

2026학년도 수능 대비

부영이 모의고사 4회 | 정답 및 해설

부영이 모의고사를 풀이면 부모입니다.



2026학년도 부영이 모의고사 4회 해설

제 2 교시

수학 영역

공통									
1	④	2	②	3	③	4	⑤	5	④
6	⑤	7	⑤	8	②	9	①	10	②
11	③	12	①	13	③	14	④	15	③
16	6	17	15	18	30	19	34	20	40
21	4	22	259						

확률과 통계									
23	⑤	24	③	25	⑤	26	③	27	②
28	①	29	351	30	65				

미적분									
23	②	24	③	25	①	26	⑤	27	②
28	⑤	29	32	30	7				

기하									
23	④	24	②	25	④	26	①	27	③
28	④	29	13	30	2				

예상 1등급 커트라인

미적	기하	확률과 통계
83-84	85	86-87

모의고사 총평

전체적으로 어려운 공통 시험지의 방향으로 계획했다. 아마 공통에서는 14,15,22정도가 고난도 문항이었을 것이다. 준킬러인 20,21은 너무 어렵지는 않지만, 배워갈 부분은 명확히 존재하게 준비하였다. 그 외 나머지 문항 또한 너무 시험지 전체의 색채에 크게 영향은 안가지만, 또 무난히 재밌게 풀 수 있는 문항들로 구성했다.

공통 난이도는 2311<뵙모 4회<2406 정도로 예상한다.

선택과목 같은 경우 확률과 통계는 평가원보다 어렵게, 기하는 평가원 정도, 미적은 평가원보다는 약간 쉽게 구성했다.

전체적으로 공통이 어렵다보니 앞에서 말한 고난도 문항을 어떻게 뚫어내냐가 시험지 전체 운영을 크게 좌지우지 했을 것이다.

공통 문항 배치는 전체적으로 이번 6모를 참고했다. 최근 평가원 기조를 반영하여 9-13에는 비교적 가벼운 문제를 배치하였고 주관식을 보다 무겁게 구성했다.

이번 모의고사는 전반적으로 실전 모의고사에 초점을 맞추어 제작했다. 새로운 문항을 뚫어내는 능력+익숙한 문항을 빨리 풀어낼 수 있는 능력 모두를 기르는데에 적합한 시험이라 생각한다.

어느덧 9월 모의고사도 얼마 남지 않았는데 여러분도 후반기에 지치지 않고 마지막까지 수능을 잘 완주해내길 바랍니다.

공통

1번: ④

$$4^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)} = 4$$

이다.

2번: ②

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

은 미분계수의 정의 따라 $f'(1)$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 4x + 7 \\ \Rightarrow f'(x) &= 6x + 4 \\ \Rightarrow f'(1) &= 10 \end{aligned}$$

이다.

3번: ③

주어진 조건에 의하여

$$\begin{aligned} \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{3}{4} \\ \Rightarrow \tan \theta &= -\frac{4}{3} \\ \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= -\frac{4}{3} \\ \Rightarrow 3\sin \theta &= -4\cos \theta \end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{16}{9} + 1\right) \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{3}{5} \quad (\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \\ \Rightarrow \sin \theta &= \frac{4}{5} \\ \therefore \sin \theta + \cos \theta &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

4번: ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 2, \quad f(0) = 2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + f(0) &= 4 \end{aligned}$$

이다.

5번: ④

주어진 조건에 의하여

$$f(x) = x \int_0^1 f(t) dt + 4$$

에서 $\int_0^1 f(t) dt$ 를 A 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax + 4 \\ \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (At + 4) dt = \left| \frac{1}{2} At^2 + 4t \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} A + 4 = A \Rightarrow A = 8 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= 8x + 4 \\ \therefore f(3) &= 28 \end{aligned}$$

이다.

6번: ⑤

주어진 조건에 의하여 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 할 때,

$$\begin{aligned} \frac{a_4 + a_2}{a_5 + a_3} &= \frac{(a_4 + a_2)}{(a_4 + a_2) \times r} = \frac{1}{r} = a_1 \quad \cdots \text{㉠} \\ \Rightarrow a_5 &= r^3 = 8 \quad (\because \text{㉠}) \\ \Rightarrow r &= 2 \end{aligned}$$

따라서 $a_8 = a_5 \times r^3 = 64$ 이다.

TEAM SUDO

7번: ⑤

$$f(x)=x^3-3x^2-9x$$

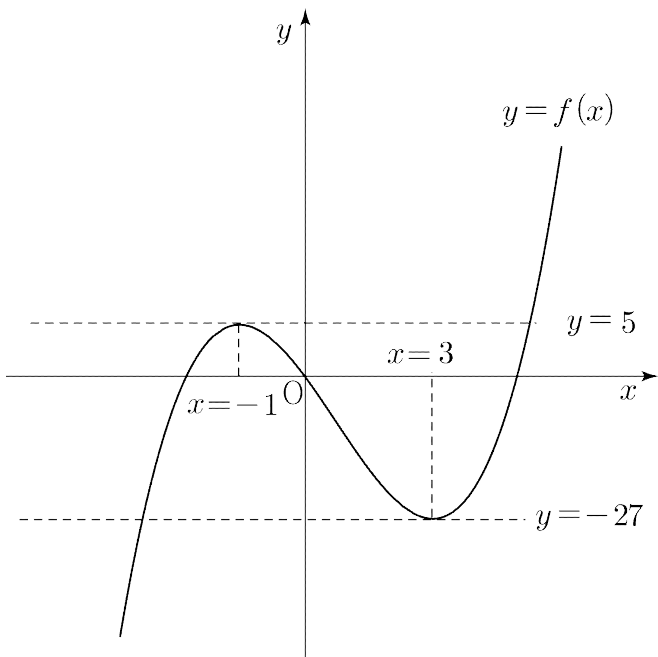
라 할 때,

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대, $x=3$ 에서 극소이다.

$$f(-1)=5, f(3)=-27$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$k-4=-27 \text{ 또는 } k-4=5 \\ \Rightarrow k=9 \text{ (} \because k>0 \text{)}$$

이다.

8번: ②

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{\log_2 10}{\log_2 3}=\log_3 10 \\ \Rightarrow k=\log_3 10 \\ \Rightarrow 3^k=3^{\log_3 10}=10$$

이다.

9번: ①

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 먼저

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)=\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{4-f(x)}=\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

이다. 만약 $f(2) \neq 4$ 일 경우

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{4-f(x)}=\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \Rightarrow 0=f(2)$$

이다. 이때, 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=-\infty, f(2)=0$$

이고 사잇값 정리에 따라서 열린구간 $(-\infty, 2)$ 에서 $f(k)=4$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=k$ 에서 불연속이고, 조건을 만족시키지 못한다.

$$\therefore f(2)=4$$

이고,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{4-f(x)}=\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\ \Rightarrow -\frac{1}{f'(2)}=f(2)=4$$

이다. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ 이고 $f(2)=4, f'(2)=-\frac{1}{4}$ 이므로

$$f(2)=4+2a+b=4 \\ \Rightarrow 2a+b=0 \\ f'(2)=4+a=-\frac{1}{4} \\ \Rightarrow a=-\frac{17}{4}$$

따라서 $a=-\frac{17}{4}, b=\frac{17}{2}$ 로 $a+b=\frac{17}{4}$ 이다.

문제 코멘트

연속조건을 잘 활용하면 쉽게 풀렸을 것이다.
 $x=2$ 일 때와, $f(x)=4$ 일 때만 잘 고민해보자.

10번: ②

$a_3 = a_5$ 이므로 먼저 케이스를 나누어 a_3 를 찾아보자.

(i) $a_3 \geq 3$ 인 경우

$a_4 = a_3 - 3$ 이고

$$a_5 = a_4 - 3 \left(a_4 \geq 4 \right) \text{ 또는 } a_5 = 2a_4 \left(a_4 < 4 \right)$$

전자는 $a_5 = a_3 = a_3 - 6$, 후자는 $a_5 = a_3 = 2a_3 - 6$ 으로
후자만 가능하고, 이 때, $a_3 = 6$ 이다.

(ii) $a_3 < 3$ 인 경우

$a_4 = 2a_3$ 이고

$$a_5 = a_4 - 3 \left(a_4 \geq 4 \right) \text{ 또는 } a_5 = 2a_4 \left(a_4 < 4 \right)$$

전자는 $a_5 = a_3 = 2a_3 - 3 \Rightarrow a_3 = 3$ 으로 $a_3 < 3$ 에 모순이다.
후자는 $a_5 = a_3 = 4a_3 \Rightarrow a_3 = 0$ 이다.

따라서 가능한 a_3 의 값은 0 또는 6 이고 각각 수열표를 그려보면
다음과 같다.

$a_3 = 6$ 일 때,

a_1	a_2	a_3	
9	8	6	
4			
3	3		

$a_3 = 0$ 일 때,

a_1	a_2	a_3
3	2	0
1		
1	0	
0		

따라서 가능한 모든 a_1 의 값의 합은

$$0 + 1 + 3 + 9 = 13$$

이다.

문제 코멘트

0 빠트려서 틀렸다면 반성하자.

11번: ③

각각의 가속도가 같아지는 순간을 알기 위해

$$v_1(t) = -t^2 + 4at + 1, \quad v_2(t) = \frac{1}{3}t^3 - at^2 - 1$$

를 미분해보면

$$a_1(t) = -2t + 4a, \quad a_2(t) = t^2 - 2at$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -2t + 4a &= t^2 - 2at \\ \Rightarrow t^2 + (2 - 2a)t - 4a &= 0 \\ \Rightarrow (t + 2)(t - 2a) &= 0 \end{aligned}$$

이다. a 가 양수이므로 두 점 P 와 Q 는 $t = 2a$ 에서 가속도가
같아짐을 알 수 있고 따라서

$$\begin{aligned} v_1(2a) + v_2(2a) &= 0 \\ \Rightarrow 4a^2 + 1 + \frac{8}{3}a^3 - 4a^3 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow 4a^2 &= \frac{4}{3}a^3 \\ \Rightarrow a &= 3 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

이다.

문제 코멘트

평범한 속도, 가속도 문제이다. 인수분해정도가 포인트

TEAM SUDO

12번: ①

먼저 (가)조건을 한번 살펴보자.

$$\sum_{n=1}^8 |a_n a_{n+2}| = \sum_{n=1}^8 a_n a_{n+2} - 2a_3 a_5$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^8 (|a_n a_{n+2}| - a_n a_{n+2}) = -2a_3 a_5$$

이고 여기서

$$\sum_{n=1}^8 (|a_n a_{n+2}| - a_n a_{n+2})$$

은 수열 $a_n a_{n+2}$ 의 $n=1$ 부터 $n=8$ 까지에서 음수인 부분의 합에 -2 를 곱한 것이다. 따라서

음수인 부분이 오직 $a_3 a_5$ 에서만 해당한다. ... ㉠

를 알 수 있고, 공차가 양수이므로

$$a_3 < 0, a_5 > 0$$

이다. 만약 $a_4 > 0$ 일 경우, $a_2 a_4 < 0$ 이므로 ㉠에 위배되고 $a_4 < 0$ 일 때도 $a_4 a_6 < 0$ 이므로 같은 방법으로 모순이다.

따라서 $a_4 = 0$ 이다.

이후 수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하고 (나)조건을 분석하면

$$a_1 \times a_7 = (a_4 - 3d)(a_4 + 3d)$$
$$\Rightarrow -9d^2 = -\frac{9}{4} \quad (\because a_4 = 0)$$
$$\Rightarrow d = \frac{1}{2} \quad (\because d > 0)$$

이므로

$$a_8 = a_4 + 4d = 0 + 2 = 2$$

이다.

문제 코멘트

(가)조건외 주어진 의미 분석, 이후 $a_4 = 0$ 를 얻었으니 이를 기준으로 식을 세워서 (나)조건 해석.

13번: ③

함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 의 그래프가 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$f(3) = -27 + 9a + 3b + 2 = -1$$
$$\Rightarrow 3a + b = 8 \quad \cdots \text{㉠}$$

이고 따라서 함수 $f(x)$ 를 다시 정리하면

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + (8 - 3a)x + 2$$

이다. 또한 주어진 조건에 의하여

$$S_2 - S_1 = \int_0^3 \{f(x) - (-2x + 5)\} dx = 0$$

이므로

$$\int_0^3 \{f(x) - (-2x + 5)\} dx = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^3 \{-x^3 + ax^2 + (10 - 3a)x - 3\} dx = 0$$
$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}(10 - 3a)x^2 - 3x \right]_0^3 = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{81}{4} + 9a + \frac{9}{2}(10 - 3a) - 9 = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{9}{4} + a + \frac{10 - 3a}{2} - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}a - \frac{7}{4} = 0,$$
$$\Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

이다. ㉠에 의하여

$$b = 8 - 3a = -\frac{5}{2}$$

따라서

$$f(x) = -x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$$
$$\Rightarrow f(-2) = 8 + 14 + 5 + 2 = 29$$

이다.

문제 코멘트

적분하자

14번: ④

두 직선 AD, BC가 평행하므로
삼각형 ABC와 삼각형 DBC의 높이는 서로 같다.
또한 삼각형 ABC와 삼각형 DBC의 밑변은 모두 $\overline{BC}$ 로 같으므로

삼각형 ABC와 삼각형 DBC의 넓이가 같다

각각의 넓이를 넓이공식을 통하여 구해보면

삼각형 ABC의 넓이 = $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(\angle BAC)$

삼각형 DBC의 넓이 = $\frac{1}{2} \times \overline{DB} \times \overline{DC} \times \sin(\angle BDC)$

이고 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB} \times \overline{DC}$ 의 값이 문제에서 주어졌으므로

삼각형 ABC의 넓이 = $4 \times \sin(\angle BAC)$

삼각형 DBC의 넓이 = $3\sqrt{15} \times \sin(\angle BDC)$

이다. 이후 둘의 넓이가 같으므로

$\sin(\angle BAC) : \sin(\angle BDC) = 3\sqrt{15} : 4 \dots \textcircled{1}$

임을 알 수 있다.

이제 삼각형 DBC의 외접원의 반지름에 대한 조건을 사용해보자.

삼각형 ABC와 삼각형 DBC는 $\overline{BC}$ 를 공유한다.

따라서 각각의 외접원의 반지름을 R_1 과 R_2 라 할 때, 사인법칙을 사용하면

$2R_1 = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}, 2R_2 = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}$

$\Rightarrow \sin(\angle BAC) = \frac{\overline{BC}}{2R_1}, \sin(\angle BDC) = \frac{\overline{BC}}{2R_2}$

이고 ①에서 각 사인값의 비를 얻었으니

$\frac{\overline{BC}}{2R_1} : \frac{\overline{BC}}{2R_2} = 3\sqrt{15} : 4$

$\Rightarrow R_1 : R_2 = 4 : 3\sqrt{15}$

이다. 삼각형 DBC의 외접원의 반지름, 즉 $R_2 = 6$ 이므로

$3\sqrt{15}R_1 = 4R_2$

$\Rightarrow R_1 = \frac{8}{\sqrt{15}}$

임을 알 수 있다. 삼각형 ABC에서 사인 법칙을 사용하면

$2R_1 = \frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}$

$\Rightarrow 2 \times \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{4}{\sin(\angle ABC)}$

$\Rightarrow \sin(\angle ABC) = \frac{\sqrt{15}}{4}$

이다. 따라서

$\cos(\angle ABC) = -\sqrt{1 - \sin^2(\angle ABC)} = -\frac{1}{4}$

$(\angle ABC > \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos(\angle ABC) < 0 \text{ 이다.})$

이고 각 ABC를 기준으로 삼각형 ABC에서 코사인법칙 사용시

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC)$

$\Rightarrow 16 = 4 + \overline{BC}^2 + \overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{BC}^2 + \overline{BC} - 12 = 0$

$\Rightarrow (\overline{BC} - 3)(\overline{BC} + 4) = 0$

$\Rightarrow \overline{BC} = 3$

이다. 이후

$\sin(\angle BDC) = \frac{\overline{BC}}{2R_2}$

에 의해

$\sin(\angle BDC) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\cos(\angle BDC) = \sqrt{1 - \sin^2(\angle BDC)} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

이고 삼각형 DBC에서 각 BDC를 기준으로 코사인법칙을 사용하면

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle BDC)$

$\Rightarrow 9 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 12\sqrt{15} \times \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 54$

문제 코멘트

두 직선 AD, BD가 평행하다는 조건의 사용이 포인트였다.
왜 굳이 $\overline{DB} \times \overline{DC}$ 의 값을 제시했는지에 대하여 생각하고 넓이
공식에 관해 떠올려야 했고, 곧 평행 조건이 넓이가 같다는
의미함을 알아 낼 수 있었어야 했다.

TEAM SUDO

15번: ③

(가)조건을 먼저 해석해보자.

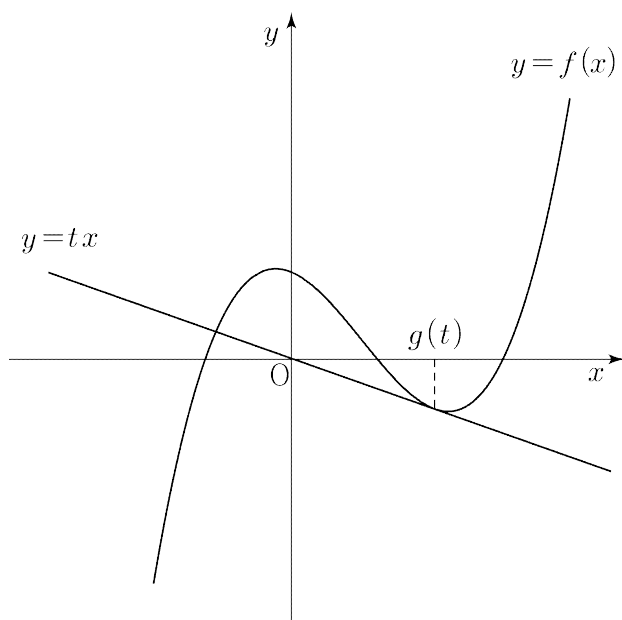
(i) 함수 $f'(g(t))$ 가 $t=a$ 에서 연속일 경우

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a-} f'(g(t)) \times \lim_{t \rightarrow a+} f'(g(t)) &= \{f'(g(a))\}^2 \\ \Rightarrow \{f'(g(a))\}^2 &\leq 0 \\ \Rightarrow f'(g(a)) &= 0 \end{aligned}$$

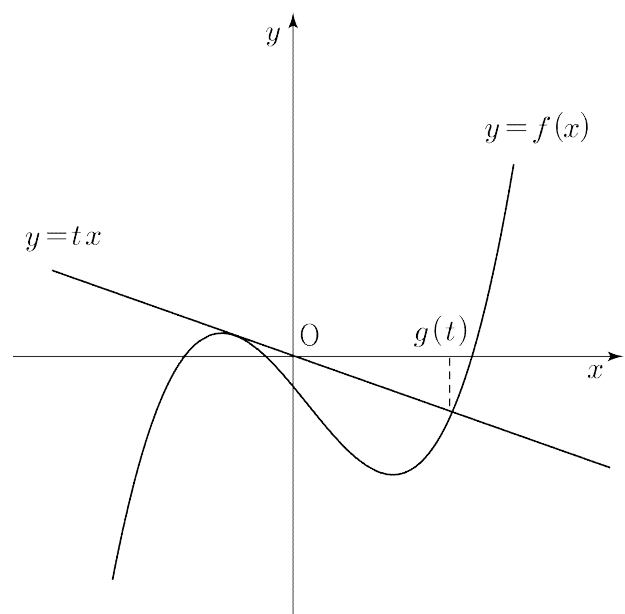
(ii) 함수 $f'(g(t))$ 가 $t=a$ 에서 불연속일 경우

$$\lim_{t \rightarrow a-} f'(g(t)) \text{와 } \lim_{t \rightarrow a+} f'(g(t)) \text{의 부호가 다름}$$

이후 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=tx$ 와의 관계를 분석하면 다음과 같이



함수 $f'(g(t))$ 가 $t=x$ 에서 불연속일 경우는 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=tx$ 와 접하고, 접점의 x 좌표가 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=tx$ 와의 두 교점중 가장 큰 것일 때이다.



(다음과 같이 접점의 x 좌표가 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=tx$ 와의 두 교점중 가장 큰 것이 아닐 때는 함수 $g(t)$ 의 값의 정의에 따라 함수 $g(t)$ 가 연속이다.)

따라서 함수 $f'(g(t))$ 가 $t=x$ 에서 불연속이도록 하는 실수 x 의 값은 하나가 최대임을 알 수 있다. ... ㉠

이후 (나)조건을 분석하면

주어진 조건에 의하여

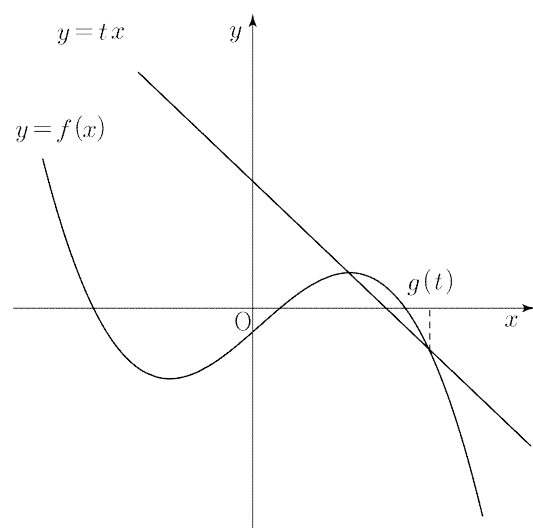
$$\lim_{x \rightarrow -2-} f'(g(t)) = f'(0) > 0$$

이므로 (i)에 의하여 함수 $f'(g(t))$ 가 $t=-1$ 에서 불연속이고

㉠에 의하여 $t=-\frac{14}{15}$ 에서는 연속이다. 따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1-} f'(g(t)) \text{와 } \lim_{t \rightarrow -1+} f'(g(t)) \text{의 부호가 다름} \\ f'\left(g\left(-\frac{14}{15}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

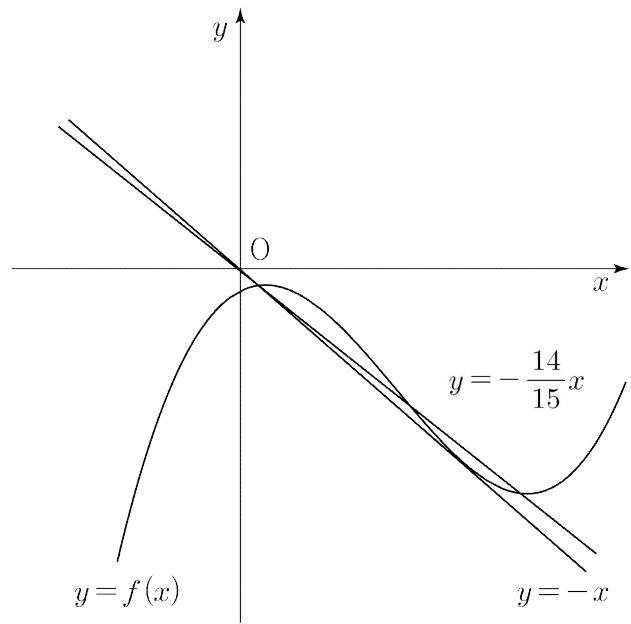
임을 알 수 있다.



만약 다음과 같이 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수일 경우

직선 $y=tx$ 가 함수 $f(x)$ 의 극점을 지나도, 그때, $f'(g(t))=0$ 을 만족시키는건 불가능하다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이고 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



이 때, 곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=-x$ 과의 두 교점중 x 좌표가 작은 점의 x 좌표를 k 라 하면

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} f'(g(t))=f'(k)$$

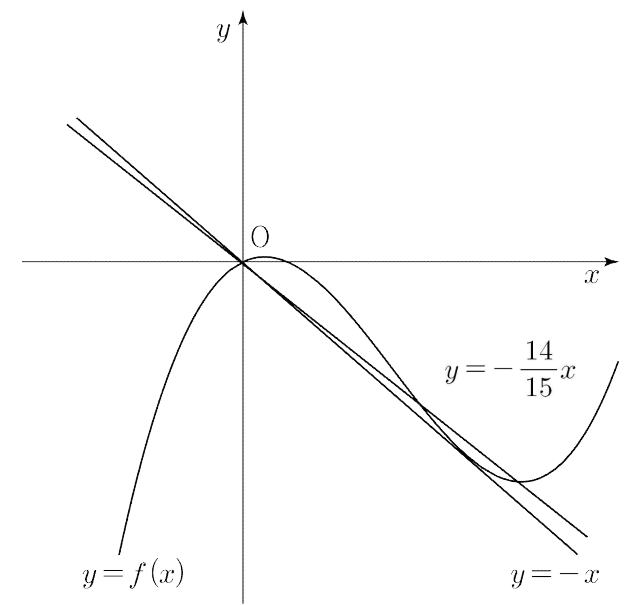
이다. 따라서

$$f'(k)=f'(0)$$

이고 $k \leq 0$ 이므로 $k=0$ 이다. k 의 정의에 따라서

$$f(k)=-k \Rightarrow f(0)=0$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 $y=-x$ 와 접하고, 함수 $f(x)$ 의 극솟점을 직선 $y=-\frac{14}{15}x$ 가 지나므로 다음과 같다.



$f(1)=-1$ 이므로 함수 $f(x)$ 를

$$f(x)=px(x-1)^2-x$$

이라 할 수 있고, 함수 $f(x)$ 가 $x=q(q>1)$ 에서 극솟값 $-\frac{14}{15}q$ 를 갖는다 했을 때,

$$f(q)=pq(q-1)^2-q=-\frac{14}{15}q$$

$$\Rightarrow p(q-1)^2=\frac{1}{15}$$

$$f'(q)=p(q-1)^2+2pq(q-1)^2-1=0$$

$$\Rightarrow pq(q-1)=\frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{p(q-1)^2}{pq(q-1)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{15}}=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{q-1}{q}=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow q=\frac{7}{6}$$

이다. 따라서

$$p=\frac{12}{5}, q=\frac{7}{6}$$

으로

$$f(x)=\frac{12}{5}x(x-1)^2-x$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{14}{5}$$

이다.

문제 코멘트

$\lim_{t \rightarrow a^-} f'(g(t)) \times \lim_{t \rightarrow a^+} f'(g(t))$ 에 의미를 잘 분석하고, (나)조건을 통해 $f(0)=0$ 을 도출하고 이후 계산을 통해 풀어나가는 문항이었다. 결국 연속이냐, 불연속이냐가 $\lim$ 가 들어가는 문항에서는 매우 중요하게 작용하는 부분에 대하여 명심하자.

TEAM SUDO

16번: 6

주어진 조건에 의하여

$$\begin{aligned}\log_3(x-3) &= \log_9(x+3) \\ \Rightarrow \log_9(x-3)^2 &= \log_9(x+3) \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 9 &= x + 3 \\ \Rightarrow (x-1)(x-6) &= 0 \\ \therefore x &= 6 \quad (\because \text{진수조건에 의해 } x > 3)\end{aligned}$$

이다.

문제 코멘트

틀렸다면 반성하자. 참고로 필자도 해설 쓸 때 첨에 잘못 인수분해하고 틀려서 1분동안 손들고 반성했다.

17번: 15

주어진 조건에 의하여

$$\begin{aligned}f'(x) &= 9x^2 - 8x + 3 \\ f(x) &= 3x^3 - 4x^2 + 3x + C \quad (C \text{는 적분 상수})\end{aligned}$$

$f(0)=1$ 이므로

$$\begin{aligned}f(0) &= C = 1 \Rightarrow C = 1 \\ f(x) &= 3x^3 - 4x^2 + 3x + 1 \\ f(2) &= 24 - 16 + 6 + 1 = 15\end{aligned}$$

이다.

18번: 30

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{12} a_n - 2 \sum_{n=1}^6 a_n &= \sum_{n=7}^{12} a_n - \sum_{n=1}^6 a_n \\ &= \sum_{n=1}^6 (a_{n+6} - a_n) = \sum_{n=1}^6 5 = 30\end{aligned}$$

이다.

19번: 34

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = ax^3 + bx^2 + 8x - 3$$

에서 $x=1$ 대입시

$$0 = a + b + 8 - 3 \Rightarrow a + b = -5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이고

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$$

이므로

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = ax^3 + bx^2 + 8x - 3$$

에서 양변 미분시

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) &= 3ax^2 + 2bx + 8 \\ \Rightarrow \int_1^x f(t)dt &= 3ax^2 + 2bx + 8\end{aligned}$$

이고, $x=1$ 대입시

$$0 = 3a + 2b + 8 \Rightarrow 3a + 2b = -8$$

이다. $\textcircled{1}$ 과 연립시

$$\begin{aligned}a + b &= -5, \quad 3a + 2b = -8 \\ \Rightarrow a &= 2, \quad b = -7\end{aligned}$$

으로 $\int_1^x f(t)dt = 6x^2 - 14x + 8$ 이고 다시 양변 미분시

$$\begin{aligned}f(x) &= 12x - 14 \\ \Rightarrow f(4) &= 48 - 14 = 34\end{aligned}$$

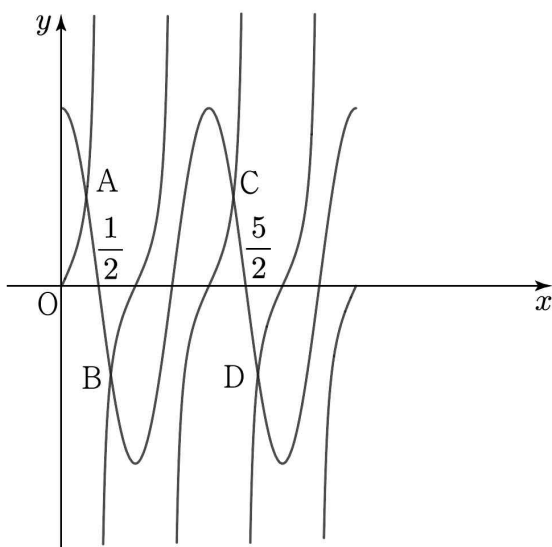
이다.

문제 코멘트

설마...이거 어떻게 미분할지 까먹지는 않았죠?

20번: 40

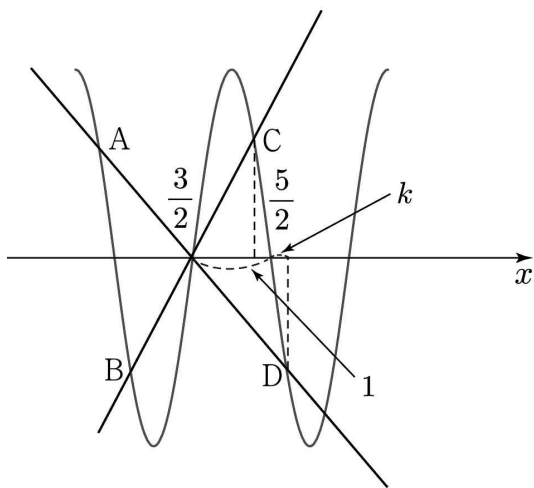
곡선 $y = a \cos(\pi x)$ 와 곡선 $y = \tan(\pi x)$ 의 관계를 살펴보면 다음과 같다.



점 A 와 점 B 는 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로 두 점의 y 좌표의 절댓값은 같고

곡선 $y = a \cos(\pi x)$ 와 곡선 $y = \tan(\pi x)$ 모두 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로 선분 AD 와 선분 BC 모두 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

따라서 두 점 A, D 를 지나는 직선과 두 점 B, C 를 지나는 직선은 각각 다음과 같다.



삼각함수의 대칭성에 의하여

$$\frac{5}{2} - \text{점 C의 } x \text{ 좌표} = \text{점 D의 } x \text{ 좌표} - \frac{5}{2}$$

으로 이 값을 k , 마찬가지로

$$\text{점 C의 } y \text{ 좌표} = -\text{점 D의 } y \text{ 좌표}$$

이므로 이 값을 h 라 할 때, 각 직선의 기울기는

$$m_1 = -\frac{h}{1+k}, m_2 = \frac{h}{1-k}$$

이다. 이 때, 주어진 조건에 의하여

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{1}{2}m_2 \\ \Rightarrow -\frac{h}{1+k} &= -\frac{1}{2} \times \frac{h}{1-k} \\ \Rightarrow 1+k &= 2-2k \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이다. 따라서 점 C 의 x 좌표는 $\frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$ 이고, 이 때,

$$a \cos(\pi x) = \tan(\pi x)$$

이므로

$$\begin{aligned} a \cos\left(\frac{13}{6}\pi\right) &= \tan\left(\frac{13}{6}\pi\right) \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow 60a &= 40 \end{aligned}$$

이다.

문제 코멘트

삼각함수 문제에서는 주기성과, 대칭성 판단이 가장 중요한 부분이므로 그 부분을 먼저 생각해가며 문제를 풀면 된다.

TEAM SUDO

21번: 4

주어진 조건에 의해

$$(x^2 - 4x)g(x) = \{f(x)\}^2 - f(x)$$

이다. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$g(x) = \frac{\{f(x)\}^2 - f(x)}{(x^2 - 4x)}$$

에서 분모인 $x^2 - 4x$ 가 0 이 되는 순간, 분자도

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 - f(x) &= 0 \\ \Rightarrow f(x) &= 0 \text{ 또는 } f(x) = 1 \end{aligned}$$

을 만족시켜야 한다. 따라서

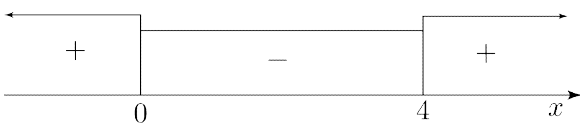
$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \text{ 또는 } f(0) = 1 \\ f(4) &= 0 \text{ 또는 } f(4) = 1 \end{aligned}$$

이다.

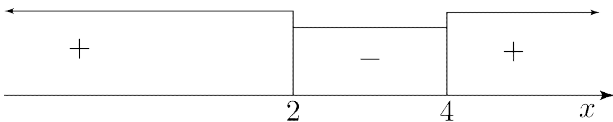
이제 $\{x \mid g(x) \leq 0\} = \{2 \leq x \leq 4\}$ 를 해석하자면

$$(x^2 - 4x)g(x) = \{f(x)\}^2 - f(x)$$

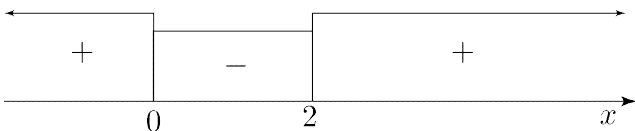
에서 $x^2 - 4x$ 의 부호는 다음과 같다.



함수 $g(x)$ 의 부호가 다음과 같으므로



따라서 $\{f(x)\}^2 - f(x)$ 의 부호는 다음과 같다. ... ㉠



함수 $\{f(x)\}^2 - f(x)$ 를 $h(x)$ 라 하면 $h(x) = f(x)\{f(x) - 1\}$ 이므로

$$\begin{aligned} 0 < f(x) < 1 &\Rightarrow h(x) < 0 \quad \dots \text{㉡} \\ 0 > f(x) \text{ 또는 } f(x) > 1 &\Rightarrow h(x) > 0 \end{aligned}$$

이다. ㉠과 ㉡에 의한

$$\{x \mid 0 < f(x) < 1\} = \{0 < x < 2\}$$

과

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \text{ 또는 } f(0) = 1, \\ \text{함수 } f(x) \text{ 의 최고차항의 계수는 } &1 \end{aligned}$$

임을 생각하면 함수 $f(x)$ 는 $(0, 0)$ 과 $(2, 1)$ 을 지난다. 또한

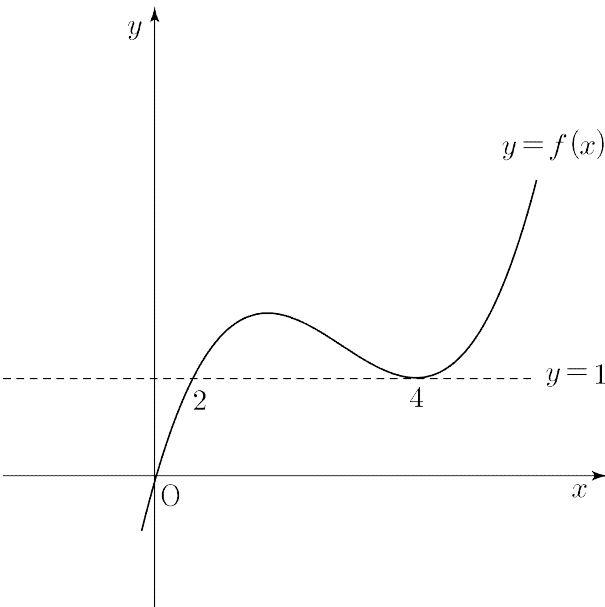
$$f(4) = 0 \text{ 또는 } f(4) = 1$$

에서 $f(4) = 0$ 일 경우 사잇값 정리에 의하여

열린구간 $(0, 2)$ 에서 $0 < f(x) < 1$ 를 만족시키는 실수 x 값이 존재하므로 모순이다.

따라서 $f(4) = 1$ 이고, 이 때, $y = 1$ 과 접하는 상황이다.

최종적으로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x-4)^2(x-2) + 1 \\ f(0) &= -32A + 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{32} \\ \therefore f(8) &= \frac{1}{32} \times 4^2 \times 6 + 1 = 4 \end{aligned}$$

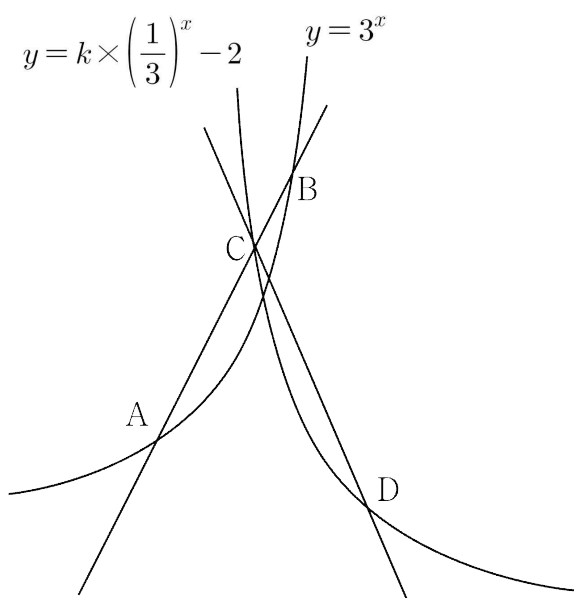
이다.

문제 코멘트

먼저 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라는 부분을 분석하는 것이 첫단계, 이후 부호를 따져서 함수 $f(x)$ 의 값의 범위에 대한 추론을 하는 문제였다.

22번: 259

먼저 주어진 상황을 그래프로 표현해보면 다음과 같다.



선분 CB의 길이가 $\frac{2}{3}\sqrt{10}$ 이고, 직선 CB의 기울기가 3이므로,

점 C의 x 좌표와 점 B의 x 좌표차: $\frac{2}{3}$

점 C의 y 좌표와 점 B의 y 좌표차: 2

임을 알 수 있다. 문제에서 제시된 기울기가 3인 직선을 l 이라 하고 점 C와 점 B의 관계에서 착안하여

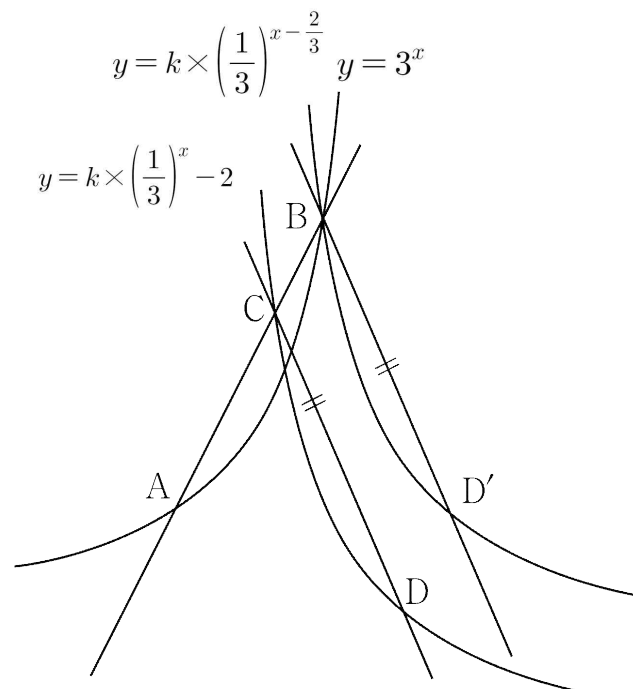
곡선 $y = k \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$ 를 x 축 방향으로 $\frac{2}{3}$, y 축 방향으로 2만큼 평행이동시키면

곡선 $y = k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-\frac{2}{3}}$ 는 직선 l 과 점 D에서 만나고

이때, 점 D를 x 축 방향으로 $\frac{2}{3}$, y 축 방향으로 2만큼 평행이동시킨 점을 D'라 할 때,

$$\overline{CD} = \overline{BD'}$$

이므로 다음과 같은 상황이다.



$$k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-\frac{2}{3}} = 3^{-x+\frac{2}{3}+\log_3 k}$$

이므로 곡선 $3^{-x+\frac{2}{3}+\log_3 k}$ 과 곡선 $y = 3^x$ 는 직선

$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_3 k$ 에 대하여 대칭관계이고, 점 B는 대칭축위에 있으므로

점 B의 x 좌표는 $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_3 k$ 이다. ... ㉠

따라서 선분 AB와 선분 BD'또한 직선 $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_3 k$ 에 대하여 대칭관계로 두 길이는 같다.

선분 AC의 길이를 $2m$, 선분 BD'의 길이를 $3m$ 이라 할 경우

$$2m + \frac{2}{3}\sqrt{10} = 3m$$

$$\Rightarrow m = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

이고 따라서 선분 AB의 길이는 $2\sqrt{10}$ 이고 기울기가 3이므로

점 A의 x 좌표와 점 B의 x 좌표차: 2

점 A의 y 좌표와 점 B의 y 좌표차: 6

이다. $A(a, 3^a)$ 라 두면 점 B의 x 좌표는 $a+2$ 이므로

$$3^{a+2} = 3^a + 6$$

$$\Rightarrow 3^a(3^2 - 1) = 6$$

$$\Rightarrow 3^a = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

TEAM SUDO

으로 $a = \log_3 \frac{3}{4}$ 이다. 따라서 점 B의 x 좌표는 ㉠에 의하여

$$\log_3 \frac{3}{4} + 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log_3 k$$

이므로

$$\Rightarrow \frac{16}{3} - \log_3 16 = \log_3 k$$

$$\Rightarrow \log_3 \left(\frac{3^{\frac{16}{3}}}{16} \right) = \log_3 k$$

$$\Rightarrow k = \frac{3^{\frac{16}{3}}}{16}, \frac{k}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^5}{16} = \frac{243}{16}$$

으로 $p + q = 259$ 이다.

문제 코멘트

오로지 지로 함수만으로 변별력을 갖추겠다는 문제로, 원래의 곡선을 이동시킨 $y = k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x - \frac{2}{3}}$ 가 $y = 3^x$ 와 대칭관계라는 부분을 도출하는 점이 변별 포인트였다. 처음 선분의 비율관계와 $\overline{CB}$ 의 길이를 왜 주었는지에 집중하여 $y = k \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$ 를 이동시키고, 이후 대칭관계를 찾아내야 했다.

확률과 통계

23번: ⑤

${}_5P_3 = 60, {}_5\Pi_3 = 125$

따라서 $60 + 125 = 185$ 이다.

24번: ③

다항식 $(x+a)^5$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는

${}_5C_3 \times a^3 = 10a^3$

이다. 그리고 이는 270 이므로 $10a^3 = 270, a = 3$

25번: ⑤

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 할 때,

$a \times b$ 가 짝수인 경우는 전체 경우에서 $a \times b$ 가 홀수인 경우를 제외한 것과 같다.

따라서 해당 경우는

$6 \times 6 - 3 \times 3 = 27$

이다.

이때 $a \times b$ 가 짝수일 때 $a \times b$ 가 3의 배수인 경우는 $a \times b$ 가 6의 배수인 경우와 같다.

$a \times b$ 가 6의 배수인 경우는

- 1. $a = 6$ 인 경우 $\rightarrow b = 1 \sim 6$ 인 경우의 6가지
- 2. $b = 6$ 인 경우 $\rightarrow a = 1 \sim 6$ 인 경우의 6가지

이때 $a = b = 6$ 인 경우가 중복되므로 1, 2번 경우는 11가지이다.

3. $a, b \neq 6$ 인 경우

3-1. a, b 가 각각 2, 3 중 하나인 경우 $\rightarrow$ 2가지

3-2. a, b 가 각각 4, 3 중 하나인 경우 $\rightarrow$ 2가지

따라서 3번 경우는 4가지이고 전체 경우는 15가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{27} = \frac{5}{9}$ 이다.

26번: ③

$f(13) < f(8) < f(11)$

이므로 m 으로부터의 거리는 11 이 가장 가깝고, 13 이 가장 멀다.

따라서

$|11 - m| < |8 - m| < |13 - m|$
 $\Rightarrow m = 10$ ($\because m$ 은 자연수)

이고

$\therefore P(X \leq 7) = P(Z \leq -1) = 0.1587$

이다.

27번: ②

요리를 올린 접시를 원 모양의 식탁에 놓는 경우의 수는

$3! = 6$

이다.

이때 각 요리 사이에 놓인 접시의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하면 a, b, c, d 는 모두 5 미만의 자연수이고, $a + b + c + d = 10$ 이다.

따라서 자연수 a, b, c, d 에 대하여 $a + b + c + d = 10$ 을 만족시키는 전체 경우의 수는 ${}_4H_6 = 84$ 이다.

이때 a, b, c, d 중 5 이상의 자연수가 존재하는 경우는 a, b, c, d 가 각각

- 1. 7, 1, 1, 1 중 하나인 경우
- 2. 6, 2, 1, 1 중 하나인 경우
- 3. 5, 3, 1, 1 중 하나인 경우
- 4. 5, 2, 2, 1 중 하나인 경우

의 4가지가 존재한다.

따라서 해당 경우는

TEAM SUDO

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} = 40 \text{ 가지}$$

이고, 이를 제외하면 5 미만의 자연수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d=10$ 을 만족시키는 전체 경우의 수는

$$84 - 40 = 44$$

이다. 따라서 전체 경우의 수는 $6 \times 44 = 264$ 이다.

문제 코멘트

각 요리 사이에 놓인 접시의 개수를 미지수로 두고, 부정방정식의 형태로 식을 세운 뒤 개수를 세는 것이 핵심이 되었던, 예상 정답률 50% 정도의 문제이다.

또한 원순열의 상황은 어느 시점에서 끝나는지를 파악하는 것 역시 이 문제의 초크포인트인데, ‘서로 다른’ 요리를 식탁에 놓는 시점에서 회전했을 때 더 이상 일치하지 않으므로 원순열의 상황은 끝난다는 걸 캐치하고 가야 하는 문제.

28번: ①

한 번의 시행마다 6가지 선택이 가능하고, 선택은 3번 반복되므로 총 경우의 수는

$$6^3 = 216$$

이다.

(i) 공이 2개 들어 있는 상자가 시행을 반복한 후 공이 4개 들어 있을 경우

해당 상자는 2번 선택되고, 다른 상자는 1번 선택되어야 한다. 따라서 3번 중 해당 상자가 선택될 경우를 고르는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

이고 해당 상자가 선택되는 2번의 경우에서 함께 뽑힐 다른 상자를 고르는 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9,$$

해당 상자가 선택되지 않는 1번의 경우에서 뽑힐 상자를 고르는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

이므로 전체 경우의 수는

$$3 \times 9 \times 3 = 81$$

이다.

(ii) 공이 1개 들어 있는 상자가 시행을 반복한 후 공이 4개 들어 있을 경우

해당 상자는 3번 선택되어야 한다. 그리고 해당 상자가 선택되는 모든 경우에서 함께 뽑힐 다른 상자를 고르는 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

이다. 따라서 전체 경우의 수는

$$1 \times 27 = 27$$

이다.

(iii) 공이 2개 들어 있는 상자와 공이 1개 들어 있는 상자 모두 시행을 반복한 후 공이 4개 들어 있을 경우(중복되는 경우)

공이 1개 들어 있는 상자는 3번, 공이 2개 들어 있는 상자는 2번 선택되어야 한다.

따라서 3번 중 공이 2개 들어 있는 상자가 선택되지 않을 경우를 고르는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

이고 해당 경우 다른 상자를 선택할 경우의 수는 2이다. 따라서 전체 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{81 + 27 - 6}{216} = \frac{102}{216} = \frac{17}{36}$$

이다.

문제 코멘트

포함 배제의 원리를 바탕으로 문제를 접근했으면 ‘이게 왜 28번?’이라는 생각 한 줄과 함께 쉽게 해결할 수 있었을 것이나, 대다수의 학생은 그러지 못했을 것이기에 예상 정답률은 약 30%가 찍히는 문제이다.

결국 중요한 것은 ‘어느 상황이 우리가 원하는 경우가 충족이 되는 상황인가?’를 바탕으로 문제를 접근하는 것이고, 여기까지 생각이 미치면 자연스레

1. 공이 2개 들어 있는 상자가 시행이 끝난 후 공이 4개가 들어 있는 경우

2. 공이 1개 들어 있는 상자가 시행이 끝난 후 공이 4개가 들어 있는 경우

로 케이스를 나눈 뒤, 중복되는 경우를 제외하는 식의 풀이 방향이 자연스레 떠올랐을 것.

그 뒤에는 Just 계산.

29번: 351

(i) 파란색 공을 받는 학생이 1명인 경우

파란색 공을 받을 학생 1명을 고르는 경우의 수는 3 이고, 해당 학생은 적어도 1 개의 흰색 공을 받아야 한다.

이때 남은 흰색 공 3 개와 검은색 공 3 개를 A, B, C에게 나누어 주는 전체 경우의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_3 = 100$$

이다. 이때 어느 한 명의 학생이 아무 공을 받지 못하는 경우의 수는

$$2 \times {}_2H_3 \times {}_2H_3 = 32$$

이고, 두 명의 학생이 모두 아무 공을 받지 못하는 경우의 수는 1 이다. 따라서 전체 경우의 수는

$$3 \times (100 - 32 + 1) = 207$$

이다.

(ii) 파란색 공을 받는 학생이 2명인 경우

파란색 공을 받을 학생 2명을 고르는 경우의 수는 3 이고, 해당 학생은 적어도 1 개의 흰색 공을 받아야 한다.

이때 남은 흰색 공 2 개와 검은색 공 3 개를 A, B, C에게 나누어 주는 전체 경우의 수는

$${}_3H_2 \times {}_3H_3 = 60$$

이다. 이때 파란색 공을 받지 못한 학생이 아무 공을 받지 못하는 경우의 수는

$${}_2H_2 \times {}_2H_3 = 12$$

이므로 따라서 전체 경우의 수는

$$3 \times (60 - 12) = 144$$

이고 구하는 경우의 수는

$$207 + 144 = 351$$

이다.

문제 코멘트

확률과 통계의 기본은 ‘어떤 것을 기준으로 케이스를 나눌 것인가?’에 대한 사고이다.

그리고 이 문제 역시 이것이 매우 크리티컬한 포인트로 작용했던, 예상 정답률 10% 가량의 문제.

파란색 공에 대한 제약이 가장 강하게(파란색 공을 받는 학생은 무조건 흰색 공도 받음) 걸려 있고, 공의 개수 역시 파란색 공이 가장 적으므로 파란색 공을 나누어 주는 것을 바탕으로 케이스를 나누어 보리라는 생각을 할 수 있어야 한다.

TEAM SUDO

30번: 65

이다. 따라서

$$g(y) = P(0 \leq x \leq 4)$$

이고, 이는 연속확률변수 Y 의 확률밀도함수이므로

$$4 \times P(0 \leq x \leq 4) = 1$$

인 것을 알 수 있으며, 이에 따라

$$P(0 \leq x \leq 4) = \frac{1}{4}$$

이다. 그리고

$$P(0 \leq x \leq 4) = \frac{1}{2} \times 4 \times a = 2a$$

이므로

$$2a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

이다. 함수 $f(x)$ 는 연속확률변수 X 의 확률밀도함수이므로

$$P(0 \leq x \leq b) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} ab \times b = \frac{1}{8} ab^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} b^2 = 1 \Rightarrow b = 8$$

이다. 따라서 구하는 값은 $8\left(\frac{1}{8} + 8\right) = 65$ 이다.

문제 코멘트

대다수의 학생들이 ‘겨우 이게 30번?’이라 생각해 만만히 보고 접근했다가 풀이 방향의 가닥조차 잡지 못한 채 답을 내는 데 실패했을, 예상 정답률 5% 가량의 문제이다.

이 문제의 핵심은 $g(y)$ 의 값은 상수라는 것을 파악하는 것인데, 추가적으로 그 ‘상수’는 $f(x)$ 에 대한 정보를 내포하고 있으므로 전체 확률의 합은 1이라는 연속확률변수의 성질을 이용해 상수 $g(y)$ 의 값을 구하고, 그 값과 $f(x)$ 그 자체를 이용해 미지수 2개의 값을 구해주면 끝.

잊지 말자. 확률변수가 등장하면 그 모든 확률의 합은 1이고, 이는 문제를 해결하는 데 매우 강력한 단서가 되리라는 걸.

확률과 통계 총평

확률과 통계는 22/23학년도 수능 기준 약간 쉬운 난이도이고, 24/25학년도 수능 기준 매우 어려운 난이도를 가지고 있습니다. 대략 23학년도 9월 모의평가/25학년도 6월 모의평가와 비슷한 난이도라고 생각을 하시면 되겠습니다.

모든 문제에서 강조되던 포인트는(특히 30번) 어떤 것을 기점으로 문제에 접근해 나갈 것인가?이고, 이는 앞으로 여러분이 어떤 문제를 풀게 되던 간에 고려해야 할 지점에 해당하므로, 해결하지 못한 문제가 있다면 이를 바탕으로 해설과 함께 충분히 고민해 보는 시간을 가져 보기 바랍니다.

또한 이전 회차들과는 다르게 이번 회차는 나름 합리적인(25년 3월/5월 모의고사와 유사하거나 약간 쉬운) 난이도를 가지고 있으므로, 이 정도의 세트는 충분히 출제될 수 있다는 것을 염두에 두고 가셔야 합니다.

미적분

23번: ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{\{\ln(2x+1)\}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^2 \times \left(\frac{x}{\ln(2x+1)} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

24번: ③

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t^2 + 2x + 4)e^{x-1} + 1}{\frac{1}{t+1} + 2}$$

t = 1 일 때는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7e^{1-1} + 1}{\frac{5}{2}} = \frac{16}{5}$$

이다.

25번: ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \cos \frac{\pi k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \frac{k}{n} \pi \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x \cos \pi x dx \end{aligned}$$

이고 부분적분하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos \pi x dx &= \left[\frac{x}{\pi} \sin \pi x \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2} \end{aligned}$$

이다.

문제 코멘트

가끔 이거 어떻게 구하는건지 까먹는 사람이 있던데
까먹었다면 확통책 펼치는것도 좋은 방법입니다.

26번: ⑤

먼저 $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$ 를 이용해 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라
하고 식을 전개하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+2} - a_n} \times \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{2d} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \end{aligned}$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} \dots \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}}$$

에서 $\frac{1}{a_1}$ 과 $\frac{1}{a_2}$ 를 제외한 다른 항은 모두 소거되는 형태이므로

$$\frac{1}{2d} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \times \frac{1}{2d}$$

이다. $a_1 a_2 = 1$ 이므로

$$\frac{a_1 + a_2}{2d} = \frac{5}{6} \Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{5}{3}d$$

이고 $a_2 = a_1 + d$ 이므로

$$a_1 + a_1 + d = \frac{5}{3}d \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}d$$

이다.

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= \frac{1}{3}d \times \frac{4}{3}d = 1 \\ \Rightarrow d &= \frac{3}{2} \quad (\text{문제의 조건에 의하여 공차는 양수}) \\ \therefore a_3 &= a_1 + 2d = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

문제 코멘트

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+2}}$ 를 전개하는 법이 기억 안난다면 썬을 펼치자.

TEAM SUDO

27번: ②

$$\begin{aligned}f'(x) &= (-2x + k)e^{-x^2 + kx} \\ f''(x) &= (4x^2 - 4kx + k^2 - 2)e^{-x^2 + kx}\end{aligned}$$

이므로 두 실수 α 와 β 는 각각 방정식

$$4x^2 - 4kx + k^2 - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

의 두 실근이다.

$$f'(x) = (-2x + k)e^{-x^2 + kx}$$

에 의하여

$$\begin{aligned}x < \frac{1}{2}k &\Rightarrow f'(x) > 0 \\ x \geq \frac{1}{2}k &\Rightarrow f'(x) \leq 0\end{aligned}$$

임을 알 수 있고, 따라서

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx &= \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}k} f'(x) dx - \int_{\frac{1}{2}k}^{\beta} f'(x) dx \\ &= f\left(\frac{1}{2}k\right) - f(\alpha) - \left\{f(\beta) - f\left(\frac{1}{2}k\right)\right\} \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

이다. 여기서 두 실수 α 와 β 는 방정식

$$4x^2 - 4kx + k^2 - 2 = 0$$

의 두 실근이므로 $\frac{1}{2}k$ 에 대하여 대칭이다. 함수 $f(x)$ 또한

$x = \frac{1}{2}k$ 에 대하여 대칭성을 가지므로

$$f(\alpha) = f(\beta)$$

임을 알 수 있다. 이를 이용해 ②을 다시 풀어보면

$$f\left(\frac{1}{2}k\right) - f(\alpha) - \left\{f(\beta) - f\left(\frac{1}{2}k\right)\right\} = 2\left\{f\left(\frac{1}{2}k\right) - f(\alpha)\right\}$$

이다. 따라서

$$2\left\{f\left(\frac{1}{2}k\right) - f(\alpha)\right\} = 2(\sqrt{e} - 1)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}k\right) - f(\alpha) = \sqrt{e} - 1$$

이고 ①에 의하여

$$\begin{aligned}4\alpha^2 - 4k\alpha + k^2 - 2 &= 0 \\ \Rightarrow e^{-\alpha^2 + k\alpha} &= e^{\frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{4}k^2} - e^{\frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}} - 1 \\ \Rightarrow e^{\frac{1}{4}k^2} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) &= e^{\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \Rightarrow k &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

이다.

문제 코멘트

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{2}k$ 에 대하여 대칭이라는 점을 통해 α 와 β 사이의 관계를 얻어낼 수 있어야 했고 이를 통하여 어떻게 하면 주어진 식을 간소화해서 최소한의 계산을 통해 결과를 얻어낼 수 있을지에 대해 생각했어야 했다.

참고

$-x^2 + kx = g(x)$ 라 둘 때,

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{g(x)} \\ \Rightarrow f'(x) &= g'(x)e^{g(x)} \\ \Rightarrow f''(x) &= \{g''(x) + (g'(x))^2\}e^{g(x)}\end{aligned}$$

이고 $g''(x)$ 는 상수이므로 최종적으로 $f''(x)$ 도 원함수와 똑같은

$x = \frac{1}{2}k$ 에 대하여 대칭성을 지님을 알 수 있다.

28번: ⑤

먼저 함수 $f(x)$ 에서 $x \leq 0$ 일 때부터 살펴보면 모든 음의 정수 m 에 대하여

$$\begin{aligned} \int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi} f(x)dx &= \int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi} \{a \sin x + |\sin x|\} dx \\ &\equiv \int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi} |\sin x| dx = 4 \end{aligned}$$

이다. 따라서 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 는 $x \leq 0$ 에서 주기 2π 마다 4씩 증가하는 함수임을 알 수 있고, 따라서 충분히 큰 자연수 n 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = n$$

을 만족시키는 음수 x 는 존재하지 않는다.

따라서 이 때의 $\int_0^x f(t)dt = n$ 를 만족시키는 실수 x 는

$x > 0$ 에서 존재해야 하면 따라서 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 는 $x > 0$ 에서 주기인 2π 마다 증가해야만 한다.

따라서

$$\begin{aligned} \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} f(x)dx &= \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \{\sin x + b|\sin x|\} dx \\ &= \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} b|\sin x| dx > 0 \\ \Rightarrow b &> 0 \end{aligned}$$

이다. 만약 $b > 1$ 일 경우 모든 양의 실수 x 에 대하여

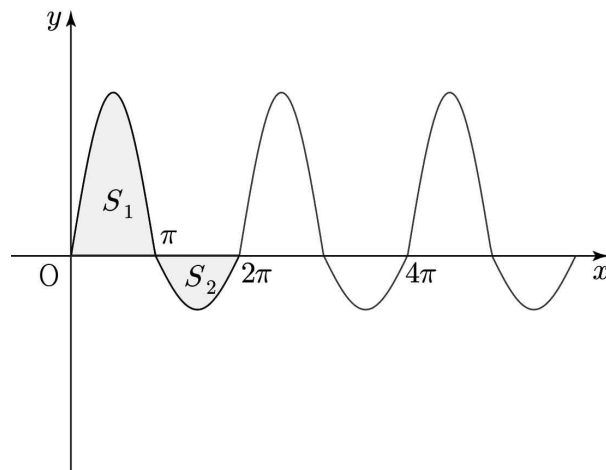
$$f(x) = \sin x + b|\sin x| > 0$$

이므로 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 는 $x > 0$ 에서 감소하는 부분이 존재하지 않는다. 따라서 충분히 큰 임의의 자연수 n 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = n$$

를 만족시키는 실수 x 의 개수는 오직 한 개이므로 불가능하다.

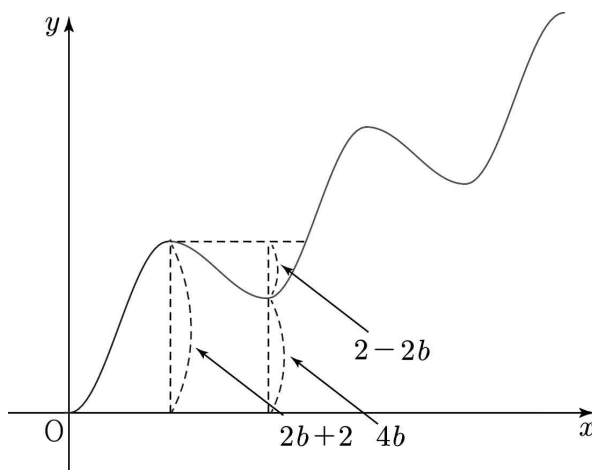
즉, $b < 1$ 이고 함수 $f(x)$ 의 그래프는 $x > 0$ 에서 다음과 같다.



여기서 S_1 과 S_2 의 넓이를 각각 계산하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\pi (\sin x + b|\sin x|)dx = (b+1) \int_0^\pi \sin x dx \\ &= 2b+2 \\ S_2 &= \int_\pi^{2\pi} (\sin x + b|\sin x|)dx = (1-b) \int_\pi^{2\pi} \sin x dx \\ &= 2b-2 \end{aligned}$$

이고, 함수 $f(x)$ 의 주기는 2π 이므로 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 는 다음과 같이 주기 2π 마다 S_1 만큼 증가, S_2 만큼 감소를 반복한다.



따라서 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 의 $x > 0$ 에서 극댓값은

$$2b+2, 6b+2, 10b+2, 14b+2 \dots$$

이고 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 의 $x > 0$ 에서 극솟값은

$$4b, 8b, 12b, 16b \dots$$

이다.

TEAM SUDO

충분히 큰 임의의 자연수 n 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = n$$

의 $x > 0$ 에서 실근의 개수가 2는 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 의 그래프와 직선 $y = n$ 이 접해야 하고, 그 때 교점의 개수가 2가 됨을 알 수 있고,

따라서 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 의 극값의 y 좌표인

$$2b+2, 6b+2, 10b+2, 14b+2 \dots$$

$$\Rightarrow (4n-2)b+2 \text{ (} n \text{은 자연수)}$$

와

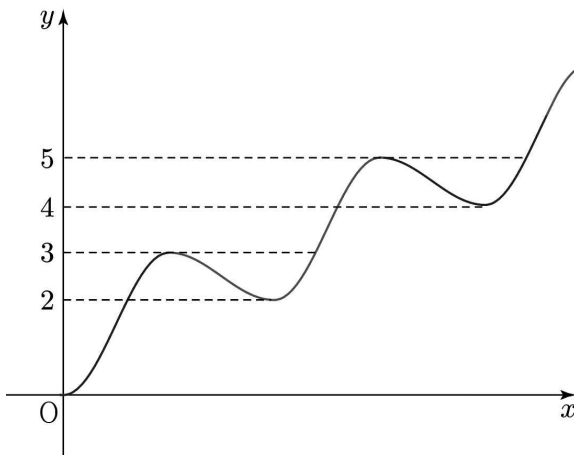
$$4b, 8b, 12b, 16b \dots$$

$$\Rightarrow 4nb \text{ (} n \text{은 자연수)}$$

는 모두 자연수이며, 작은수부터 크기순으로 나열했을 때, 각 항의 차는 1이어야 한다.

$$(4n-2)b+2 \text{와 } 4nb \text{의 간격차는 } 2-2b.$$

즉 이를 만족시키기 위한 실수 b 의 값은 $\frac{1}{2}$ 이고, 다음과 같은 상황이다.



따라서 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = n$$

의 실근의 개수는 $x > 0$ 에서 2가 나오고

$$\int_0^x f(t)dt = 1$$

의 실근의 개수는 $x > 0$ 에서 1이다.

모든 자연수 n 에 대하여 조건을 만족시켜야 하므로 $x \leq 0$ 에서

$\int_0^x f(t)dt = 1$ 을 만족시키는 실수 x 가 오직 하나만 존재해야 한다.

만약 $\int_0^x f(t)dt = 1$ 를 만족시키는 음수 x 에서 $\int_0^x f(t)dt$ 가 극댓값을 가지는 경우가 아닐 경우, 방정식

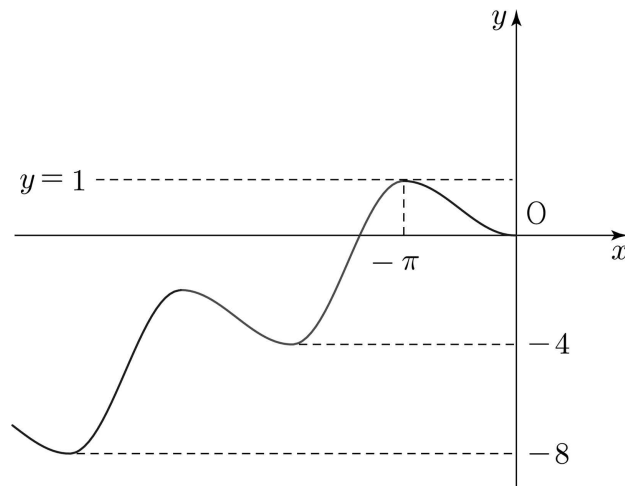
$$\int_0^x f(t)dt = 1$$

의 음의 실근은 2개 이상이 되므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 이때, x 는 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 가 $x < 0$ 에서 갖는 극댓값중

가장 큰 값, 즉, $x = -\pi$ 일 때로, 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 의 그래프는

$x < 0$ 에서 다음과 같다.



$$\int_0^{-\pi} f(t)dt = 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^{-\pi} f(t)dt = \int_0^{-\pi} (a \sin x + |\sin x|)dx$$

$$\Rightarrow (a-1) \int_0^{-\pi} \sin x dx = 2a-2 = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

이다. 따라서

$$a \times b = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

문제 코멘트

결국 삼각함수가 가진 주기성이라는 특성이 어떤식으로 사용되는지에 대한 생각이 필요하다. 주기성을 가진 함수를 적분했을 때, 어떤식으로 나타나는지에 대한 충분한 이해를 갖도록 하자.

29번: 32

두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 모두 등비수열이므로 수열 $\{a_nb_n\}$ 또한 등비수열이다. 또한 두 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

모두 수렴하므로 각각의 공비를 r, R 이라 했을 때,

$$-1 < r < 1, -1 < R < 1$$

이다. 따라서 등비수열 $\{a_nb_n\}$ 의 공비는 rR 로

$$-1 < rR < 1$$

으로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 또한 수렴한다.

$$\begin{aligned} 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n| \\ \Rightarrow 5 \times \frac{a_1b_1}{1-rR} &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n| \end{aligned}$$

이고 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n| > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a_1b_1}{1-rR} &> 0 \\ \Rightarrow a_1b_1 &> 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이다.

만약 $rR > 0$ 일 경우 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n|$ 이므로

주어진 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $rR < 0$ 이다.

따라서 수열 $|a_nb_n|$ 은 초항이 a_1b_1 , 공비가 $-rR$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n| = \frac{a_1b_1}{1+rR}$$

이고

$$\begin{aligned} 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n| \\ \Rightarrow 5 \times \frac{a_1b_1}{1-rR} &= 3 \times \frac{a_1b_1}{1+rR} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5(1+rR) = 3(1-rR)$$

$$\Rightarrow rR = -\frac{1}{4} \cdots \textcircled{2}$$

이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + (b_n)^2 - 4b_n}{a_n}$$

의 값이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n| + (b_n)^2 - 4b_n}{a_n} = 0 \quad (\text{급수의 수렴조건})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(b_n)^2 - 4b_n}{a_n} + \frac{|a_n|}{a_n} \right\} = 0$$

으로

만약 수열 a_n 의 공비가 양수일 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(b_n)^2 - 4b_n}{a_n} - 1 \right\} = 0 \quad (a_1 > 0)$$

또는

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(b_n)^2 - 4b_n}{a_n} + 1 \right\} = 0 \quad (a_1 < 0)$$

이어야 한다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b_n)^2 - 4b_n}{a_n}$ 이 -1 또는 1 로 수렴할 수 없으므로

수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 음수이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(b_n)^2 - 4b_n}{a_n} + \frac{|a_n|}{a_n} \right\}$$

에서 $\frac{|a_n|}{a_n}$ 의 값은 자연수 n 의 짝홀성에 따라 -1 과 1 이 번갈아

나옴을 알 수 있다. 따라서 이 값이 수렴하기 위해선

$$\frac{(b_n)^2}{a_n} = -\frac{|a_n|}{a_n} \text{ 또는 } \frac{-4b_n}{a_n} = -\frac{|a_n|}{a_n}$$

임을 알 수 있다.

TEAM SUDO

만약

$$\frac{(b_n)^2}{a_n} = -\frac{|a_n|}{a_n}$$

일 경우

$$\frac{\{b_1R^{n-1}\}^2}{ar^{n-1}} = \pm (-1)^n$$

를 만족시키기 위해서 $R^2 = -r$ 이어야 한다. 이 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(b_n)^2 - 4b_n}{a_n} - \frac{|a_n|}{a_n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4b_n}{a_n}$$

이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4b_n}{a_n}$ 의 값이 음의 무한대로 발산하므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서

$$\frac{-4b_n}{a_n} = -\frac{|a_n|}{a_n}$$

이고, $-4b_n = -|a_n|$ 이므로

$$-r = R, \quad -4b_1 = -|a_1|$$

이다. 또한 $-r = R$, $\textcircled{L}$ 에 의하여

$$r = -\frac{1}{2}, \quad R = \frac{1}{2} \quad (\text{수열 } \{a_n\} \text{의 공비는 음수})$$

이고 $-4b_1 = -|a_1|$, $\textcircled{O}$ 에 의하여

$$4b_1 = a_1$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + (b_n)^2 - 4b_n}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_n)^2}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \end{aligned}$$

이다.

수열 $\frac{(b_n)^2}{a_n}$ 은 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이고 초항이 $\frac{(b_1)^2}{a_1} = \frac{a_1}{16}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_n)^2}{a_n} = \frac{a_1}{16} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{a_1}{24}$$

이고 수열 $(a_n)^2$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$ 이고 초항이 $(a_1)^2$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = (a_1)^2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} (a_1)^2$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_n)^2}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \\ \Rightarrow \frac{a_1}{24} &= \frac{4}{3} (a_1)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{a_1} &= 32 \end{aligned}$$

이다.

문제 코멘트

최종적으로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + (b_n)^2 - 4b_n}{a_n}$ 에 대한 처리가 가장 중요한 문제였다. 급수가 수렴하기 위한 수렴조건과 짝홀로 번갈아서 -1 과 1 이 반복될 때 이를 상쇄시키기 위한 수열이 존재함을 생각하며 풀었어야 했다. 계산 자체는 그렇게 많지 않지만 생각해야 할 부분이 꽤 있었기에 쉽지 만은 않았을 것이다.

30번: 7

두 곡선 $y=t^2f(x-t)$ 와 $y=ae^x$ 가 접할 경우 이 두 곡선을 각각 x 축으로 t 만큼 평행이동 시킨 두 곡선 $y=t^2f(x)$ 와 $y=ae^{x+t}$ 도 접함을 알 수 있다. (동치조건)

따라서 두 곡선 $y=t^2f(x)$ 과 $y=ae^{x+t}$ 이 접하기에 접점의 x 좌표를 k 라 할 때, $x=k$ 에서 각각의 미분계수도 같고 따라서

$$t^2f(k)=ae^{k+t}\dots \textcircled{㉠}$$
$$t^2f'(k)=ae^{k+t}\dots \textcircled{㉡}$$

이다. 이후 ㉠과 ㉡을 연립할 때,

$$f(k)=f'(k)$$

임을 알 수 있다. 따라서 k 는 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=f'(x)$ 의 교점의 x 좌표로 t 와 상관없이 변하지 않는 상수임을 알 수 있다.

$a=g(t)$ 이므로 ㉠은

$$t^2f(k)=g(t)e^{k+t}$$

이고 이를 t 에 대하여 미분시

$$2tf(k)=g'(t)e^{k+t}+g(t)e^{k+t}$$

이므로 (k 와 $f(k)$ 모두 상수임을 유의해서 미분하자.)

$$\Rightarrow g'(t)e^{k+t}=(2t-t^2)f(k) \quad (\because \textcircled{㉠})$$
$$\Rightarrow \frac{g'(t)e^{k+t}}{g(t)e^{k+t}}=\frac{(2t-t^2)f(k)}{t^2f(k)}=\frac{2}{t}-1$$

따라서

$$\frac{g'(8)}{g(8)}=-\frac{3}{4}$$
$$\therefore p+q=7$$

이다.

문제 코멘트

결국 방정식 $f(x)=f'(x)$ 의 실근 자체가 t 에 따라 변하지 않는 상수임을 명심하고 $g(8)$ 과 $g'(8)$ 모두 단일적으로 표현하기 어려우니 문제에서 요구하는 값인 $\frac{g'(8)}{g(8)}$ 을 구하는데 초점을 맞췄다면 30번치고는 꽤나 쉽게 풀 수 있었을 것이다.

만약 오직 계산으로 풀게 된다면...

주어진 조건에 의하여

$$t^2f(x-t)=t^2\ln(e^{2x-2t}+e^{x-t})$$

두 곡선 $y=t^2\ln(e^{2x-2t}+e^{x-t})$ 과 $y=ae^x$ 이 접하기에 접점의 x 좌표를 k 라 할 때, $x=k$ 에서 각각의 미분계수도 같고 따라서

$$t^2\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})=g(t)e^k \dots \textcircled{㉠}$$
$$t^2\times\frac{2e^{2k-2t}+e^{k-t}}{e^{2k-2t}+e^{k-t}}=g(t)e^k \dots \textcircled{㉡}$$

이후 ㉠과 ㉡을 연립하면

$$\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})=\frac{2e^{2k-2t}+e^{k-t}}{e^{2k-2t}+e^{k-t}}$$

를 알 수 있다. 이제 ㉠을 t 에 대하여 미분하면

$$2t\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})+t^2\times\frac{2e^{2k-2t}+e^{k-t}}{e^{2k-2t}+e^{k-t}}\times\left(\frac{dk}{dt}-1\right)=g'(t)e^k+g(t)e^k\times\frac{dk}{dt}$$
$$\Downarrow$$
$$2t\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})-t^2\times\frac{2e^{2k-2t}+e^{k-t}}{e^{2k-2t}+e^{k-t}}$$
$$=g'(t)e^k+\frac{dk}{dt}\left\{g(t)e^k-t^2\times\frac{2e^{2k-2t}+e^{k-t}}{e^{2k-2t}+e^{k-t}}\right\}$$

이고 ㉠에 의하여 $g(t)e^k-t^2\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})=0$ 이므로

$$2t\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})-t^2\times\frac{2e^{2k-2t}+e^{k-t}}{e^{2k-2t}+e^{k-t}}=g'(t)e^k$$

이다. $\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})=\frac{2e^{2k-2t}+e^{k-t}}{e^{2k-2t}+e^{k-t}}$ 에 의하여

$$(2t-t^2)\times\ln(e^{2k-2t}+e^{k-t})=g'(t)e^k$$

이고 이를 ㉠에 나눠준다면

TEAM SUDO

$$\frac{2t-t^2}{t^2} \times \frac{\ln(e^{2k-2t} + e^{k-t})}{\ln(e^{2k-2t} + e^{k-t})} = \frac{g'(t)e^k}{g(t)e^k}$$
$$\Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{2}{t} - 1$$

이므로

$$\frac{g'(8)}{g(8)} = \frac{2}{8} - 1 = -\frac{3}{4}$$
$$\therefore p+q=7$$

이다.

미적분 총평

미적분은 전회차인 3회에 비해서는 확실히 쉽게 출제되었다. 전반적으로 공통이 어려웠기에 난이도를 맞추려했고, 그런점에서 30번이 다소 간단하게 출제되었다.

물론 수능에서는 이보다 더 어려운 미적분 세트가 출시될 확률이 높다고도 할 수 있기에, 여러모로 미적분에 대해서만은 꽤 집중적인 대비가 중요할 것이다.

문항들은 전체적으로 배워갈 구석이 많도록 구성했다. 27번의 대칭성이나, 28번의 삼각함수를 적분했을 때 상황, 29번의 공비를 통한 상쇄, 30번의 음함수 미분에서의 상수 취급등 난이도 자체는 그리 높지 않은 세트였지만 풀고 얻어갈 수 있는 부분은 많았을 것이다.

기하

23번: ④

점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(2, -1, 3)$ 이므로, 선분 BC의 길이는 점과 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\sqrt{(-2+1)^2+(1-5)^2+(-3+3)^2}=5$$

24번: ②

포물선에서의 접선 공식에 의하여 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

이다. 따라서, y 절편은 $\frac{3}{2}$

25번: ④

주어진 식을 제공하면

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}&=16 \\ \rightarrow 4+9+2\vec{a}\cdot\vec{b}&=16(\because |\vec{a}|^2=4, |\vec{b}|^2=9) \\ \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}&=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} |2\vec{a}-\vec{b}|&=\sqrt{4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}} \\ &=\sqrt{16+9-6} \\ &=\sqrt{19} \end{aligned}$$

26번: ①

타원 C 의 장축의 길이를 $2a$ 라 하면, 타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AF}&=a-c=1 \\ \rightarrow \overline{PF}&=2=2a-2c \\ \rightarrow \overline{PF'}&=2c=\overline{FF'} \end{aligned}$$

삼각형 PFA에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle PFA)&=\frac{2^2+1^2-\sqrt{6}^2}{2\times 2\times 1}=-\frac{1}{4} \\ \rightarrow \cos(\angle PFF')&=\cos(\pi-\angle PFA)=\frac{1}{4} \\ \rightarrow \overline{PF'}&=\overline{FF'}=\frac{\left(\frac{\overline{PF}}{2}\right)}{\cos(\angle PFF')}=4 \end{aligned}$$

따라서, 타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} 2a&=\overline{PF}+\overline{PF'}=6 \\ \rightarrow a&=3, c=2 \\ \rightarrow 2\sqrt{a^2-c^2}&=2\sqrt{5} \end{aligned}$$

27번: ③

점 A에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 H라 하고, 평면 ABP와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자.

$$\sin\theta=\frac{\overline{AO}}{\overline{AH}}=\frac{2}{\overline{AH}}\geq\frac{2}{3}(\because \overline{AH}\leq 3)$$

이므로, $H=Q$ 이다. 이때, 직선 BQ가 점 Q에서 원 C 에 접하므로

$\angle OQB=\frac{\pi}{2}$, 삼수선의 정리에 의하여 $\angle AQB=\frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \overline{BQ}&=\sqrt{5^2-\sqrt{5}^2}=2\sqrt{5}\left(\because \angle OQB=\frac{\pi}{2}\right) \\ \rightarrow \triangle ABQ&=\frac{1}{2}\times \overline{AQ}\times \overline{BQ}=3\sqrt{5}\left(\because \angle AQB=\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

문제 코멘트

최대/최소 문제는 고정값을 중심으로 구하는 값을 관찰 및 변형해야 함을 염두에 두자.

TEAM SUDO

28번: ④

Q, F가 점 P를 중심으로 하는 원 위의 점이므로 $\overline{PQ} = \overline{PF}$
따라서, 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PF'} - \overline{PF} &= \overline{QF'} + \overline{PQ} - \overline{PF} = \overline{QF'} = 2\sqrt{5} \\ \rightarrow \overline{QF} - \overline{QF'} &= 2\sqrt{5} \\ \rightarrow \overline{QF} &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\angle QRF = \theta$ 라 하자. $\angle QRF = \pi - \theta$ 이므로
원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여 $\angle QPF = 2\theta$

$$\begin{aligned}\angle PQF &= \frac{\pi - 2\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta (\because \overline{PQ} = \overline{PF}) \\ \rightarrow \angle F'QF &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2} + \theta\end{aligned}$$

이때, $\overline{QF'} = 2\sqrt{5}$ 이고 삼각형 $QF'R$ 의 외접원의 반지름의 길이가
 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ 이므로, 사인법칙에 의하여

$$\sin \theta = \frac{\overline{QF'}}{2R} = \frac{2\sqrt{5}}{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{4}{5}$$

따라서, 삼각형 QFF' 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{FF'}^2 &= \overline{QF}^2 + \overline{QF'}^2 - 2 \times \overline{QF} \times \overline{QF'} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= 80 + 20 - 80 \times \left(-\frac{4}{5}\right) \left(\because \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta\right) \\ &= 164 \\ \rightarrow 4c^2 &= 164, \quad c^2 = 41 \\ \rightarrow k^2 &= c^2 - 5 = 36\end{aligned}$$

문제 코멘트

이차곡선은 정의를 우선해 생각하는 것이 좋다. 정의를 이용해
그어지지 않은 선분의 길이를 알 수 있고, 삼각형 QRF' 에 대한
조건과 연관지어 활용해 보자.
한 변의 길이와 외접원의 반지름의 길이가 주어졌으므로,
사인법칙을 활용하는 것이 좋아 보인다.

29번: 13

$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \vec{v}_1, \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \vec{v}_2$ 라 하자. $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 1$ 이므로,
벡터 $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ 는 두 벡터 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 가 이루는 각을 이등분한다.
 $\frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ 이므로, 직선 AP는 각 BAC를 이등분한다.
 $\angle BAP = \angle PAC = \theta$ 라 하면,

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}} &= \frac{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = 2 \\ \rightarrow |\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{AC}| &= 1 : 2 \\ \rightarrow |\overrightarrow{BP}| : |\overrightarrow{PC}| &= 1 : 2 (\because \angle BAP = \angle PAC)\end{aligned}$$

점 P는 선분 BC 위에 있으므로

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\overrightarrow{AP} &= \frac{3}{2} \times \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \rightarrow |\overrightarrow{AB}| &= 1, \quad |\overrightarrow{AC}| = 2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 5 - \frac{16}{5} \left(\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{5}\right) \\ &= \frac{9}{5} \\ \rightarrow |\overrightarrow{BC}| &= \frac{3\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{BP}| : |\overrightarrow{PC}| = 1 : 2$ 이므로 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} = \frac{12}{5} \\ \rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PC} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{8}{5} = \frac{q}{p} \\ \rightarrow p &= 5, \quad q = 8 \\ \rightarrow p + q &= 13\end{aligned}$$

문제 코멘트

벡터는 수식적 조작과 도형적 해석을 동시에 요한다. 주어진
조건을 수식적으로 나타내기 힘들다면, 주어진 그대로를
도형으로 나타내서 성질을 뽑아내는 것을 염두에 두자.

30번: 2

점 A가 평면 α 위에 있고 두 점 B, C에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 각각 두 점 B', C'이므로 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 AB'C'이다. $\triangle ABC = 4$ 이고
두 평면 ABC와 α 가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 ㉠

$$\triangle AB'C' = \triangle ABC \times \cos \frac{\pi}{3} = 2$$

점 C에서 평면 ABC'에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
삼각형 ABC의 평면 ABC' 위로의 정사영은 삼각형 ABH이다.
두 평면 ABC와 ABC'이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\triangle ABH = \triangle ABC \times \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

$\overline{AC'} \perp \overline{CC'}$ 이고 점 C에서 평면 ABC'에 내린 수선의 발이
점 H이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC'} \perp \overline{HC'}$ 이다.

이때, $\angle C'AB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 두 직선 BA와 HC'이 평행하다.

즉, $\triangle ABC' = \triangle ABH = 2\sqrt{2}$ 이므로
두 평면 ABC'과 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \rightarrow \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$\overline{BA} \perp \overline{AC'}$ 이고 직선 BB'이 평면 α 에 수직이므로 삼수선의 정리에
의하여 $\overline{B'A} \perp \overline{AC'}$, 두 평면 ABC'과 α 가 이루는 예각의 크기가
 $\angle B'AB$ 이다. $\angle B'AB = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{B'A} &= 2 (\because \overline{BB'} = 2) \\ \rightarrow \overline{BA} &= 2\sqrt{2} \\ \rightarrow \overline{AC'} &= 2 (\because \triangle ABH = 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

점 H에서 직선 BA에 내린 수선의 발을 H'이라 할 때, 두 직선
BA와 HC'이 평행하므로 $\overline{H'H} = \overline{AC'} = 2$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \overline{H'H} \times \tan \frac{\pi}{4} = 2 (\because \text{㉠}) \\ \rightarrow \overline{CC'} &= 2\sqrt{2} \left(\because \angle HC'C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \right) \\ \rightarrow \triangle ACC' &= \frac{1}{2} \times \overline{AC'} \times \overline{CC'} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

점 B에서 평면 ACC'에 내린 수선의 발을 H''라 할 때,
 $\overline{BA} \perp \overline{AC'}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{H''A} \perp \overline{AC'}$ 이다.
이때, $\overline{AC'} \perp \overline{CC'}$ 이므로 두 직선 H''A, CC'이 평행하다.
즉, $\triangle AH''C = \triangle AH''C'$ 이고 $\overline{H''A} = \overline{BB'} = 2$ 이므로

$$\triangle AH''C = \triangle AH''C' = \frac{1}{2} \times \overline{HA} \times \overline{AC'} = 2$$

삼각형 ABC의 평면 ACC' 위로의 정사영이 삼각형 AH''C이므로,
두 평면 ABC와 ACC'이 이루는 예각의 크기를 θ' 이라 하면

$$\cos \theta' = \frac{\triangle AH''C}{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$$

따라서, 삼각형 ACC'의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \triangle ACC' \times \cos \theta' = \sqrt{2} \\ \rightarrow S^2 &= 2 \end{aligned}$$

문제 코멘트

교선이 명확하지 않은 채 이면각에 대한 정보를 활용할 때에는
정사영을 이용하는 것이 유리하다. 삼수선의 정리를 활용해
평행선을 찾은 후, 평행하다→넓이가 같다→정사영의 넓이와
연결해 도형에 관한 정보를 얻을 수 있다.

기하 총평

기하는 현재 통용되는 유형이 다소 고정된 만큼,
기출에서 다뤘던 소재라도 다소 표현이 바뀌거나(221126),
요소가 하나씩만 더해지더라도(250630) 정답물에 큰 변동을
보입니다.
이에, 유행과는 다소 낮설되, 교과 개념과 수능적 사고력에
집중했을 때 효과를 보도록 문항을 설계했습니다. 수능에서
다뤘던 범주를 벗어나는 발상이 필요하거나, 호흡이나 계산이
과도하게 길어 변별력이 있는 문항이 없도록 노력했기에,
(의도된 최대 계산량은 숫자 코사인법칙 2회+숫자 잔계산
정도입니다.)시험 당시와 이후 체감하는 난이도 차가 다소 클
것이라 사료됩니다. 또한, 출제 의도의 강조를 위해 교과
외적인 개념을 다루는, 소위 어둠의 스킬 또한 사용이
곤란하거나, 가능하더라도 교과서적 풀이에 비해 효율이 크게
떨어지게끔 설계하기 위해 노력했습니다. 과도하게 변별성을
추구하는 시험이 되지 않도록, 과거 수능에 가까운
난이도(25 < this < 22)로 연습하실 수 있도록 심혈을
기울였습니다.
이번 부영모가 여러분의 실력 증진에 도움이 되길 기도합니다.