2026학년도 미적분 N 모의평가 1회

정답 및 해설

이 시험지의 주제는 '항등식과 절대부등식'입니다.

문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점
23	④	2	29	97	4
24	②	3	30	14	4
25	⑤	3			
26	①	3			
27	④	3			
28	①	4			

〈문항별 난이도〉

23번~25번: 난이도 하

26번: 난이도 중

27번: 난이도 중~상

28번, 29번: 난이도 상

30번: 난이도 최상

23. ④

$$\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(\sin x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{\ln(\sin x+1)}\times\frac{4x}{\sin x}\right\}$$

$$=4$$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(\sin x+1)}=4$$

24. ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^4 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x)\times(\sec^2 x)\,dx$$

에서 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x)\times(\sec^2 x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x)\times(\tan^2 x+1)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{\sec^2 x\tan^2 x+\sec^2 x\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x\right]_0^1=2\sqrt{3}$$

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^4 x\,dx=2\sqrt{3}$$

25. ⑤

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n \times e^n}{n^2 e^n + \left(\frac{e}{2}\right)^n}$에서 분모, 분자를 모두 e^n으로 나누면 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2} = 3 \quad \left(\because \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\right)$$

이다. 따라서 구하는 극한의 값은

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{(a_n)^2 + 2n^3}{n^4}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(\left(\frac{a_n}{n^2}\right)^2 + \frac{2}{n}\right) = 9$$

이다.

$$\therefore \lim_{n \to \infty}\left(\frac{(a_n)^2 + 2n^3}{n^4}\right) = 9$$

26. ①

닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 곡선 $y=\sqrt{\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}}$과 y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로

하는 입체도형에 대하여 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때,

이 입체도형의 부피는 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}dx$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\cos x-\sin x+\sin x+2\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin x+2\cos x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}+1\right)dx$$

$$=\left[\ln|\sin x+\cos x|+x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

27. ④

조건에 의해 집합 $A=\left\{\cdots,\left(-\frac{3\pi}{2},1\right),\left(-\frac{\pi}{2},-1\right),\left(\frac{\pi}{2},1\right),\left(\frac{3\pi}{2},-1\right),\cdots\right\}$이고

$A=B$이므로

$f(1)=1$, $f(-1)=-1$이다.

함수 $h(x)=f(\sin x)$의 도함수는

$h'(x)=\cos x\times f'(\sin x)$이고

$h'(x)=\cos x\times f'(\sin x)$의 부호가 변할 때

$g'(x)=\cos x$의 부호가 변해야 하고,

$g'(x)=\cos x$의 부호가 변하지 않을 때

$h'(x)=\cos x\times f'(\sin x)$의 부호가 변하면 안된다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(\sin x)\geq 0$ 이거나 $f'(\sin x)\leq 0$ 이다.

1) $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수임을 고려하여

$h(x)=f(\sin x)$가 극댓값 -1을 갖고, 극솟값 1을 갖는 경우는 존재하지 않는다.

2) $h(x)=f(\sin x)$가 극댓값 1, 극댓값 -1을 가지면

$f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수임을 고려하여

반드시 -1보다 작은 극솟값이 존재한다. 따라서 모순이다.

3) $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수임을 고려하여

$h(x)=f(\sin x)$가 극솟값 1, 극솟값 -1을 갖는 경우는 존재하지 않는다.

이를 통해 함수 $h(x)=f(\sin x)$는 극댓값 1을 갖고, 극솟값-1을 갖는다

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(\sin x)\geq 0$ 이다.

$f(1)=1$, $f(-1)=-1$이므로 $f(x)=a(x^2-1)+x$라 하자. (단, a는 양수)

$f'(\sin x)=2a\sin x+1$이므로

$f'(\sin x)\geq 0$ 에서 $-1\geq -\frac{1}{2a}$이고

따라서 $a\leq \frac{1}{2}$이다.

$f(x)=a(x^2-1)+x$에서 $f(3)=8a+3$이므로

$8a+3\leq 7$에서 $f(3)=8a+3$의 최댓값은 7이다.

$\therefore$ ($f(3)$의 최댓값)$=7$

28. ①

$\dfrac{f(x)}{e} = \ln f(x) + f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt$에서 양변에 $x=0$을 대입하면

$\dfrac{f(0)}{e} = \ln f(0)$이다.

즉, $f(0)$는 두 함수 $y=\dfrac{x}{e}$와 $y=\ln x$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

이때 직선 $y=\dfrac{x}{e}$는 원점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선이다.

따라서 두 함수 $y=\dfrac{x}{e}$와 $y=\ln x$의 그래프의 교점은 점 $(e,1)$뿐이므로

$f(0)=e$이다.

또한, $\dfrac{f(x)}{e} = \ln f(x) + f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt$에서 양변에 $x=1$을 대입하면

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = F(x)$라 할 때, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = F(1) = \dfrac{1}{e}$이다.

다음으로 $\dfrac{f(x)}{e} = \ln f(x) + f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt$에서 양변에 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$를 곱하면,

$\dfrac{f'(x)}{e} = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \times \ln f(x) + f'(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt$이다.

양변을 닫힌구간 $[0,1]$만큼 정적분하면

$\left[\dfrac{f(x)}{e}\right]_0^1 = \left[\dfrac{\{\ln|f(x)|\}^2}{2}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 f'(x)F(x)dx$이고

$\displaystyle\int_0^1 f'(x)F(x)dx$를 부분적분하면

$\displaystyle\int_0^1 f'(x)F(x)dx = [f(x)F(x)]_0^1 - \int_0^1 (f(x))^2 dx$이다.

따라서 $\left[\frac{f(x)}{e}\right]_0^1=\left[\frac{\{\ln|f(x)|\}}{2}\right]_0^1+\int_0^1 f'(x)F(x)dx$에서

$\frac{1}{e}-1=-\frac{1}{2}+f(1)\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 (f(x))^2 dx$,

$\int_0^1 (f(x))^2 dx=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore \int_3^1 (f(x))^2 dx=\frac{1}{2}$

29. 97

1) n이 짝수일 때,

$\sin\frac{n}{2}\pi=0$이고 $\cos\frac{n}{2}\pi=1$ 이거나 $\cos\frac{n}{2}\pi=-1$이다.

즉, $\cos\frac{n}{2}\pi\neq0$이다.

따라서 $3a_{n+2}-a_n=0$이다.

2) n이 홀수일 때,

$\cos\frac{n}{2}\pi=0$이고 $\sin\frac{n}{2}\pi=1$ 이거나 $\sin\frac{n}{2}\pi=-1$이다.

즉, $\sin\frac{n}{2}\pi\neq0$이다.

따라서 $3a_{n+2}+a_n=0$

정리하면

n이 짝수일 때 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고

n이 홀수일 때 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)\times a_n\right)$에 대하여 $b_n=\tan\left(\frac{n\pi}{3}\right)\times a_n$라 할 때,

수열 b_n을 첫째항부터 나열하면

$b_1=\sqrt{3}a_1$ $\quad b_7=\sqrt{3}a_7$ $\quad\cdots\cdots$

$b_2=-\sqrt{3}a_2$ $\quad b_8=-\sqrt{3}a_8$

$b_3=0$ $\quad b_9=0$

$b_4=\sqrt{3}a_4$ $\quad b_{10}=\sqrt{3}a_{10}$

$b_5=-\sqrt{3}a_5$ $\quad b_{11}=-\sqrt{3}a_{11}$

$b_6=0$ $\quad b_{12}=0$

이다.

즉, 수열 $\{b_{6n-5}+b_{6n-1}\}$은 공비가 $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$인 등비수열이고

수열 $\{b_{6n-2}+b_{6n-4}\}$은 공비가 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$인 등비수열이다.

또한 모든 자연수 n에 대하여 $b_{6n}+b_{6n-3}=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_{6n-5}+b_{6n-4}+b_{6n-3}+b_{6n-2}+b_{6n-1}+b_{6n})=\frac{51\sqrt{3}}{28}$$ 이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{6n-5}+b_{6n-1})+\sum_{n=1}^{\infty}(b_{6n-4}+b_{6n-2})+\sum_{n=1}^{\infty}(b_{6n-3}+b_{6n})=\frac{\sqrt{3}a_1-\sqrt{3}a_5}{1+\frac{1}{27}}+\frac{\sqrt{3}a_4-\sqrt{3}a_2}{1-\frac{1}{27}}=\frac{51\sqrt{3}}{28}$$ 이고

$a_1=1$이므로 $a_5=\frac{1}{9}$이다.

또한 $3a_4=a_2$임을 통해 위 등식에서 곧, $a_4=-\frac{13}{28}$임을 얻는다.

$\therefore a_3\times a_4=\frac{13}{84}=\frac{q}{p},\ p+q=97$

30. 14

먼저, $h(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+4}\right|$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $h(x)=\left|\dfrac{x}{x^2+4}\right|\geq 0$이고

$\left|\displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} g(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)}\left|\dfrac{t}{t^2+4}\right|dt$에서

$0 \leq \left|\displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} g(t)dt\right| \leq \displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)}\left|\dfrac{t}{t^2+4}\right|dt$ 이므로

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq f(x)$이다.

또한 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq\left|\dfrac{x}{x^2+4}\right|$,

즉 $g(x)\geq h(x)$이므로 모든 실수 x에 대하여

$0\leq h(x)\leq g(x)\leq f(x)$임이 성립한다. $\cdots$ ①

따라서 $a>0$이다.

따라서 $\left|\displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} g(t)dt\right|=\displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} g(t)dt$이고

$\left|\displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} g(t)dt\right|\leq\displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} h(t)dt$에서

$\displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)}(g(t)-h(t))dt\leq 0$이다.

①에 의해 $g(x)-h(x) \geq 0$, $g(x) \leq f(x)$ 이므로

$\int_{g(x)}^{f(x)}(g(t)-h(t))dt \leq 0$이 성립하기 위해서는 $\int_{g(x)}^{f(x)}(g(t)-h(t))dt=0$이어야 한다.

$\int_{g(x)}^{f(x)}(g(t)-h(t))dt=0$의 뜻은 함수 $y=g(x)-h(x)$를

닫힌구간 $[g(x), f(x)]$만큼 정적분 한 것의 값이 0이라는 것이다. ⋯ ②

즉, 위 등식이 성립하기 위해서는 $g(x)=h(x)$ 이거나 $g(x)=f(x)$이다.

그런데 $a>0$이고 $0 \leq h(x) \leq g(x) \leq f(x)$에서 <u>$0 \leq h(x) \leq f(x)$이고</u>

열린구간 $(-\infty, 0)$에서 $\int_{g(x)}^{f(x)}(g(t)-h(t))dt=0$이 성립하므로

열린구간 $(-\infty, 0)$에서 $g(x)=h(x)$이라면 반드시 열린구간 $(0, \infty)$에서

$g(x)=h(x)$이다. ($\therefore x \to -\infty, f(x) \to \infty$ / $x \to -\infty, h(x) \to 0$)

따라서 $\lim_{x\to\infty}(g(x)\times g(-x))=0$이 된다.

즉, 조건에 모순이다.

따라서 열린구간 $(-\infty, 0)$ $g(x)=f(x)$이다.

만약 열린구간 $(0, \infty)$에서 $g(x)=f(x)$이면 $\lim_{x\to\infty}g(x)$의 값이 <u>존재하지 않으므로</u>

조건에 모순이다.

즉, $x \to \infty$ 일 때 $g(x)=h(x)$이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $f(x)$에서 $h(x)$로 바뀌는 순간이

열린구간 $(0,\ \infty)$에 존재한다. $\cdots$ ③

조건에 의해 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)\times g(-x))=\dfrac{3}{25}$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)\times g(-x))=\lim\limits_{x\to\infty}(h(x)\times f(-x))$이고

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\times h(-x))=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\times h(x))$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\times h(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x(ax+b)}{x^2+4}\right)=\dfrac{3}{25}$이므로

곧, $a=\dfrac{3}{25}$임을 얻는다.

함수 $g(x)$는 연속이고 ③에 의해

$f(k)=h(k),\ f'(k)=h'(k)$ 인 양수 k가 존재한다. $(\because h(x)\le f(x))$ $\cdots$ ④

또한 열린구간 $(k,\ \infty)$에서 $g(x)=h(x)$이기 위해서는 ②에 의해

$(k,\ \infty)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le x$이다. $\cdots$ ⑤

즉, $f(k)\le k$이다.

④에 의해 $f'(k)=\frac{3}{25}=h'(1)$이므로

곧, $k=1$임을 얻는다.

또한 ④에 의해

$f(k)=h(k)=h(1)=\frac{1}{5}$이므로

$f(1)=\frac{3}{25}+b=\frac{1}{5}$에서

곧, $b=\frac{2}{25}$임을 얻는다.

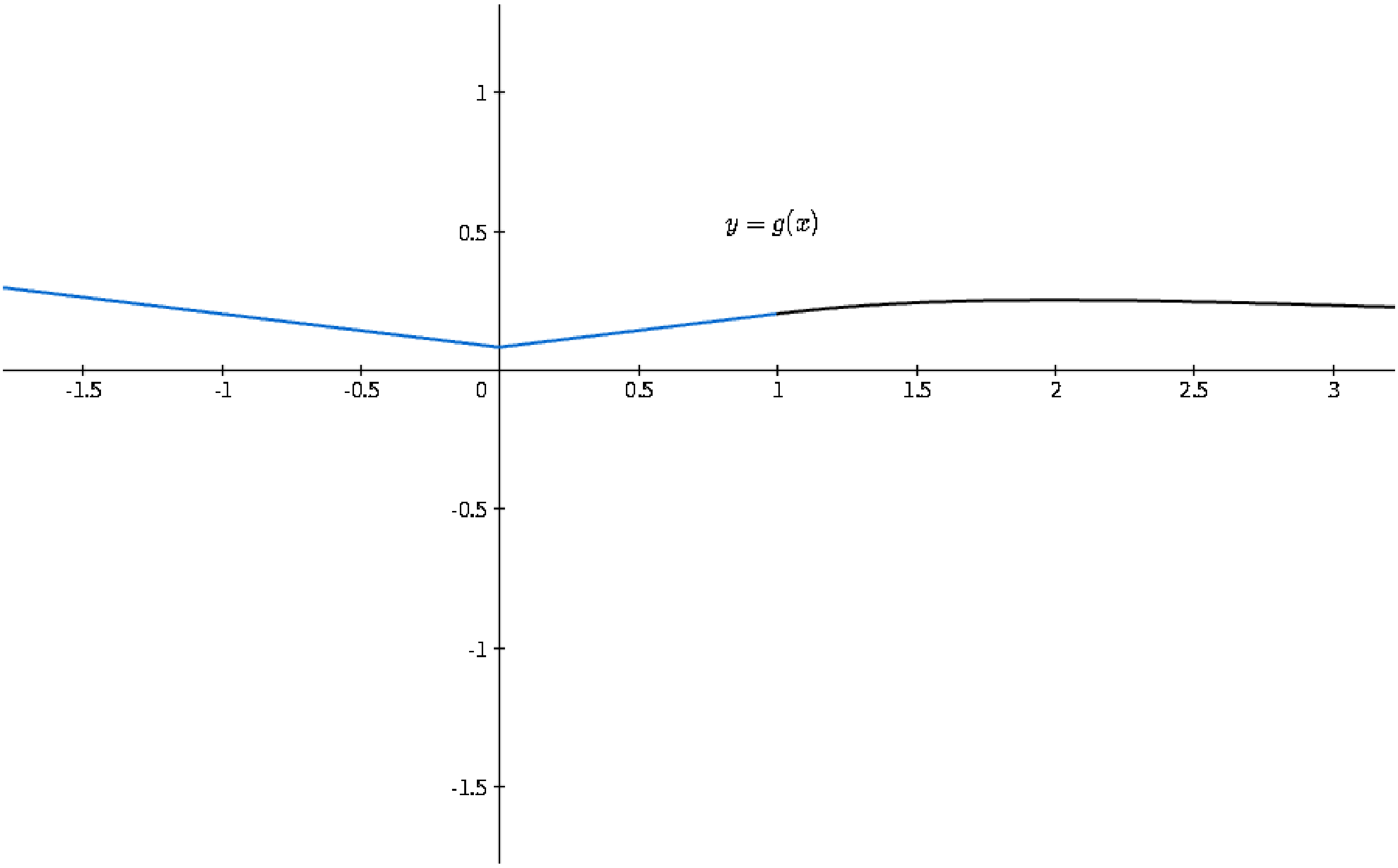
(또한 $f(1)<1$이므로 ⑤가 성립함을 알 수 있다.)

위를 통해 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{3}{25}|x|+\frac{2}{25} & (x\le 1)\\ h(x) & (x>1)\end{cases}$$

$$\therefore 100\times g(-4)\times g(2)=100\times\frac{14}{25}\times\frac{1}{4}=14$$

+) 함수 $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



+) $f(k) \le k$임을 통해 가능한 양수 k의 범위는 $\frac{3}{25}k+\frac{2}{25} \le k$에서 $\frac{1}{11} \le k$임을 알 수 있다.