제 2 교시

2026학년도 Prologue 모의고사 1회 문제지

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

마음대로 되는대로 찬란함에 주의

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Midori (오르비 Mn04)

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $2^{\log_4 81} \times 3^{\log_9 16}$의 값은? [2점]

① 9　② 18　③ 27　④ 36　⑤ 45

$2^{\log_2 9} \times 3^{\log_3 4} = 9 \times 4 = 36$

2. 함수 $f(x) = x^3 - x - 1$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(1) = 2$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 3, \quad a_5 - a_4 = 6a_3$$

을 만족시킬 때, a_3의 값은? [3점]

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

$r^2 - r = 6$　$r = 3$
$3 \times 3^2 = 27$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < a) \\ -x + 8 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

$a^2 + a = -a + 8$
$a^2 + 2a - 8 = 0$
$a = 2$

5. 점 $P(-1,\ 2)$에 대하여 x축의 양의 방향을 시초선으로 하는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\tan\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

$\sin\theta$

① $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\tan\theta=-2$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\times -2=\frac{-4\sqrt{5}}{5}$

6. 두 양수 a, b가

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x}=4a$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x+a-b^2}{x(\sqrt{x+a}+b)}=4a$

$a=b^2$, $\frac{1}{2b}=4a$ ∴ $b=\frac{1}{2}$ $a=\frac{1}{4}$

$a+b=\frac{3}{4}$

7. $0<x<2\pi$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos x+a,\ \ g(x)=|\cos x-b|$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 오직 한 점에서만 만나도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$a-1=b+1$, $a-b=2$

8. 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여

$$\int_{-1}^{1}(x+1)f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx+6$$

일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

$\frac{2}{3}a=6$, $a=9$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{7}na_n=50,\quad \sum_{n=1}^{7}S_n=190$$

일 때, S_7의 값은? [4점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

$a_1+2a_2+\cdots+7a_7=50$

$a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+\cdots+a_7)$

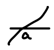
$=7a_1+6a_2+\cdots+a_7=190$

a_1 7개
a_2 6개
$\vdots$
a_7 1개

$8(\underbrace{a_1+\cdots+a_7}_{S_7})=240$. $S_7=30$

10. 실수 전체의 집합에서 증가하는 다항함수 $f(x)$가 상수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a+4)$의 값은? [4점]

> 모든 실수 x에 대하여
>
> $f'(x)=\frac{9}{7}(x-3)(x-f(2))$이고 $\int_a^x f(t)dt \geq 0$이다.
>
> $f(2)=3$



$f(a)=0$

① $\frac{36}{7}$ ② $\frac{40}{7}$ ③ $\frac{44}{7}$ ④ $\frac{48}{7}$ ⑤ $\frac{52}{7}$

$f'(x)=\frac{9}{7}(x-3)^2$

$f(x)=\frac{3}{7}(x-3)^3+\frac{24}{7}$, $f(a)=0$ … $(a-3)^3=-8$, $a=1$

$f(5)=\frac{24+24}{7}=\frac{48}{7}$

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가

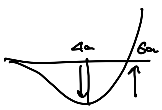
$$x(t) = t^3 - 6at^2 \quad (a\text{는 양의 실수})$$

이다. 점 P의 가속도가 0이 되는 시각을 $f(a)$, 시각 $t=0$에서 $t=3f(a)$까지 점 P가 이동한 거리를 $g(a)$라 할 때, $f(3)+g(1)$의 값은? [4점]

① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

$v(t) = 3t^2 - 12at$

$a(t) = 6t - 12a$ ··· $f(a) = 2a$



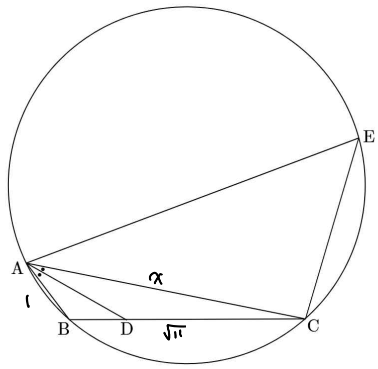
$x(4a) = -32a^3$

$g(a) = 64a^3$

역도함수의 함숫값 차

$f(3)=6$, $g(1)=64$ ··· $6+64=70$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\sin(\angle BAC) = \frac{\sqrt{7}}{4}$인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하고, 각 BAC를 이등분하는 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 원 O의 넓이가 $\frac{44}{7}\pi$이고, 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 E가 $\overline{CD}=\overline{CE}$를 만족시킬 때, $\frac{\overline{AC}}{\cos(\angle EAC)}$의 값은? (단, $\angle BAC < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

$\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$, $\overline{BC} = \sqrt{11}$

$\overline{AC} = x$

··· $x^2+1-2x\cdot\frac{3}{4} = 11$, $2x^2-3x-20=0$

$\frac{1}{2} \quad -\frac{4}{5}$

$x = 4$

$\overline{CE} = \overline{CD} = \frac{4\sqrt{11}}{5}$, $\sin(\angle EAC) = \frac{\sqrt{7}}{5}$

$\cos(\angle EAC) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\therefore \frac{4}{\frac{3\sqrt{2}}{5}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

첫째항과 공차가 각각 자연수

13. 모든 항이 자연수이고 $a_3 = b_3$인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 있다. 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때,

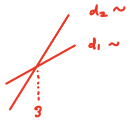
$a_1 + \sum_{n=1}^{10} c_n$의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$c_n = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}$$ 이다. $c_n = \begin{cases} a_n & (a_n \ge b_n) \\ b_n & (a_n \le b_n) \end{cases}$

(나) $c_6 - c_1 = b_5 = 11$

① 158 ② 162 ③ 166 ④ 170 ⑤ 174



c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6

a_3-2d_1 a_3-d_1 a_3 a_3+d_2 a_3+2d_2 a_3+3d_2

$2d_1 + 3d_2 = 11$, $d_1 \le d_2$ ($d_1 = d_2$ 이면 공차 $\frac{11}{5}$ (X))

1 3

a_3-2 a_3-1 a_3 a_3+3 $\underbrace{a_3+6}_{= b_5}$ a_3+9

-1 2 5 8 11

$\| b_1$ (X)

$a_3 + 6 = a_5$

3 6 9 12 15 ⋯

7 8 9 10 11 ⋯

$a_n = 3n$. $b_n = n+6$

$3 + 3b_2 + 7a_7$

$= 3 + 24 + 147 = 174$

14. $f(0) = 0$이고 $f'(2) \ge 0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 상수 $k(k > 2)$와 모든 실수 x에 대하여

$(g(x) - k)(g(x) - f(x)) = 0$이다. $g(x) = \begin{cases} f(x) & (?) \\ k & (?) \end{cases}$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{g(0)+g(1)}{2} \le g(n-1) \le \frac{g(2)+g(3)}{2}$$ 이다. $g(0) = g(1)$, $g(2) = g(3)$

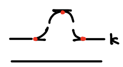
$\int_0^5 g(x)dx = 10$일 때, $k + g(-1)$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{2}$ ② $\frac{39}{2}$ ③ $\frac{41}{2}$ ④ $\frac{43}{2}$ ⑤ $\frac{45}{2}$

$g(0) = g(2)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}$ $g(n-1) = k$

$g(x) = f(x)$인 열린구간 존재 X



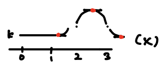
$\therefore \int_0^5 g(x)dx = \int_0^5 k\,dx = 5k = 10$, $k = 2$ (X)

* 미분가능한 함수에서 두 함숫값이 서로 같을 경우, 롤의 정리를 생각해보자.

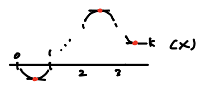
$f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f'(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 최대 2이다.

$g(0) < g(2)$

$\therefore$ $g(0) = k$ 이면 $g(2) = f(2)$



$g(0) < k < g(2)$ 이면 $g(0) = g(1) = f(0)$, $g(2) = g(3) = f(2)$



$g(2) = k$.

$f'(2) > 0$ ⋯ (X) $f'(2) = 0$.

$f(x) = x(x-1)(ax+b)$

$f'(2) = 3(2a+b) + 2a = 0$, $b = -\frac{8}{3}a$

$f(x) = a\,x(x-1)(x-\frac{8}{3})$

$= a(x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{8}{3}x)$, $k = -\frac{4}{3}a$

$\therefore \int_0^5 g(x)dx = \int_0^2 a(x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{8}{3}x)dx + \int_2^5 -\frac{4}{3}a\,dx$

$= a(\frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2)\Big|_0^2 + (-\frac{4}{3}ax)\Big|_2^5$

$= a(4 - \frac{88}{9} + \frac{16}{3}) - 4a$

$= -\frac{40}{9}a = 10$, $a = -\frac{9}{4}$ $k = 3$

$g(-1) = f(-1) = -\frac{22}{3}a = \frac{33}{2}$

$\therefore 3 + \frac{33}{2} = \frac{39}{2}$

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> (가) $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{n+3} = a_n$이다.
>
> (나) $n = 1$, 2일 때, $a_{n+1} = 2^{a_n} + a_n^2$이다.

$\sum_{i=1}^{15} \sin \frac{a_i}{2}\pi = 5$가 되도록 하는 20 이하의 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 50 ② 53 ③ 56 ④ 59 ⑤ 62

$\sum_{i=1}^{3} \sin \frac{a_i}{2}\pi = 1$

k가 짝수이면 $\frac{a_i}{2}$ = 정수 … $\sum_{i=1}^{3} \sin \frac{a_i}{2}\pi = 0$

k는 홀수

1 3 17 … ok.

3 17 $2^{17}+289$ … ok.

5

⋮

$(4p-3)^2 = 16p^2 - 24p + 9$ … 나머지 1

$(4p-1)^2 = 16p^2 - 8p + 1$ … 나머지 1

$k = 4p-3$ ($p \geq 2$인 정수) 이면 a_1, a_2, a_3을 4로 나눈 나머지는
1 1 1 … $\sum_{i=1}^{3} \sin \frac{a_i}{2}\pi = 3$ (×)

$k = 4p-1$ 이면 a_1, a_2, a_3을 4로 나눈 나머지는
3 1 1 … $\sum_{i=1}^{3} \sin \frac{a_i}{2}\pi = 1$ (○)

$k=1$ 이면 $a_2 = 3$ 이므로 1 3 1 … 성립.

∴ $k = 1, 3, 7, 11, 15, 19$.

$1+3+7+11+15+19 = 56$

단답형

$a^{\frac{1}{4}}$ 아님!!

$a^{\frac{1}{8}}, -a^{\frac{1}{8}}$ $a^{\frac{1}{8}}, -a^{\frac{1}{8}}$

16. 양수 a에 대하여 $\sqrt{a}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 $-\sqrt{2}$일 때, a의 값을 구하시오. [3점]

$-a^{\frac{1}{4}} = -\sqrt{2}$, $a = \boxed{4}$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = x^2 - 2x + 1$이고 $f(0) = 5$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 5$

$f(3) = \cancel{9-9} + 3 + 5 = \boxed{8}$

18. 1이 아닌 세 양수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{12} = \frac{\log_c a}{18} = k$$

를 만족시킬 때, $\log_b a$의 값을 구하시오. [3점]

$a^k = b$

$b^{12k} = a^{12k^2} = c$

$c^{18k} = a^{6^3k^3} = a$ ... $k = \frac{1}{6}$

$\log_b a = \frac{1}{k} = \boxed{6}$

19. x에 대한 방정식 $2x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 6x + k = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

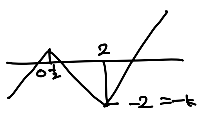
$6x^2 - 15x + 6 = 0$

$3(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$\frac{1}{2} \quad -2$

$x = \frac{1}{2}, \ 2$

$2x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 6x = -k$



$-2 = -k$ $k = \boxed{2}$

20. 함수 $f(x) = x^2 - 12x + 30$과 실수 t에 대하여 함수

$(x-6)^2 - 6$

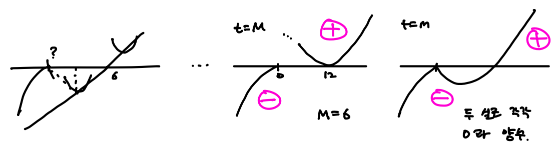
$$g(x) = \begin{cases} -x^5 - x^3 & (x \le 0) \\ \int_0^x (f(s-t)+t)\,ds & (x > 0) \end{cases}$$

도함수 부호가 1번만 변함

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 음수 t의 최댓값을 M, 양수 t의 최솟값을 m이라 할 때, $M^2 + m^2$의 값을 구하시오. [4점]

$$g'(x) = \begin{cases} -5x^4 - 3x^2 & (x < 0) \\ f(x-t) + t & (x > 0) \end{cases}$$

(도함수가 일반적으로 $x=0$에서 정의되지 않음을 유의할 것)



$t > -6$일 때, $t^2 + 13t + 30 = 0$

$(t+3)(t+10) = 0$ $t = -3$

... $m = -3$, $M = 6$. $9 + 36 = \boxed{45}$

21. 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^{x+a},\ g(x)=x^2-2x+2$$

가 있다. x에 대한 방정식

$$g(f(x)+f(-x)-8)=g(f(-x))$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a에 대하여 모든 4^a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

$f(x)=8 \cdots x=3-a$

$f(x)+2f(-x)-8=2$

$f(x)+2f(-x)-10=0 \cdots$ (※)

$f(x)+2f(-x) \geq 2\sqrt{2^{2a+1}}$ (산술기하평균)

(1) $2^{2a+1}<25 \cdots$ (※) 서로 다른 실근 2개

$f(3-a)+2f(a-3)-10=0$

$2^{2a-2}-2=0$, $4^a=8$ (전체 만족)

(2) $2^{2a+1}=25 \cdots$ (※) 중근

$f(3-a)+2f(a-3)-10\neq 0$

$a\neq\frac{3}{2}$. 전체 만족. $4^a=\frac{25}{2}$.

$\therefore 8\times\frac{25}{2}=\boxed{100}$

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가

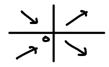
일반항이 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$4 \quad -2 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad \cdots$

(가) 방정식 $f'(x)=0$의 실근은 모두 정수이다.

(나) 함수 $f(x)$에 대하여

$$a_n\times f(a_n)\times f'(a_n)\leq 0$$



을 만족시키는 자연수 n은 <u>존재하지 않는다.</u>

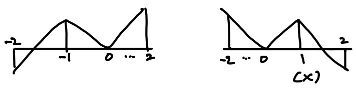
$f'(0)=0$, $x=0$ 극대 또는 극소

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)\times f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$, $f(-2)+f(2)=0$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(-2)\neq 0 \cdots f(-2)>0 \quad f(2)<0$

$f(-2)<0 \quad f(2)>0$

(1) $x=0$ 극소



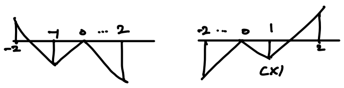
$f'(x)=4x(x+1)(x-a)$, $a\leq -3$

$f(x)=x^4+\frac{4(1-a)}{3}x^3-2ax^2+c$, $c\geq 0$

$f(-2)+f(2)=32-16a+2c=0$

$c=8a-16<0$ (X)

(2) $x=0$ 극대



$a\geq 2\ (a\neq 4)$, $c\leq 0$

$c=8a-16\geq 0 \cdots a=2$, $c=0$

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2$

$f(6)=36(36-8-4)$

$=36\times 24=144+720=\boxed{864}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 60 ② 120 ③ 180 ④ 240 ⑤ 300

$_6C_2 \times 2^4 = 15 \times 16 = 240$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{8}$$

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$P(B) = P(A\cup B) - P(A) + P(A\cap B)$

$= \frac{5}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

25. 이산확률변수 X가 갖는 값은 1부터 5까지의 정수이고, 두 양수 a, b에 대하여 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} a & (x\text{가 홀수인 경우}) \\ b & (x\text{가 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $\mathrm{V}(X)=\frac{5}{2}$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{20}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{3}{10}$　⑤ $\frac{7}{20}$

$3a+2b=1$

$E(X) = 9a+6b = 3$, $E(X^2) = 35a+20b$

$35a+20b-9=\frac{5}{2}$

$35a+20b=\frac{23}{2}$

$30a+20b=10$

$5a=\frac{3}{2}$

$a=\frac{3}{10}$　$b=\frac{1}{20}$　… $\frac{3}{10}+\frac{1}{20}=\frac{7}{20}$

26. 숫자 1, 2, 3, 4가 한 면에 하나씩 적힌 정사면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 두 번 던져 나온 두 눈의 수의 합을 기록한다.

s

이 시행을 3번 반복하여 기록한 세 수의 곱이 140일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{256}$　② $\frac{3}{128}$　③ $\frac{9}{256}$　④ $\frac{3}{64}$　⑤ $\frac{15}{256}$

$140 = 2^2\times5\times7$

$2\le s\le 8$ … 4, 5, 7

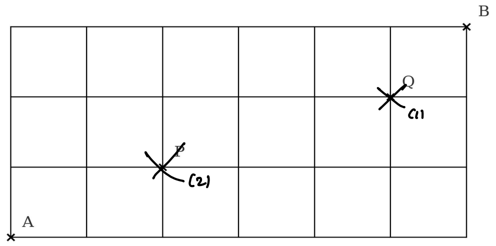
$\frac{3}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{2}{16}$

$3!\times\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}$

$=\frac{9}{256}$

27. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 갈 때, P지점과 Q지점 중 한 지점만을 거쳐서 가는 경우의 수는? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39



(1) $3 \times \left(\frac{4!}{2!2!} + 1\right) = 21$

(2) $2 \times \left(3 + \frac{4!}{2!2!}\right) = 18$

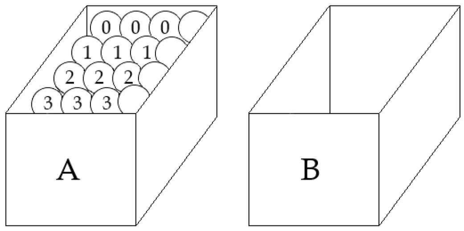
$\therefore 21 + 18 = 39$

28. 두 상자 A, B가 있다. 상자 A에는 숫자 0, 1, 2, 3이 적힌 공이 각각 3개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 두 상자 A, B와 3개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전 세 개를 동시에 던져 $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$
> 앞면이 나온 동전의 개수가 $k(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$이면
> 상자 A에 있는 숫자 k가 적힌 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 3번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 6일 때, 두 번째 시행의 결과 상자 B에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 3일 확률은? [4점]

① $\frac{5}{21}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{8}{21}$ ⑤ $\frac{3}{7}$



0, 3, 3
1, 2, 3
2, 2, 2

$\cdots \frac{\frac{3!}{2!}}{8^3} + \frac{3^2 \times 3!}{8^3} + \frac{3^3}{8^3}$

$= \frac{3 + 54 + 27}{8^3} = \frac{84}{8^3}$

0, 3, $[3]$
1, 2, $[3]$

$\cdots \frac{\frac{3!}{2!} - 1}{8^3} + \frac{3^2 \times (3! - 4)}{8^3}$

$= \frac{2 + 18}{8^3} = \frac{20}{8^3}$

$\therefore \frac{\frac{20}{8^3}}{\frac{84}{8^3}} = \frac{5}{21}$

단답형

29. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여
> $\mathrm{P}(X \le 4-x) \le \mathrm{P}(X \ge x+10) \le \mathrm{P}(X \le 4)$ $m=1$
> $m \ge 1$ $m \le 1$
> 이다.
> (나) $\mathrm{P}(X \ge 9)+\mathrm{P}(Z \le 3)=1$ $\frac{8}{\sigma}=3,\quad \sigma=\frac{8}{3}$
> (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.)

확률변수 $Y=3X-4$에 대하여 $\mathrm{P}(16 \le Y \le 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 a일 때, $1000\times a$의 값을 구하시오. (단, σ는 양수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.192
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477

$P(16 \le 3X-4 \le 20)$

$= P(\frac{20}{3} \le X \le 8)$

$= P(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{3}{2})$

$= 0.192 + 0.433 = 0.625$ $\boxed{625}$

30. 집합 $X=\{\overset{2^1}{2},\ \overset{2^2}{4},\ \overset{2^3}{8},\ \overset{2^4}{16},\ \overset{2^5}{32}\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $\sqrt[3]{f(2)\times f(4)\times f(8)}$ 의 값은 자연수이다. 지수 합 3의 배수
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

3 … $(2^1\ 2^1\ 2^1)$

6 … $(2^1\ 2^1\ 2^4)$ $(2^1\ 2^2\ 2^3)$

$(2^2\ 2^2\ 2^2)$

9 … $(2^1\ 2^3\ 2^5)$ $(2^1\ 2^4\ 2^4)$

$(2^2\ 2^2\ 2^5)$ $(2^2\ 2^3\ 2^4)$

$(2^3\ 2^3\ 2^3)$

12 … $(2^2\ 2^5\ 2^5)$ $(2^3\ 2^4\ 2^5)$

$(2^4\ 2^4\ 2^4)$

15 … $(2^5\ 2^5\ 2^5)$

$f(2),\ f(4),\ f(8)$

… 전부 같음

… 2개만 서로 같음

… 전부 서로 다름

$\underset{1}{5}\times\underset{2}{1}\times\underset{3}{{}_4\mathrm{P}_2} + \underset{1}{4}\times\underset{2}{\frac{3!}{2!}}\times\underset{3}{(2\times3\times2+3)}$

$+\underset{1}{4}\times\underset{2}{3!}\times\underset{3}{{}_3\Pi_2}$

$= 216 + 180 + 60 = \boxed{456}$

1 : $f(2),\ f(4),\ f(8)$ 가짓수

2 : $f(2),\ f(4),\ f(8)$ 배열 가짓수

3 : $f(16),\ f(32)$ 가짓수

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-n\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln(t^2+t),\ \ y=\frac{1}{t^2+1}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

$\left.\frac{\frac{-2t}{(t^2+1)^2}}{\frac{2t+1}{t^2+t}}\right|_{t=1}=\frac{\frac{-2}{4}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}$

25. 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\tan x = \lim_{x\to 0} g(x)\cot x = \frac{1}{3}$$

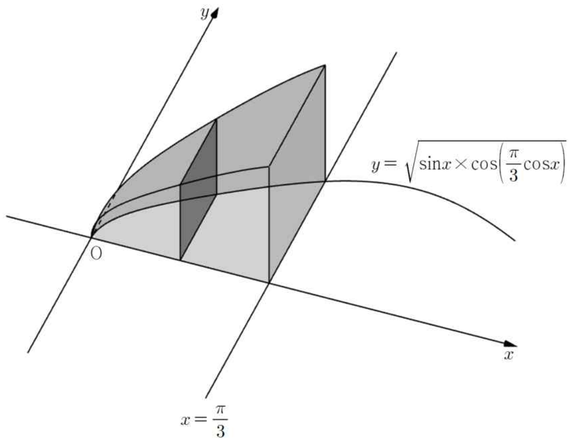
$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-x)$ $\frac{1}{3}x$

을 만족시킨다. 두 직선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

$$\frac{\frac{1}{3}-(-\frac{1}{2})}{1+(\frac{1}{3})(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sin x\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos x\right)}$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{3}{2\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ② $\frac{3}{2\pi}(\sqrt{3}-1)$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$
④ $\frac{3}{2\pi}(\sqrt{3}+1)$ ⑤ $\frac{3}{2\pi}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cos x\right)dx$$

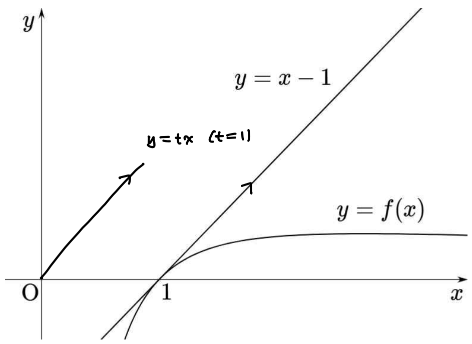
$-\cos x = t$
$\sin x\,dx = dt$

$$\therefore \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\pi}{3}(-t)\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos\frac{\pi}{3}t\,dt$$

$$= \frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}t\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{3}{2\pi}(\sqrt{3}-1)$$

27. $t > \frac{1}{2e}$ 인 실수 t와 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에 대하여 직선 $y = tx$와 점 $(s,\ f(s))\,(s > 0)$ 사이의 거리의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, $g(1) + g'(1)$의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{2}}{4}$　② $\frac{3\sqrt{2}}{8}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{5\sqrt{2}}{8}$　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$g(t) = \frac{\left|ts - \frac{\ln s}{s}\right|}{\sqrt{t^2+1}}$,　$\frac{1-\ln s}{s^2} = t$

$= \frac{ts - \frac{\ln s}{s}}{\sqrt{t^2+1}}$,　$g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$g'(t) = \frac{\left(ts' + s - \cancel{\frac{1-\ln s}{s^2}}^{\,t} \cdot s'\right)}{t^2+1} \cdot \sqrt{t^2+1} - \frac{\left(ts - \frac{\ln s}{s}\right) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}$

$g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

28. $x > 0$에서 정의된 함수 $f(x) = x(\ln x)^2$과 양수 $t\left(t \neq \frac{1}{e}\right)$에 대하여 함수 $f(x) - f'(t)(x-t) - f(t)$가 $x = a$에서 극대일 때, 실수 a의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가

$$h(t) = \begin{cases} g(t) & \left(t > 0,\ t \neq \frac{1}{e}\right) \\ \frac{1}{e} & \left(t = \frac{1}{e}\right) \end{cases}$$

일 때, $\int_{\frac{1}{e^2}}^{1} f(h(t))\,dt$의 값은? [4점]

① $\frac{43e^2-39}{12e^4}$　② $\frac{43e^2-35}{12e^4}$　③ $\frac{43e^2-31}{12e^4}$　④ $\frac{47e^2-39}{12e^4}$　⑤ $\frac{47e^2-35}{12e^4}$

$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$

$(\ln x)^2 + 2\ln x - (\ln t)^2 - 2\ln t = 0$

$(\ln x - \ln t)(\ln x + \ln t + 2) = 0$

$x = t$ / $x = \frac{e^{-2}}{t}$

$h(t) = \begin{cases} t & \left(0 < t < \frac{1}{e}\right) \\ \frac{e^{-2}}{t} & \left(t \geq \frac{1}{e}\right) \end{cases}$

$\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{e}}^{1} f\left(\frac{e^{-2}}{t}\right) dt$

$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} t(\ln t)^2\,dt + \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{e^{-2}}{t}(2+\ln t)^2\,dt$

$= \frac{1}{2}t^2(\ln t)^2\Big|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} - \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} t\ln t\,dt + \frac{e^{-2}}{3}(2+\ln t)^3\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}$

$= \frac{1}{2e^2} - \frac{2}{e^4} - \frac{1}{2}t^2\ln t\Big|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} + \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{2}t\,dt + \frac{8}{3e^2} - \frac{1}{3e^2}$

$= \frac{1}{2e^2} - \frac{2}{e^4} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e^4} + \frac{1}{4}t^2\Big|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} + \frac{8}{3e^2} - \frac{1}{3e^2}$

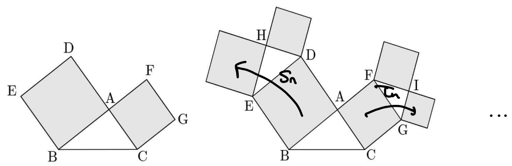
$= \frac{10}{3e^2} - \frac{3}{e^4} + \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{4e^4}$

$= \frac{43e^2-39}{12e^4}$

단답형

29. 그림과 같이 선분 BC를 빗변으로 하고 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 ABED와 선분 AC를 한 변으로 하는 정사각형 ACGF를 그리고, 두 정사각형 ABED, ACGF에 색칠하여 얻어진 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 점 H를 삼각형 HED가 직각삼각형이고 $\overline{HE}:\overline{HD}=4:3$이 되도록 잡고, 점 I를 삼각형 IFG가 직각삼각형이고 $\overline{IF}:\overline{IG}=4:3$이 되도록 잡는다. 선분 HE, HE, IF, IG를 각각 한 변으로 하는 네 개의 정사각형을 그리고, 이 네 개의 정사각형에 색칠하여 얻어진 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 과정에서 새로 얻은 2^n개의 정사각형 중 넓이가 가장 큰 정사각형의 넓이만을 1번째 과정에서 n번째 과정까지 각각 더한 것을 S_n, n번째 과정에서 새로 얻은 2^n개의 정사각형 중 넓이가 가장 작은 정사각형의 넓이만을 1번째 과정에서 n번째 과정까지 각각 더한 것을 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{T_n}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



R_1 R_2 …

$$S_n=\frac{16\times(1-(\frac{16}{25})^n}{\frac{9}{25}},\quad T_n=\frac{9\times(1-(\frac{9}{25})^n)}{\frac{16}{25}}$$

$\therefore\ \frac{20}{3}+\frac{15}{4}=\frac{125}{12}$ $\boxed{137}$

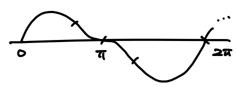
30. 함수 $f(x)=\sin x(1+\cos x)$와 서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여

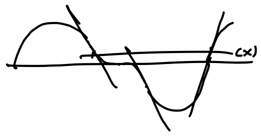
$$f(x_1)-f(x_2)=f'(c)(x_1-x_2)$$

를 만족시키는 x_1, x_2의 순서쌍 $(x_1,\ x_2)$가 <u>존재하지 않도록</u> 하는 실수 c의 값 중에서 열린구간 $(0,\ 8\pi)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 c_1, c_2, $\cdots$, c_n (n은 자연수)라 하자. $n+\sum_{k=1}^{n}\left|f'(c_k)\right|$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x)=2\cos^2x+\cos x-1$

$f''(x)=-\sin x(4\cos x+1)$





$\therefore$ $[0,\ 2\pi]$ c_n 총 3개.

$(0,\ 8\pi)$ c_n 총 11개. $n=11$

$\cos c=-\frac{1}{4}$ $\therefore$ $f'(c)=\frac{1}{8}-\frac{5}{4}=-\frac{9}{8}$

$\cos c=1$ $\therefore$ $f'(c)=2$

$\sum_{k=1}^{11}|f'(c_k)|=8\times\frac{9}{8}+3\times2$

$=15$

$\therefore$ $11+15=\boxed{26}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.