제 2 교시

2025학년도 9월 고2 MAGNUS 모의고사 문제지

수학 영역

성명		수험 번호					—				

- ○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- ○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

  아름답게 빛나는 우리의 미래
- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

TEAM MAGNUS

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 27^{\frac{5}{6}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

2. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10}=64, \quad a_5 a_8 = 32$$

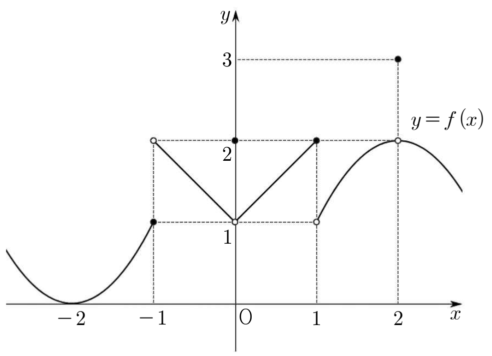
일 때, a_3의 값은? [2점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

4. 둘레의 길이와 넓이가 모두 16 인 부채꼴의 반지름의 길이는? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



$\lim_{x\to-1+} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 네 수 a, b, a^2+1, $7b$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

7. $\sin\theta\cos\theta<0$이고 $\tan\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $y=\sin(x-a)+b$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 함수의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치한다. $a+b$의 값은? [3점]

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

9. 1이 아닌 서로 다른 두 자연수 a, b가

$$\log_a b + 4\log_b a = 5$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 최솟값은? [3점]

① 10 ② 18 ③ 26 ④ 34 ⑤ 42

10. 양수 $a\,(a \neq 1)$에 대하여 $-1 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $f(x)=a^x+4a$가 최댓값 5를 가질 때, $f(-2a)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

11. $0 < x < 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos^2 x < \sin x$$

를 만족시키는 모든 x의 범위는 $a < x < b$이다. $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

12. 양수 $a\,(a \neq 1)$에 대하여 곡선 $y = a^{x-2}$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\,b)$를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점을 A'이라 하자. 점 A'이 곡선 $y = a^{x-2}$ 위의 점일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

13. 자연수 m에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{m}{k^2+4k+3}$$

를 만족시킨다. $a_m = \frac{43}{24}$일 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

14. $2 \le n \le 30$인 자연수 n에 대하여 $n^2-17n+66$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(k)=f(2k)$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

15. 두 상수 a, $b\,(b \geq 0)$에 대하여 함수

$$f(x)=4^{x}+4^{-x}-a\left(2^{x}+2^{-x}\right)+a+3$$

이 $x=b$에서 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 가질 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

16. 서로 다른 두 양수 $a\,(a \neq 1)$, k에 대하여 곡선 $y=a^{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(k,\ a^{k}\right)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하고, 점 B를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:2$이고 점 C의 x좌표와 y좌표의 합이 $5a$일 때, a^{k-1}의 값은? [4점]

① $\frac{14}{5}$ ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{18}{5}$ ④ 4 ⑤ $\frac{22}{5}$

17. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ f(x-4) & (x\geq 1) \end{cases}$$

가 $\lim_{x\to 1} g(x)=3$을 만족시킨다. $\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{g(x)-8}$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 t에 대하여 $f(2t)$의 최댓값은? [4점]

① 120 ② 144 ③ 168 ④ 192 ⑤ 216

18. 일반항이 $a_n=\frac{n^2+1}{n^2}$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n, 곱을 T_n이라 하자. 다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$S_n > T_n$ …… (*)

이 성립함을 증명하는 과정이다.

(ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=S_2=\frac{13}{4}$, (우변)$=T_2=\frac{5}{2}$이므로

(*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\,(k\geq 2)$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_{k+1}=1+\boxed{(가)}>0$이 2 이상의 모든 자연수 k에 대하여 성립하므로 부등식

$T_k a_{k+1}=T_{k+1}<S_k(1+\boxed{(가)})$

도 성립한다.

$n=k+1$일 때 (*)이 성립함을 보이자.

2 이상의 모든 자연수 k에 대하여

$S_k(1+\boxed{(가)})\leq S_{k+1}$ … ㉠

이 성립하면

$T_{k+1}<S_k(1+\boxed{(가)})\leq S_{k+1}$

이므로 (*)이 성립한다.

이때, 부등식

$(k+1)^2\{S_{k+1}-S_k(1+\boxed{(가)})\}$

$=\boxed{(나)}-S_k>\boxed{(나)}-S_k-\boxed{(다)}$

$=\sum_{m=1}^{k}\left(2m-\frac{1}{m^2}\right)\geq 0$

이 2 이상의 모든 자연수 k에 대하여 성립하므로 ㉠ 또한 성립한다. 따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 식은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\frac{g(p)}{f(p)}$의 값은? [4점]

① 20 ② 90 ③ 160 ④ 230 ⑤ 300

19. 세 정수 $a\,(a \neq 0)$, b, c에 대하여 함수 $f_n(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f_n(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & (n=1) \\ \left| f_{n-1}(x) \right| - 6 & (n \geq 2) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 함수 $y = f_n(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $f_1(\sqrt{3}) = 2$, $a_2 + a_3 = 6$이도록 하는 함수 $f_1(x)$에 대하여 모든 $f_1(-2)$의 값의 합은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

20. 두 자연수 a, b에 대하여 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x - b\pi) & (0 \leq x < \pi) \\ b\sin(x - a\pi) & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $y = |f(x)|$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $|f(\pi) - f(0)| = a$

ㄴ. 방정식 $f(x) = g(1)$을 만족시키는 실수 x가 존재할 때, $a+b$의 최솟값은 3이다.

ㄷ. 함수 $g(t)$의 치역의 원소 중 홀수인 것의 개수가 1이면 $a = b$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 상수 $k\,(k \neq 0)$에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=k\left(2^{kx}-1\right),\quad g(x)=k\left(2^{-kx}+3\right)$$

이라 하자. $-1 \le x \le 1$에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

의 최댓값과 최솟값의 차가 $|5k|$일 때, 4^k의 값은? [4점]

① $\dfrac{7-3\sqrt{5}}{8}$ ② $\dfrac{27-5\sqrt{29}}{2}$ ③ $\dfrac{17-4\sqrt{17}}{4}$

④ $\dfrac{7+3\sqrt{5}}{8}$ ⑤ $\dfrac{27+5\sqrt{29}}{2}$

단답형

22. 방정식

$$\frac{1}{2}+\log_4(x+1)=\log_2(x-3)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\left(2k^2+5k-3\right)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin b\pi x+b$가 $x=3$에서 최댓값 6을 가질 때, $12(a-b)$의 최댓값을 구하시오. [3점]

25. 두 양수 $a\,(a\neq 1)$, $b\,(b>2)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}\log_a(b-x) & (x<2)\\ -\log_a x+a+2 & (x\geq 2)\end{cases}$$

가 $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(b-x)=2a$를 만족시킬 때, $a\times b$의 값을 구하시오. [3점]

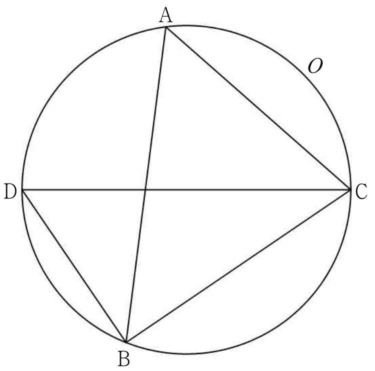
26. 다음 조건을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값 중 n번째로 작은 것을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

(가) a, b, c, d는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. (나) $a^3=b^3+c^3+d^3$

27. 그림과 같이 원 O에 내접하는 예각삼각형 ABC가 있다. 점 C와 원 O의 중심을 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 D라 하자.

$$15\sin(\angle \mathrm{ACD}) = 12\sin(\angle \mathrm{BDC}) = 10\sin(\angle \mathrm{ACD} + \angle \mathrm{BDC})$$

이고 삼각형 BCD의 넓이가 144일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [4점]



28. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x < 0$일 때 $f(x) = 2^{ax} + b$이고
모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f^{-1}(x)$이다.
(나) 모든 양수 x에 대하여 $f(x+1) - f(x) > 0$이다.

$f(a) = 0$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

29. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+a_n & (a_n \geq a_{n+1})\\ a_{n+1}+a_n & (a_n < a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=38$이도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$, $h(x)=|f(x)|\times g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $\lvert g(x)\rvert$, $h(x)$는 다항함수이다.
(나) $\displaystyle\lim_{x\to t}\frac{(x-a)^2h(x)}{\{g(x)-2f(b)\}^2}$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 t의 값은 $b+1$뿐이다.
(다) 모든 실수 k에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{\lvert g(x)\rvert+2f(b)}{f(x)}$ 의 값이 존재하고 그 값은 0보다 크다.

$g(a)=-2$일 때, $f(2a-b)$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.