

2026학년도 Prologue 모의고사 1회 해설지

빠른 정답

공통 과목				선택 과목			
				확률과 통계		미적분	
1	④	12	①	23	④	23	②
2	②	13	⑤	24	③	24	①
3	⑤	14	②	25	⑤	25	③
4	③	15	③	26	③	26	②
5	①	16	4	27	⑤	27	⑤
6	③	17	8	28	①	28	①
7	①	18	6	29	625	29	137
8	②	19	2	30	456	30	26
9	③	20	45				
10	④	21	100				
11	②	22	864				

해설

〈공통과목〉

1.

$$2^{\log_4 81} = 2^{\log_2 9} = 9, \quad 3^{\log_9 16} = 3^{\log_3 4} = 4 \text{이므로 } 9 \times 4 = 36.$$

2.

$$f(x) = x^3 - x - 1 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 1 \text{이므로 } f'(1) = 2.$$

3.

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 $a_n = 3r^{n-1}$ 에서 $r > 0$ 이므로 모든 항이 양수이다.

$$a_5 - a_4 = 6a_3 \text{에서 양변을 } a_3 \text{으로 나누면 } r^2 - r = 6 \text{에서 } r = 3 \text{이고, } a_3 = a_1 \times 3^2 = 27.$$

4.

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이므로 $a^2 + a = -a + 8$, $a^2 + 2a - 8 = (a+4)(a-2) = 0$ 에서 $a = 2$.

5.

점 P가 제2사분면 위의 점이므로 $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta = -2$ 이다.

$$\text{따라서 } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times \tan\theta = \sin\theta \times \tan\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

6.

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\sqrt{a} - b = 0$, $a = b^2$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+a} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = 4a$$

$$\text{이므로 } a\sqrt{a} = \frac{1}{8}, \quad a = \frac{1}{4} \quad \dots \quad b = \frac{1}{2} \text{이다. 따라서 } a+b = \frac{3}{4}.$$

7.

a, b 가 양수이므로 $\cos x \geq b$ 이면 $\cos x + a \neq \cos x - b$ 가 되어,

$\cos x < b$ 에서 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 만나야 한다.

즉, $\cos x < b$ 이고 $0 < x < 2\pi$ 에서 방정식 $\cos x + a = -\cos x + b$ 의 실근이

$$\text{오직 하나이므로 방정식 } \cos x = \frac{b-a}{2} \text{의 실근은 } x = \pi \text{이고, } \frac{b-a}{2} = -1, \quad a-b = 2 \text{이다.}$$

(별해)

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 모두 직선 $x=\pi$ 에 대하여 대칭이므로

두 함수의 그래프가 오직 한 점에서만 만나기 위해서는 직선 $x=\pi$ 위에서 만나야 한다.

$f(\pi)=a-1$, $g(\pi)=|-1-b|=b+1$ 이므로, $a-1=b+1$, $a-b=2$.

8.

$$\int_{-1}^1 (x+1)f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + 6 \text{에서 } \int_{-1}^1 xf(x)dx = 6 \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 x^3 + ax^2 dx = \frac{2}{3}a = 6 \text{에서 } a = 9.$$

9.

$$\sum_{n=1}^7 na_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + 7a_7 \text{이고}$$

$$\sum_{n=1}^7 S_n = a_1 + (a_1 + a_2) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_7) = 7a_1 + 6a_2 + \cdots + a_7$$

$$\text{이므로 } \sum_{n=1}^7 na_n + \sum_{n=1}^7 S_n = 8(a_1 + a_2 + \cdots + a_7) = 50 + 190 = 240 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } S_7 = a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 30.$$

10.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $f'(x) \geq 0$ 이다.

$f'(x)$ 가 이차함수이고 $f'(3) = 0$ 이므로 방정식 $f'(x) = 0$ 은 중근을 갖는다.

$$\text{즉, } f(2) = 3 \text{이므로, } f'(x) = \frac{9}{7}(x-3)^2 \text{에서 } f(x) = \frac{3}{7}(x-3)^3 + \frac{24}{7} \text{이다.}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \geq 0$ 이므로 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$F(x) - F(a) \geq 0$, $F(x) \geq F(a)$ 이므로 함수 $F(x)$ 가 $x=a$ 에서 최소이다. 곧 $f(a) = 0$ 이다.

$$\frac{3}{7}(a-3)^3 + \frac{24}{7} = 0 \text{에서 } (a-3)^3 = -8 \text{이므로 } a = 1 \text{이고,}$$

$$f(a+5) = f(6) = \frac{24}{7} + \frac{24}{7} = \frac{48}{7}.$$

11.

점 P의 시각 t 에서의 속도는 $v = 3t^2 - 12at$ 이고, 시각 t 에서의 가속도는 $v' = 6t - 12a$ 이다.

시각 $t = f(a)$ 에서 $v' = 0$ 이므로 $f(a) = 2a$ 이고,

점 P가 시각 $t = 0$ 에서 $t = 6a$ 까지 이동한 거리는

$$\int_0^{6a} |v| dt = \int_0^{4a} 12at - 3t^2 dt + \int_{4a}^{6a} 3t^2 - 12at dt = 32a^3 + 32a^3 = 64a^3$$

이므로 $g(a) = 64a^3$ 이다. 따라서 $f(3) + g(1) = 6 + 64 = 70$.

12.

원 O 의 넓이가 $\frac{44}{7}\pi$ 이므로 원 O 의 지름의 길이는 $\frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$ 이다.

곧, $\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$ 에서 $\overline{BC} = \sqrt{11}$ 이다.

$\cos(\angle BAC) = \frac{3}{4}$ 이므로, 선분 AC 의 길이를 x 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$1 + x^2 - 2x \times \frac{3}{4} = 11, \quad 2x^2 - 3x - 20 = 0 \cdots (x-4)(2x+5) = 0, \quad x = 4 \text{이다.}$$

$\overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 4$ 이므로 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{CD} = \frac{4}{5} \times \sqrt{11}$ 이고,

삼각형 ACE 의 외접원이 원 O 이므로

$\frac{\overline{CE}}{\sin(\angle EAC)} = \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$ 에서 $\sin(\angle EAC) = \frac{\sqrt{7}}{5}$, $\cos(\angle EAC) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ 이다.

따라서 $\frac{\overline{AC}}{\cos(\angle EAC)} = \frac{20}{3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$.

13.

수열 $\{c_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 $c_n = \begin{cases} a_n & (a_n \geq b_n) \\ b_n & (a_n < b_n) \end{cases}$ 을 만족시킨다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로, 각각의 공차를 p , q 라 하면

a_1, b_1, p, q 의 값이 모두 자연수이다.

$p = q$ 인 경우, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = b_n$ 이므로

$c_6 - c_1 = 5p = 11$, $p = \frac{11}{5}$ 이 되어 모순이다.

$p < q$ 인 경우, $n \leq 3$ 일 때 $c_n = a_n$ 이고 $n \geq 4$ 일 때 $c_n = b_n$ 이다.

곧, $c_6 - c_1 = 2p + 3q = 11$ 에서 $p = 1, q = 3$ 이다.

이 경우 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = 3n - 4$ 이므로 $b_1 = -1$ 이 되어 모순이다.

$p > q$ 인 경우, $n \leq 3$ 일 때 $c_n = b_n$ 이고 $n \geq 4$ 일 때 $c_n = a_n$ 이다.

곧, $c_6 - c_1 = 2q + 3p = 11$ 에서 $q = 1, p = 3$ 이다.

이 경우 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = n + 6, a_n = 3n$ 이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

따라서 $a_1 + \sum_{n=1}^{10} c_n = 3 + \sum_{n=1}^3 b_n + \sum_{n=4}^{10} a_n = 3 + 3b_2 + 7a_7 = 3 + 24 + 147 = 174$.

14.

부등식 $\frac{g(0)+g(1)}{2} \leq g(n-1) \leq \frac{g(2)+g(3)}{2}$ 에서

$n = 1$ 일 때 $\frac{g(0)+g(1)}{2} \leq g(0), g(1) \leq g(0)$

$n = 2$ 일 때 $\frac{g(0)+g(1)}{2} \leq g(1), g(0) \leq g(1)$ 이므로 $g(0) = g(1)$ 이고,

같은 방법으로 $g(2) = g(3)$ 이다.

$g(0) = g(2)$ 일 때, $g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = \dots$

이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $g(n-1) = k$ 이다.

$f(0) = 0$ 이므로 구간 $[0, \infty)$ 에 $g(x) = f(x)$ 인 구간 (α, β) ($\alpha < \beta$)가

존재한다고 가정하면, $\alpha > 0$ 이고 $\beta \neq \infty$ 이다.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,

$f(\alpha) = f(\beta) = k, f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ 이어야 하나, 롤의 정리에 의하여 구간 (α, β) 에 $f'(c) = 0$ 인 c 가 존재하여, 함수 $f(x)$ 가 삼차함수임에 모순이다.

따라서 구간 $[0, \infty)$ 에 $g(x) = f(x)$ 인 구간이 존재하지 않으므로,

$\int_0^5 g(x)dx = \int_0^5 kdx = 5k = 10, k = 2$ 가 되어, $k > 2$ 임에 모순이다.

$g(0) < g(2)$ 일 때, $g(0) = k$ 이면 $g(2) = f(2), g(3) = f(3)$ 이다.

$g(x) = f(x)$ 인 구간 (α, β) 가 존재한다고 가정하면

$1 \leq \alpha < 2$ 이고 $\beta \neq \infty$ 이므로, $f(\alpha) = f(\beta) = k, f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ 이어야 하나,

마찬가지로 롤의 정리에 의하여 모순이다. 따라서 $g(2) = k$ 이고,

$g(0) = f(0) = 0, g(1) = f(1) = 0$ 이다.

롤의 정리에 의해 구간 $(0, 1)$ 에 $f'(c) = 0$ 인 c 가 존재하므로

구간 $(1, \infty)$ 에 $f'(d) = 0$ 인 d 가 오직 하나 존재한다. 곧,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < d) \\ k & (x \geq d) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 는 구간 (c, d) 에서 증가, 구간 (d, ∞) 에서 감소하여야 하므로 $d \geq 2$ 이고, $d > 2$ 이면 $g(2) < g(3)$ 이 되어 모순이다. 즉 $d = 2$ 이다.

$f(x) = x(x-1)(ax+b)$ 라 하면 $f'(2) = 0$ 이므로

$$f'(2) = (2a+b) + 2(2a+b) + 2a = 8a + 3b = 0 \text{에서 } b = -\frac{8}{3}a \text{이고,}$$

$$f(x) = ax(x-1)\left(x - \frac{8}{3}\right) = a\left(x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{8}{3}x\right) \text{에서 } f(2) = k = -\frac{4}{3}a \text{이며,}$$

$$\int_0^5 g(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 kdx = \left[a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right) \right]_0^2 + (-4a) = -\frac{40}{9}a = 10 \text{에서}$$

$$a = -\frac{9}{4} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{9}{4}x(x-1)\left(x - \frac{8}{3}\right) \text{이므로, } k + g(-1) = 3 + f(-1) = \frac{39}{2}.$$

15.

$$a_1 = k, a_2 = 2^k + k^2, a_3 = 2^{(2^k + k^2)} + (2^k + k^2)^2$$

이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+3} = a_n$ 이므로

$$\sum_{i=1}^{15} \sin\left(\frac{a_i}{2}\pi\right) = 5 \times \sum_{i=1}^3 \sin\left(\frac{a_i}{2}\pi\right)$$

이다. 즉, $\sum_{i=1}^3 \sin\left(\frac{a_i}{2}\pi\right) = 1$ 이 성립하도록 하는 k 의 값을 구하면 된다.

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1, \sin\left(\frac{2}{2}\pi\right) = 0, \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1, \sin\left(\frac{4}{2}\pi\right) = 0 \text{이고 } \sin(x+2\pi) = \sin x \text{이므로}$$

k 가 짝수이면 모든 자연수 n 에 대하여 $\sin\left(\frac{a_n}{2}\pi\right) = 0$ 이다. 즉 k 는 홀수만 가능하므로,

a_n 의 값을 4로 나눈 나머지가 1 또는 3인 경우를 확인하자.

4로 나눈 나머지가 1인 수의 제곱은 $(4a+1)^2 = 16a^2 + 8a + 1$ (a 는 음이 아닌 정수)이므로 이 역시 4로 나눈 나머지가 1이다.

4로 나눈 나머지가 3인 수의 제곱은 $(4a+3)^2 = 16a^2 + 24a + 9$ 이므로 이는 4로 나눈 나머지가 1이다.

곧, k 가 3 이상의 홀수일 때, k 를 4로 나눈 나머지가 1이면

$$\sin\left(\frac{a_1}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{a_2}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{a_3}{2}\pi\right) = 1 \cdots \sum_{i=1}^3 \sin\left(\frac{a_i}{2}\pi\right) = 3$$

k 를 4로 나눈 나머지가 3이면

$$\sin\left(\frac{a_1}{2}\pi\right) = -1, \sin\left(\frac{a_2}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{a_3}{2}\pi\right) = 1 \cdots \sum_{i=1}^3 \sin\left(\frac{a_i}{2}\pi\right) = 1$$

이다.

한편 $k=1$ 이면 $a_2=3$ 이므로 $\sin\left(\frac{a_1}{2}\pi\right) = 1, \sin\left(\frac{a_2}{2}\pi\right) = -1, \sin\left(\frac{a_3}{2}\pi\right) = 1$ 이 되어

문제의 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 20 이하의 k 의 값은 1, 3, 7, 11, 15, 19이므로

모두 더하면 56.

16.

\sqrt{a} 의 네제곱근 중 실수인 것은 $a^{\frac{1}{8}}, -a^{\frac{1}{8}}$ 이다.

곱하면 $-a^{\frac{1}{4}} = -\sqrt{2}$ 이므로, $a = (-\sqrt{2})^4 = 4$.

17.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$ (C 는 적분상수), $C=8$ 이므로 $f(3) = 9 - 9 + 3 + 8 = 11$.

18.

$\log_a b = \frac{\log_b c}{12} = \frac{\log_c a}{18} = k$ 라 하면 $a^k = b, b^{12k} = c, c^{18k} = a$ 이다.

곧, $a^{12k^2} = c, a^{12 \times 18k^3} = a^{6^3 \times k^3} = a$ 이므로 $k^3 = \frac{1}{6^3}, k = \frac{1}{6} \cdots \log_b a = \frac{1}{\log_a b} = 6$.

19.

$f(x) = 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 6x$ 라 하면 $f'(x) = 6x^2 - 15x + 6 = 3(x-2)(2x-1)$ 이다.

방정식 $f(x) = -k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $-k$ 는 $f(x)$ 의 극댓값 또는 $f(x)$ 의 극솟값이다.

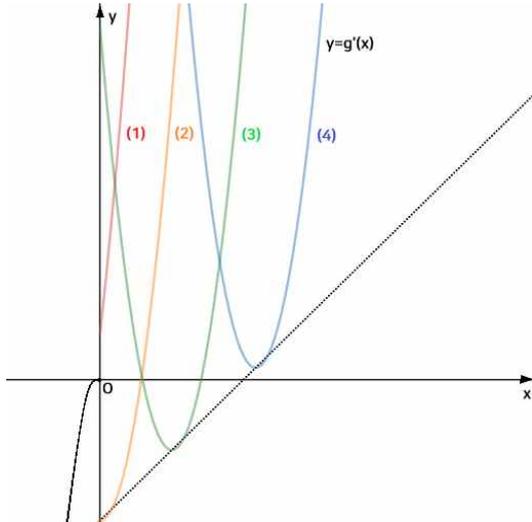
$f(0) = 0$ 이고 구간 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 극댓값은 양수이다.

따라서 $-k$ 는 $f(x)$ 의 극솟값이고, $f(2) = 16 - 30 + 12 = -2$ 이므로 $-k = -2, k = 2$.

20.

함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 는 $g'(x) = \begin{cases} -5x^4 - 3x^2 & (x < 0) \\ f(x-t) + t & (x > 0) \end{cases}$ 이다.

x 에 대한 방정식 $f(x-t) + t$ 의 두 근에 따라 케이스를 나누면 다음과 같다.



(1) 서로 다른 0 이하의 두 실근

$x > 0$ 에서 $f(x-t) + t > 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x < 0$ 에서 감소하고 $x > 0$ 에서 증가한다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 오직 하나의 극값을 갖는다.

(2) 0 이하의 실근과 양의 실근

$f(-t) + t \leq 0$ 이고 $x > 0$ 에서 $f(x-t) + t$ 의 부호가 음에서 양으로 변하는 점이 존재한다.

이 점의 x 좌표를 c 라 하면 $g(x)$ 는 $x < c$ 에서 감소, $x > c$ 에서 증가하므로

함수 $g(x)$ 는 오직 하나의 극값을 갖는다.

(3) 서로 다른 두 양의 실근

$f(-t) + t > 0$ 이고 $x > 0$ 에서 $f(x-t) + t$ 의 부호가 양에서 음으로 변하는 점과

음에서 양으로 변하는 점이 모두 존재한다.

곧, 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값을 갖고 $x > 0$ 에서 서로 다른 두 극값을 가지므로

함수 $g(x)$ 는 오직 하나의 극값을 갖지 않는다.

(4) 중근 또는 허근

$x > 0$ 에서 $f(x-t) + t \geq 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x < 0$ 에서 감소하고 $x > 0$ 에서 증가한다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 오직 하나의 극값을 갖는다.

이상에서, 음수 t 의 최댓값은 방정식 $f(x-t)+t=0$ 의 두 실근이 각각 0과 양수인 경우이므로, $f(x-t)+t=(x-t-6)^2-6+t$ 에서 $(-6-M)^2+M-6=0$, $(M+3)(M+10)=0$, $M+6>0 \cdots M=-3$ 이고, 양수 t 의 최솟값은 방정식 $f(x-t)+t=0$ 이 중근을 갖는 경우이므로 $m-6=0$, $m=6$ 이다.

따라서 $M^2+m^2=(-3)^2+6^2=45$.

(별해)

실수 전체의 집합을 U 라 하고 (3)을 만족시키는 실수 t 의 집합을 A 라 하면 문제의 조건을 만족시키는 t 의 집합은 $U-A$ 이다.

(3)을 만족시키는 경우는 방정식 $f(x-t)+t=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는 경우이므로 $t-6<0$, $f(-t)+t>0 \cdots -3<t<6$

이다. 곧 $U-A=\{t|t\leq-3 \text{ 또는 } t\geq 6\}$ 이므로 $M=-3$, $m=6$ 이고, $M^2+m^2=45$.

21.

함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $g(2-x)=g(x)$ 를 만족시킨다.

곧, 두 실수 p, q 가 $g(p)=g(q)$ 를 만족시키면 $p=q$ 이거나 $p=2-q$ 이다.

$f(x)+f(-x)-8=f(-x)$ 에서 $f(x)=8$, $x=3-a$ 이고,

$f(x)+f(-x)-8=2-f(-x)$ 에서 $f(x)+2f(-x)-10=0$ 이다.

$f(x)+2f(-x)-10=0$ 에서 양변에 2^x 을 곱하고 정리하면

$$2^{2x+a}-10\times 2^x+2^{a+1}=0$$

이다. $2^x=t$ 라 하면 $2^a t^2-10t+2^{a+1}=0$ 이므로,

t 에 대한 방정식 $2^a t^2-10t+2^{a+1}=0$ 의 서로 다른 양의 실근의 개수에 따라 케이스를 나누면 된다.

$2^a t^2-10t+2^{a+1}=0$ 에서 두 근의 합과 곱이 모두 양수이므로

서로 다른 양의 실근의 개수는 판별식 $\frac{D}{4}=25-2^{2a+1}$ 에 의해서만 결정된다.

$25-2^{2a+1}>0$ 이면 방정식 $2^a t^2-10t+2^{a+1}=0$ 의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2이다.

$x=3-a$ 일 때 $t=2^{3-a}$ 이므로 두 실근 중 하나가 2^{3-a} 이어야 한다.

곧, $2^{a+6-2a}-10\times 2^{3-a}+2^{a+1}=0$, $2^{2a+1}-16=0$ 이다. $25-16>0$ 이므로 조건을 만족시키고,

이 때의 4^a 의 값은 $\frac{16}{2}=8$ 이다.

$25 - 2^{2a+1} = 0$ 이면 $2^a = \frac{5}{\sqrt{2}}$ 이므로

$\frac{5}{\sqrt{2}}t^2 - 10t + 5\sqrt{2} = 0 \dots t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0, t = \sqrt{2}$ (중근)이다.

이 때의 x 의 값은 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} \neq 3 - a$ 이어야 하고,

$a = \frac{5}{2}$ 이면 $2^{\frac{5}{2}} \neq \frac{5}{\sqrt{2}}$ 이므로 조건을 만족시킨다. 따라서 이 때의 4^a 의 값은 $\frac{25}{2}$ 이다.

따라서 모든 4^a 의 값의 곱은 $8 \times \frac{25}{2} = 100$.

22.

$a_n \times f(a_n)f'(a_n) \leq 0$ 을 만족시키는 자연수 n 이 존재하지 않으므로

$f(a_n) \neq 0, f'(a_n) \neq 0$ 이다.

$a_n < 0$ 이면 $f(a_n)f'(a_n) < 0$ 이므로

$f(x)$ 가 $x = a_n$ 일 때 함숫값이 양수이면서 감소하거나 음수이면서 증가하고,

$a_n > 0$ 이면 $f(a_n)f'(a_n) > 0$ 이므로

$f(x)$ 가 $x = a_n$ 일 때 함숫값이 양수이면서 증가하거나 음수이면서 감소한다.

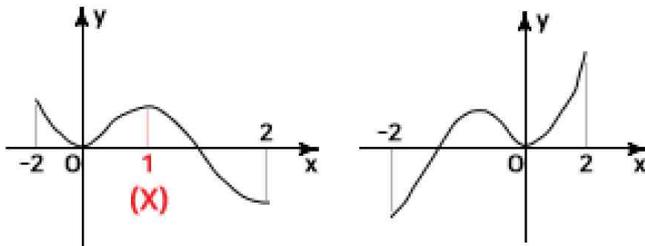
$f'(-\frac{1}{2}) \times f'(\frac{1}{2}) < 0$ 이고 방정식 $f'(x) = 0$ 의 모든 실근이 정수이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대 또는 극소이다.

또한 $f(-2) + f(2) = 0$ 에서 -2 가 수열 $\{a_n\}$ 의 한 항이므로

$f(-2) < 0, f(2) > 0$ 또는 $f(-2) > 0, f(2) < 0$ 이다.

(1) $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극소



$f(2) < 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값을 가져야 하나

1 이 수열 $\{a_n\}$ 의 한 항이므로 모순이다.

따라서 $f(-2) < 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을 갖는다.

$f'(x) = 4x(x+1)(x-a)$ (a 는 -3 이하의 정수)라 하면

$$4x(x+1)(x-a) = 4x^3 + 4(1-a)x^2 - 4ax \text{이므로}$$

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}(1-a)x^3 - 2ax^2 + C \text{ (} C \text{는 적분상수)이고,}$$

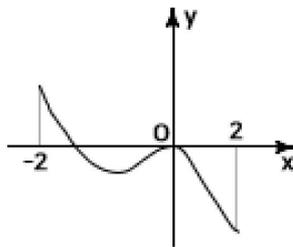
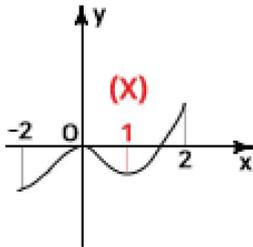
$$f(-2) + f(2) = 32 - 16a + 2C = 0, \quad C = 8a - 16 \text{이다.}$$

구간 $(-1, 1)$ 에 속하는 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 무수히 많고,

$f(x)$ 가 구간 $(-1, 0)$ 에서 감소, 구간 $(0, 1)$ 에서 증가하므로

$f(0) \geq 0$ 이 되어야 하나, $a \leq -3$ 에서 $C \leq -40$ 이므로 모순이다.

(2) $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극대



$f(2) > 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 가져야 하나

1이 수열 $\{a_n\}$ 의 한 항이므로 모순이다.

따라서 $f(2) < 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$f'(x) = 4x(x+1)(x-a)$ (a 는 2 이상의 정수, $a \neq 4$)라 하면

$$4x(x+1)(x-a) = 4x^3 + 4(1-a)x^2 - 4ax \text{이므로}$$

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}(1-a)x^3 - 2ax^2 + C \text{ (} C \text{는 적분상수)이고,}$$

$$f(-2) + f(2) = 32 - 16a + 2C = 0, \quad C = 8a - 16 \text{이다.}$$

$f(x)$ 가 구간 $(-1, 0)$ 에서 증가, 구간 $(0, 1)$ 에서 감소하므로

$f(0) \leq 0$ 이다. $a \geq 2$ 에서 $C \geq 0$ 이므로 $a=2$ 일 때만 부등식이 성립하고,

$$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 \text{일 때 } f(4) > 0, \quad f(-2) > 0, \quad f(1) < 0 \text{이므로}$$

위 조건을 모두 만족시킨다. 따라서 $f(6) = 36 \times (36 - 8 - 4) = 36 \times 24 = 864$.

〈선택과목 - 확률과 통계〉

23.

다항식 $(x^2 + 2)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는 ${}_6C_2 \times 2^4 = 15 \times 16 = 240$.

24.

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ 이고,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로 $P(B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

25.

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	a	b	a	b	a	1

곧 $3a + 2b = 1$ 이고, $E(X) = 9a + 6b = 3$, $E(X^2) = 35a + 20b$ 이므로

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 35a + 20b - 9 = \frac{5}{2}$$

에서 $35a + 20b = \frac{23}{2}$ 이다. $30a + 20b = 10$ 이므로, $5a = \frac{3}{2}$ 에서 $a = \frac{3}{10}$, $b = \frac{1}{20}$ 이다.

따라서 $a + b = \frac{7}{20}$.

26.

140을 소인수분해하면 $2^2 \times 5 \times 7$ 이고, 두 눈의 수의 합은 2 이상 8 이하이므로

시행을 3번 반복하여 기록한 세 수가 작은 순으로 각각 4, 5, 7이어야 한다.

두 수의 합이 4인 경우는 나온 눈의 수가 (1, 3), (2, 2), (3, 1)인 경우이므로 그 확률은 $\frac{3}{16}$,

5인 경우는 나온 눈의 수가 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)인 경우이므로 그 확률은 $\frac{1}{4}$,

7인 경우는 나온 눈의 수가 (3, 4), (4, 3)인 경우이므로 그 확률은 $\frac{1}{8}$ 이고,

4, 5, 7을 배열하는 경우의 수는 $3!$ 이므로, 구하는 확률은 $3! \times \frac{3}{16} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{9}{256}$.

27.

A지점에서 출발하여 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{1!2!} = 3$ 가지,

P지점에서 출발하여 B지점까지 Q지점을 거치지 않고 최단 거리로 가는

경우의 수는 $\frac{6!}{4!2!} - \left(\frac{4!}{3!1!} \times \frac{2!}{1!1!} \right) = 7$ 가지이다.

또한 A지점에서 출발하여 Q지점까지 P지점을 거치지 않고 최단 거리로 가는

경우의 수는 $\frac{7!}{5!2!} - \left(\frac{3!}{2!1!} \times \frac{4!}{3!1!} \right) = 9$ 가지,

Q지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{2!}{1!1!} = 2$ 가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 7 + 9 \times 2 = 39$.

28.

시행을 1번 했을 때 상자 B에 들어 있는 공에 적힌 수를 확률변수 X 라 하면 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

시행을 3번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 6인 경우는

공에 적힌 수가 작은 순으로 각각

$(0, 3, 3), (1, 2, 3), (2, 2, 2)$

인 경우이고, 그 확률은 $\left(\frac{3!}{2!} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \right) + \left(3! \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \right) + \left(1 \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \right) = \frac{84}{8^3}$ 이다.

이 중 2번째 시행에서 상자 B에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 3이 되기 위해서는

2번째 시행의 결과 공에 적힌 수가 작은 순으로 각각 $(0, 3)$ 또는 $(1, 2)$ 이어야 하고,

그 확률은 $\left(\left(\frac{3!}{2!} - 1 \right) \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \right) + \left((3! - 4) \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} \right) = \frac{20}{8^3}$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{20}{8^3}}{\frac{84}{8^3}} = \frac{5}{21}$.

29.

$$P(X \leq 4-x) \leq P(X \geq x+10) \text{에서}$$

모든 양의 실수 x 에 대하여 $(x+10$ 과 m 사이의 거리) \leq $(4-x$ 와 m 사이의 거리) 이므로,
 $m \geq 7$ 이다.

$$P(X \geq x+10) \leq P(X \leq 4) \text{에서}$$

모든 양의 실수 x 에 대하여 $(4$ 와 m 사이의 거리) \leq $(x+10$ 과 m 사이의 거리) 이므로,
 $m \leq 7$ 이다. 따라서 $m = 7$ 이다.

$$P(X \geq 9) = P(Z \geq \frac{2}{\sigma}) \text{이므로 } P(Z \geq \frac{2}{\sigma}) + P(Z \leq 3) = 1 \text{에서 } \sigma = \frac{2}{3} \text{이다.}$$

$$Y = 3X - 4 \text{이므로 } 16 \leq 3X - 4 \leq 20 \text{에서 } \frac{20}{3} \leq X \leq 8 \text{이고,}$$

$$\frac{\frac{20}{3} - m}{\sigma} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{8 - m}{\sigma} = \frac{3}{2} \text{이므로 } P(16 \leq Y \leq 20) = P(-0.5 \leq Z \leq 1.5) \text{이며,}$$

$$P(-0.5 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0.5) \text{이므로}$$

$$a = 0.192 + 0.433 = 0.625 \text{이다. 따라서 } 1000a = 625.$$

30.

$f(2), f(4), f(8)$ 로 가능한 수를 $a, b, c(a \leq b \leq c)$ 라 할 때

모든 순서쌍 (a, b, c) 를 나열하면

$$(2^1, 2^1, 2^1)$$

$$(2^2, 2^2, 2^2)$$

$$(2^3, 2^3, 2^3), (2^1, 2^2, 2^3)$$

$$(2^1, 2^1, 2^4), (2^1, 2^4, 2^4), (2^2, 2^3, 2^4), (2^4, 2^4, 2^4)$$

$$(2^1, 2^3, 2^5), (2^2, 2^2, 2^5), (2^2, 2^5, 2^5), (2^3, 2^4, 2^5), (2^5, 2^5, 2^5)$$

이고,

이 중 서로 같은 것이 없는 경우는 4가지 (1)

2개가 서로 같은 경우는 4가지 (2)

3개가 서로 같은 경우는 5가지 (3)

이다.

(1) $f(2), f(4), f(8)$ 을 배열하는 경우의 수는 $3!$

$f(16), f(32)$ 는 각각 $f(2), f(4), f(8)$ 중 하나여야 하므로

$${}_3\Pi_2 = 9$$

이다. 이 때의 전체 경우의 수는 $3! \times 9 = 54, 54 \times 4 = 216$ 이다.

(2) $f(2), f(4), f(8)$ 을 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}$

$f(16), f(32)$ 중 하나가 $f(2), f(4), f(8)$ 에 들어간 두 수 중 하나이고
하나가 나머지 세 수 중 하나인 경우는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 2$$

$f(16), f(32)$ 가 서로 같고 $f(2), f(4), f(8)$ 에 들어간 두 수가 아닌 경우의 수는
3

이다. 이 때의 전체 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times ({}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 2 + 3) = 45$, $45 \times 4 = 180$ 이다.

(3) $f(2), f(4), f(8)$ 을 배열하는 경우의 수는 1

$f(16), f(32)$ 는 $f(2), f(4), f(8)$ 에 들어간 수가 아니면서 서로 달라야 하므로

$${}_4P_2 = 12$$

이다. 이 때의 전체 경우의 수는 $1 \times 12 = 12$, $12 \times 5 = 60$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $216 + 180 + 60 = 456$.

〈선택과목 - 미적분〉

23.

식을 유리화하면 $\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+3n+1+n}}$ 이므로 극한을 취하면 $\frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$.

24.

x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dt} = \frac{2t+1}{t^2+t}, \frac{dy}{dt} = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$ 이고

$t=1$ 일 때 $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}, \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{3}$.

25.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)\tan x = \frac{1}{3}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\cos x} = \frac{1}{3}$ 이고,

$f(x) = m(x - \frac{\pi}{2})$ 라 하면 $\frac{m}{-1} = \frac{1}{3}$ 이므로 $m = -\frac{1}{3}$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\cot x = \frac{1}{3}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sin x} = \frac{1}{3}$ 이고,

$g(x) = nx$ 라 하면 $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$ 이므로 $n = \frac{1}{3}$ 이다.

따라서 두 직선 $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{\pi}{2}), y = \frac{1}{3}x$ 가 이루는 예각 θ 에 대하여 $\tan \theta$ 의 값은

$$\frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4}.$$

26.

입체도형의 단면의 넓이가 $\sin x \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\cos x\right)$ 이므로,

이 입체도형의 부피는 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\cos x\right) dx$ 이다.

$\cos x = t$ 로 치환하면 $-\sin x dx = dt$ 이므로

$$\int_1^{\frac{1}{2}} -\cos \frac{\pi}{3} t dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \frac{\pi}{3} t dt = \left[\frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} t \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2\pi} (\sqrt{3} - 1).$$

27.

원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점을 α 라 하면

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = f'(\alpha) \cdots \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = \frac{1 - \ln \alpha}{\alpha^2}, \alpha = \sqrt{e}$$

이고, 이때의 $f'(\alpha)$ 의 값은 $\frac{1}{2e}$ 이다.

$t > \frac{1}{2e}$ 이므로, 직선 $y = tx$ 와 점 $(s, f(s))$ 사이의 거리의 최솟값은

점 $(s, f(s))$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선의 기울기가 t 일 때 발생한다.

$$\text{곧, } \frac{1 - \ln s}{s^2} = t \text{ 일 때, } g(t) = \frac{\left| ts - \frac{\ln s}{s} \right|}{\sqrt{t^2 + 1}} \text{ 이다.}$$

$t > \frac{1}{2e}$ 인 모든 t 에 대하여 $ts > \frac{\ln s}{s}$ 이고 $t^2 + 1 > 0$ 이므로 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다.

$$\text{즉 } g'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ts - \frac{\ln s}{s}}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) = \frac{\left(t \frac{ds}{dt} + s - \frac{1 - \ln s}{s^2} \frac{ds}{dt} \right) \sqrt{t^2 + 1}}{t^2 + 1} - \frac{\left(ts - \frac{\ln s}{s} \right) \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}}{t^2 + 1}$$

이고, $\frac{1 - \ln s}{s^2} = t$ 이므로

$$g'(t) = \frac{s}{\sqrt{t^2 + 1}} - \frac{t \left(ts - \frac{\ln s}{s} \right)}{(t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1}}$$

이다. 주어진 그림에 의해 $t = 1$ 일 때 $s = 1$ 이므로

$$g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ 이다. 따라서 } g(1) + g'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

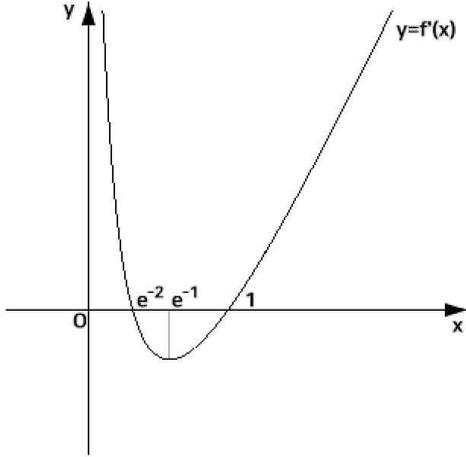
28.

함수 $F(x)$ 를 $F(x) = f(x) - f'(t)(x-t) - f(t)$ 라 하자.

$F'(x) = f'(x) - f'(t)$ 이므로, $f'(x) - f'(t)$ 의 부호가 $x = g(t)$ 의 좌우에서 양에서 음으로 변화하여야 한다.

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x, \quad f''(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$$

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



곡선 $y = f'(x)$ 와 직선 $y = f'(t)$ 가 만나는 두 교점의 좌표를 각각 $t, \alpha (\alpha \neq t)$ 라 하면

이차방정식 $x^2 + 2x = (\ln t)^2 + 2\ln t$ 의 두 실근이 $\ln t, \ln \alpha$ 이므로

$$\ln t + \ln \alpha = \ln \alpha t = -2, \quad \alpha = \frac{1}{e^{2t}} \text{ 이고,}$$

$$0 < t < \frac{1}{e} \text{ 일 때 } t < \frac{1}{e^{2t}}, \quad t > \frac{1}{e} \text{ 일 때 } t > \frac{1}{e^{2t}} \text{ 이므로}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & (0 < t < \frac{1}{e}) \\ \frac{1}{e^{2t}} & (t > \frac{1}{e}) \end{cases}$$

이다.

함수 $h(t)$ 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{e}} h(t) = h\left(\frac{1}{e}\right)$ 이므로 함수 $h(t)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서,

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^1 f(h(t)) dt = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 f\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) dt = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} t (\ln t)^2 dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{e^{2t}} (2 + \ln t)^2 dt$$

이다.

$t = e^{\frac{u}{2}}$ 로 치환하면 $dt = \frac{1}{2}e^{\frac{u}{2}}du$ 이므로

$$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{8}u^2e^u du + \int_{-2}^0 \frac{1}{2e^2} \left(2 + \frac{u}{2}\right)^2 du = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{8}u^2e^u du + \int_2^4 \frac{1}{8e^2}u^2 du$$

$$= \left[\frac{1}{8}(u^2 - 2u + 2)e^u \right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{1}{24e^2}u^3 \right]_2^4 = \frac{5}{4e^2} - \frac{13}{4e^4} + \frac{7}{3e^2} = \frac{43e^2 - 39}{12e^4}.$$

29.

그림 R_2 에서 새로 색칠한 정사각형 중 그 넓이가 가장 큰 것은

그림 R_1 에 존재하는 정사각형 중 그 넓이가 16인 것의 $\frac{16}{25}$ 배이고,

그림 R_2 에서 새로 색칠한 정사각형 중 그 넓이가 가장 작은 것은

그림 R_1 에 존재하는 정사각형 중 그 넓이가 9인 것의 $\frac{9}{25}$ 배이다.

마찬가지로, 그림 R_{n+1} 에서 새로 색칠한 정사각형 중 그 넓이가 가장 큰 것은

그림 R_n 에 존재하는 정사각형 중 그 넓이가 $16 \times \left(\frac{16}{25}\right)^{n-1}$ 인 것의 $\frac{16}{25}$ 배이고,

그림 R_{n+1} 에서 새로 색칠한 정사각형 중 그 넓이가 가장 작은 것은

그림 R_n 에 존재하는 정사각형 중 그 넓이가 $9 \times \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$ 인 것의 $\frac{9}{25}$ 배이다.

즉, S_n 은 첫째항이 16이고 공비가 $\frac{16}{25}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합인

$$\frac{16 \times \left(1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n\right)}{1 - \frac{16}{25}} = \frac{25 \times 16 \times \left(1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n\right)}{9}$$

과 같고, T_n 은 첫째항이 9이고 공비가 $\frac{9}{25}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합인

$$\frac{9 \times \left(1 - \left(\frac{9}{25}\right)^n\right)}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{9 \times 25 \times \left(1 - \left(\frac{9}{25}\right)^n\right)}{16}$$

과 같으므로, $\sqrt{S_n} + \sqrt{T_n} = \frac{5 \times 4}{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n} + \frac{3 \times 5}{4} \times \sqrt{1 - \left(\frac{9}{25}\right)^n}$ 이고,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_n} + \sqrt{T_n}) = \frac{20}{3} \times \sqrt{1} + \frac{15}{4} \times \sqrt{1} = \frac{125}{12} \dots 12 + 125 = 137.$$

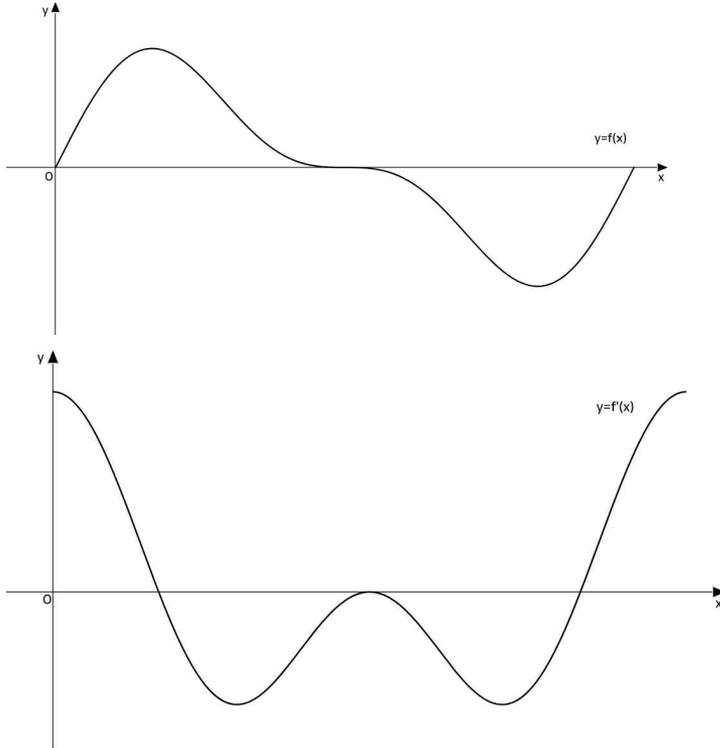
30.

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 와 이계도함수 $f''(x)$ 는 각각

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1,$$

$$f''(x) = -4\sin x \cos x - \sin x = -\sin x(4\cos x + 1)$$

이다. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$ 의 그래프는 각각 그림과 같다.



$x_1 \neq x_2$ 이므로 주어진 식은 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(c)$ 와 동치이다. 이를 해석하면,

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 x_1 에서 x_2 까지(또는 x_2 에서 x_1 까지) 변할 때의 평균변화율이 $x=c$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분계수와 같도록 하는 x_1, x_2 가 존재하지 않으면 된다.

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(c, f(c))$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선을 평행이동하였을 때 곡선 $y=f(x)$ 와 서로 다른 두 개 이상의 점에서 만나게 관찰하면 된다.

$0 < x < 2\pi$ 일 때 $\cos x = -\frac{1}{4}$ 을 만족시키는 x 의 값을 작은 순으로 α_1, α_2 라 하면

두 점 $(\alpha_1, f(\alpha_1)), (\alpha_2, f(\alpha_2))$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

$m=1, 2$ 일 때, $x < \alpha_m$ 에서 $f(x) < f'(\alpha_m)(x-\alpha_m) + f(\alpha_m)$ 이고

$x > \alpha_m$ 에서 $f(x) > f'(\alpha_m)(x-\alpha_m) + f(\alpha_m)$ 이다.

직선 $y=f'(\alpha_m)(x-\alpha_m) + f(\alpha_m)$ 을 평행이동한 임의의 직선과 곡선의 교점의 좌우에서도 대소 관계가 성립하므로, α_1, α_2 는 각각 수열 $\{c_n\}$ 의 한 항이고,

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2\pi) = f(x)$ 를 만족시키므로

$\alpha_1 + 2\pi, \alpha_2 + 2\pi, \alpha_1 + 4\pi, \alpha_2 + 4\pi, \alpha_1 + 6\pi, \alpha_2 + 6\pi$ 또한 수열 $\{c_n\}$ 의 한 항이다.

l 이 자연수일 때, 점 $(l\pi, f(l\pi))$ 또한 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이므로 확인해 보자.

l 이 홀수일 때, $f'(l\pi) = 0$ 이고 $f(\pi) = f(2\pi) = f(3\pi) = \dots = 0$ 이므로

곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 두 점을 이은 직선의 기울기가 0이 되는 경우가 무수히 많이 존재한다.
즉, l 이 홀수인 경우는 조건을 만족시키지 않는다.

l 이 짝수일 때, $x < l\pi$ 에서 $f(x) > f'(l\pi)(x - l\pi) + f(l\pi)$ 이고

$x > l\pi$ 에서 $f(x) < f'(l\pi)(x - l\pi) + f(l\pi)$ 이다.

직선 $y = f'(l\pi)(x - l\pi) + f(l\pi)$ 를 평행이동한 임의의 직선과 곡선의 교점의 좌우에서도
대소 관계가 성립하므로, $2\pi, 4\pi, 6\pi$ 는 각각 수열 $\{c_n\}$ 의 한 항이다.

c 가 위에서 구한 값이 아닌 경우는

직선 $y = f'(c)(x - c) + f(c)$ 를 평행이동한 직선과 곡선이 서로 다른 두 개 이상의 점에서 만나므로
조건을 만족시키지 않는다. 따라서 수열 $\{c_n\}$ 의 모든 항을 나열하면

$\alpha_1, \alpha_2, 2\pi, \alpha_1 + 2\pi, \alpha_2 + 2\pi, 4\pi, \alpha_1 + 4\pi, \alpha_2 + 4\pi, 6\pi, \alpha_1 + 6\pi, \alpha_2 + 6\pi$

이므로, $n = 11$ 이다.

$x = \alpha_1, \alpha_2$ 일 때 $f'(x) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{9}{8}$ 이고, $f'(2\pi) = 2(1)^2 + 1 - 1 = 2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{11} |f'(c_k)| = \frac{9}{8} \times 8 + 2 \times 3 = 15$ 이다. 따라서 $11 + 15 = 26$.

수고하셨습니다!

제작: Midori(계명대학교 약학부 재학중)

인스타 https://www.instagram.com/midori_mn04/ (@midori_mn04)

이메일 anthony0130@naver.com

오르비 <https://orbi.kr/profile/1102448>