

36

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_2+a_3=6,\quad a_{12}-a_9=1$$

$d=\frac{1}{3}$

일 때, $\sum_{n=1}^{6} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

$a_2=2$

$= 3(a_2+a_5)=3(2+2+\frac{1}{3}\cdot 3)=3\cdot 5=15$

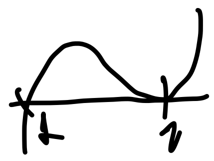
19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$는

$$x(t)=t^4-\frac{20}{3}t^3+16t^2-16t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

$v(t)=4t^3-20t^2+32t-16$

$=4(t^3-5t^2+8t-4)=4(t-1)(t^2-4t+4)$



$a(t)=12t^2-40t+32$

$12-40+32$

4

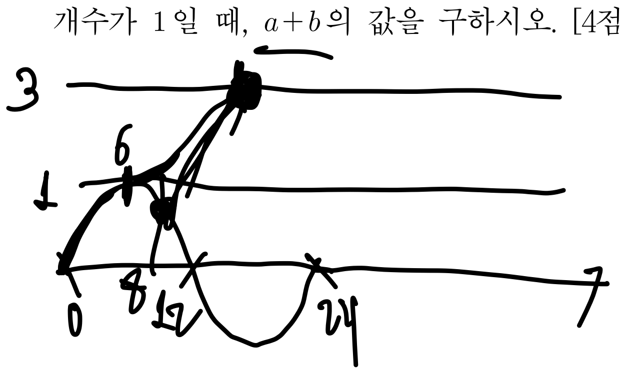
20. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{12} & (x\leq a)\\ \cos\frac{\pi x}{2}+b & (x>a)\end{cases}$$

주기=24

주기=4

라 하자. $0\leq t\leq 3$인 모든 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 8]$에서 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



$a=6$

$b=2$

8

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $f(0)=0$
>
> (나) $a \geq 0$이면 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-3)(f(x+2)+5)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

$f(x)=x(x-3)(x-b)$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-3)((x+2)(x-1)(x+2-b)+5)}{x(x-3)(x-b)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2(2-b)+5}{x(x-b)}=0$

$2b+1=0$

$-4+2b+5=0$

$b=-\frac{1}{2}$

$f(4)=4\cdot 1\cdot(4+\frac{1}{2})=4\cdot\frac{9}{2}=18$

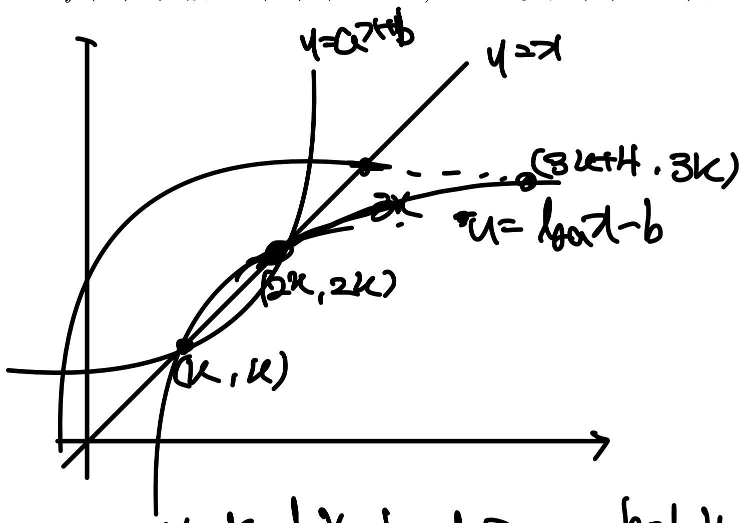
22. 두 상수 $a\,(a>1)$, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=a^{x+b},\quad g(x)=\log_a(x+4)-b$$

가 있다. 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표의 집합을 A, 구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표의 집합을 B라 할 때, 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $n(A)=2$
>
> (나) $A\cup B=\{k,\ 2k,\ 3k\}\ \ (k>0)$

$k+f(16)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]



$k=k=\log_a k-b=\log_a 2$ $\quad b=\log_a k-\log_a 2$

$2k=\log_a k-b+\log_a 2=\log_a 4$ $\quad =\log_a 2=4$

$3k=\log_a(8k+4)-b=\log_a 8$ $\quad a^4=2$

$=\log_a(8k+4)+\log_a 2-\log_a k$ $\quad a=2^{\frac{1}{4}}$

$\log_a(8+\frac{4}{k})=\log_a 4$ $\quad k=4$

$f(16)=a^{16+b}=a^{20}$

$=2^5=32$

$k+f(16)=36$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② $\frac{5}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 1

24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+1}{\cos^2 x}dx$ 의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{2}-2$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+1)\sec^2 x\,dx = [(\sin x+1)\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\cos x\,dx$

미 적

$\cos x$ $\tan x$

$= (\frac{\sqrt{2}}{2}+1) - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$

$= (\frac{\sqrt{2}}{2}+1) + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\sqrt{2}}{2}+1)+(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{3^n+a_n}=10$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① $\frac{8}{5}$ ② 2 ③ $\frac{12}{5}$ ④ $\frac{14}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

$a_n = 4^n \cdot \frac{1}{10}$ $\frac{16}{10}$

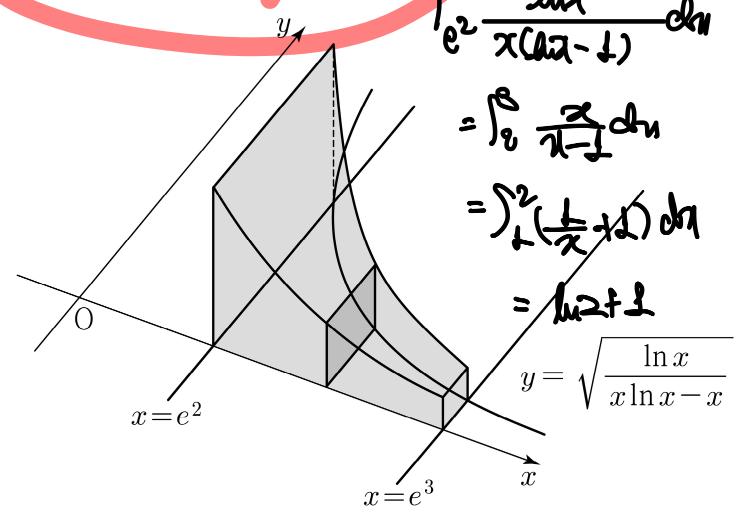
26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{\ln x}{x\ln x - x}}$ $(x>e)$와 x축 및 두 직선 $x=e^2$, $x=e^3$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

$\int_{e^2}^{e^3}\frac{\ln x}{x(\ln x-1)}dx$

$=\int_2^3 \frac{x}{x-1}dx$

$=\int_1^2 (\frac{1}{x}+1)dx$

$=\ln 2+1$



① $1+\ln 5$ ② $1+2\ln 2$ ③ $1+\ln 3$
④ $1+\ln 2$ ⑤ 1

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 상수 a에 대하여 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서

$$f\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2+ax\right)=e^{2x-3}$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 정의된 역함수 $g(x)$를 가질 때, $g'(1)+a$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{39}{4}$

$\frac{3}{2}a-\frac{9}{4}=\frac{21}{4}$

$\frac{2}{3}x^3-3x^2+ax = g(e^{2x-3})$

$=\frac{2}{3}x^2(x-\frac{9}{2})+ax$

$g'(1)=\frac{a}{2}-\frac{9}{4}$

$g'(e^{2x-3})\cdot 2e^{2x-3} = 2x^2-6x+a$

$g'(1)\cdot 2 = 2(\frac{9}{4})-6(\frac{3}{2})+a = -\frac{9}{2}+a>0$

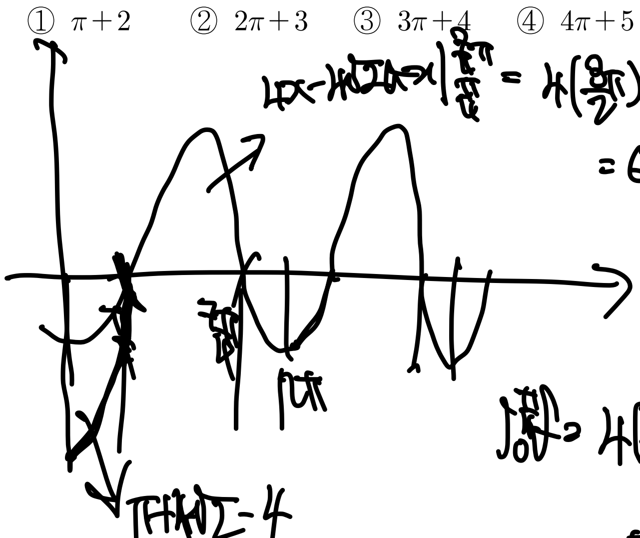
28. 함수 $f(x)=4-a\cos x\ (a>4)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)>0$이면 $g'(x)=f(x)$이고, $f(x)\le 0$이면 $g'(x)=kf(x)\ (k>0)$이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 최솟값 0을 갖는다.

$g(4\pi)$의 값은? (단, a와 k는 상수이다.) [4점]

$a=4\sqrt{2}$

① $\pi+2$ ② $2\pi+3$ ③ $3\pi+4$ ④ $4\pi+5$ ⑤ $5\pi+6$



$=6\pi-4$

$=\pi+4\sqrt{2}-4$

단답형

29. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(1)=-16$
>
> (나) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $f'(x)=\frac{3}{4}f(x)+\frac{x^3+2x}{6}f'\left(\frac{x^2+2}{3}\right)$이다.

$f(2)-f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

$\frac{3}{4}f(2)=-8$

$f'(1)=\frac{3}{4}f(1)+\frac{3}{6}f'(1)$

$-16=\frac{3}{4}f(1)-8$ $\quad f(1)=-\frac{32}{3}$

$f'(2)=\frac{3}{4}f(2)+\frac{8+4}{6}f'\left(\frac{4+2}{3}\right)$ $\quad \frac{3}{4}f(2)=-f'(2)$

$=\frac{3}{4}f(2)+2f'(2)$

$f''(x)=\frac{3}{4}f'(x)+\left(\frac{3x^2+2}{6}\right)f'\left(\frac{x^2+2}{3}\right)+f''\left(\frac{x^2+2}{3}\right)\cdot\left(\frac{x^3+2x}{6}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)$

30. 자연수 k에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2-\frac{2}{k}x+\frac{4}{k}$라 할 때,

$= \left(x-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{3}{k}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{4}{2^n}\right)-f\left(\frac{4}{2^{n-1}}\right)\right|=16-2f\left(\frac{1}{8}\right)$$

인 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f\left(\frac{4}{2^n}\right)-f\left(\frac{4}{2^n}\cdot 2\right)=\left(\frac{4}{2^n}-\frac{1}{k}\right)^2-\left(\frac{4}{2^n}\cdot 2-\frac{1}{k}\right)^2$

$=+\frac{16}{2^{2n}}-\frac{2}{k}\cdot\frac{8}{2^n}+\cancel{\frac{1}{k^2}}$

$-\left(\frac{64}{2^{2n}}-\frac{2}{k}\cdot\frac{16}{2^n}+\cancel{\frac{1}{k^2}}\right)$

$\frac{48}{2^{2n}}-\frac{2}{k}\cdot\frac{16}{2^n}$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.