해설	

29.

[정답] 93

[출제 의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 계산한다.

$f(5)$의 값을 기준으로 경우의 수를 나누어 계산하자.

(ⅰ) $f(5)=1$

이 경우 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$이므로,
$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$이다.
그런데 이때 함수 f의 치역의 원소에 5가 포함되지 않으므로,
조건을 만족하지 않는다.
따라서, $f(5)=1$인 경우는 가능하지 않다.

(ⅱ) $f(5)=2$

이 경우 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=8$이다.
이때 함수 f의 치역의 원소에 5가 포함되기 위해
$x=1, 2, 3, 4$중 $f(x)=5$를 만족하도록 하는 x를 하나 고르면,
나머지의 함숫값은 모두 1이어야 한다.
즉, $f(x)=5$를 만족하도록 하는 x를 정하는 경우의 수는 4
따라서, (ⅱ)의 경우의 수는 4

(ⅲ) $f(5)=3$

이 경우 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=12$이다.
$x=1, 2, 3, 4$중 $f(x)=5$를 만족하도록 하는 x를 하나 고르고,
나머지의 함숫값을 정하는 경우의 수를 구하자.
일반성을 잃지 않고, $f(1)=5$라고 하자.
이때 $f(2)+f(3)+f(4)=7$이다.
$a=f(2)-1$, $b=f(3)-1$, $c=f(4)-1$으로 두면,
$a+b+c=4$이고, 이때 a, b, c의 범위는 $0 \le a, b, c \le 4$ 이다.
이를 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_3H_4=15$이다.
이때 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 가지는 값의 순서쌍이
$(5, 5, 1, 1)$인 경우는 중복하여 세었으므로 빼주어야 한다.
이때의 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$
즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는
$4\times{}_3H_4-6=54$
따라서, (ⅲ)의 경우의 수는 54

(ⅳ) $f(5)=4$

이 경우 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=16$이다.
이때 함수 f의 치역의 원소에 5가 포함되기 위해선,
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 가지는 값의 순서쌍이
$(5, 4, 4, 3)$ 또는 $(5, 5, 3, 3)$ 또는 $(5, 5, 4, 2)$ 또는
$(5, 5, 5, 1)$이어야 한다.
순서쌍이 $(5, 4, 4, 3)$일 때의 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$
순서쌍이 $(5, 5, 3, 3)$일 때의 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$
순서쌍이 $(5, 5, 4, 2)$일 때의 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$
순서쌍이 $(5, 5, 5, 1)$일 때의 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$
따라서, (ⅳ)의 경우의 수는 $12+6+12+4=34$

(ⅴ) $f(5)=5$

이 경우 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=20$이므로,
$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=5$이다.
함수 f의 치역의 원소에 5가 포함되므로, 조건을 만족한다.
따라서, (ⅴ)의 경우의 수는 1

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여, 문제의 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수는 $4+54+34+1=93$