

수 학 영 역

성명

--

수험 번호

					—				
--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

아름답게 빛나는 우리의 미래

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 27^{\frac{5}{6}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_{10} = 64, \quad a_5 a_8 = 32$

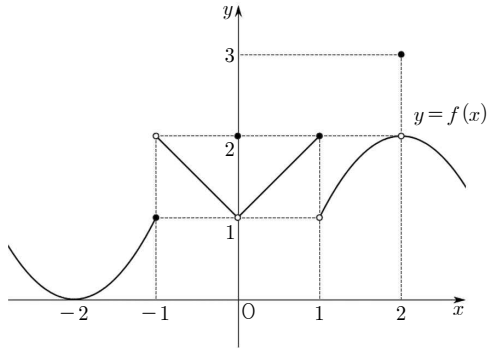
일 때, a_3 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

4. 둘레의 길이와 넓이가 모두 16 인 부채꼴의 반지름의 길이는?
[3점]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

5. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 네 수 $a, b, a^2+1, 7b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

7. $\sin \theta \cos \theta < 0$ 이고 $\tan \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$ 일 때, $\cos \theta$ 의 값은?

[3점]

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 두 정수 a, b 에 대하여 함수 $y = \sin(x-a)+b$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 함수의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 일치한다. $a+b$ 의 값은?

[3점]

- ① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

9. 1이 아닌 서로 다른 두 자연수 a, b 가

$$\log_a b + 4\log_b a = 5$$

를 만족시킬 때, $a+b$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 10 ② 18 ③ 26 ④ 34 ⑤ 42

10. 양수 $a(a \neq 1)$ 에 대하여 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 정의된 함수

$f(x) = a^x + 4a$ 가 최댓값 5를 가질 때, $f(-2a)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

11. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 부등식

$$\cos^2 x < \sin x$$

를 만족시키는 모든 x 의 범위는 $a < x < b$ 이다. $a+b$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

12. 양수 a ($a \neq 1$)에 대하여 곡선 $y = a^{x-2}$ 위의 점 $A(1, b)$ 를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점을 A' 이라 하자. 점 A' 이 곡선 $y = a^{x-2}$ 위의 점일 때, $b-a$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

13. 자연수 m 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{m}{k^2 + 4k + 3}$$

를 만족시킨다. $a_m = \frac{43}{24}$ 일 때, 상수 m 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

14. $2 \leq n \leq 30$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2 - 17n + 66$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $f(k) = f(2k)$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은? [4점]

- ① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

15. 두 상수 $a, b (b \geq 0)$ 에 대하여 함수

$$f(x) = 4^x + 4^{-x} - a(2^x + 2^{-x}) + a + 3$$

이 $x=b$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{4}$ 을 가질 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

16. 서로 다른 두 양수 $a (a \neq 1), k$ 에 대하여 곡선 $y = a^x$ 위의 점 $A(k, a^k)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하고, 점 B를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점을 C라 하자. $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 2$ 이고 점 C의 x 좌표와 y 좌표의 합이 $5a$ 일 때, a^{k-1} 의 값은? [4점]

- ① $\frac{14}{5}$ ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{18}{5}$ ④ 4 ⑤ $\frac{22}{5}$

17. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 1) \\ f(x-4) & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ 을 만족시킨다. $\lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x)}{g(x)-8}$ 의 값이
존재하지 않도록 하는 실수 t 에 대하여 $f(2t)$ 의 최댓값은?

[4점]

- ① 120 ② 144 ③ 168 ④ 192 ⑤ 216

18. 일반항이 $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터

제 n 항까지의 합을 S_n , 곱을 T_n 이라 하자. 다음은 2 이상의
자연수 n 에 대하여 부등식

$$S_n > T_n \dots\dots (*)$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n = 2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = S_2 = \frac{13}{4}, (\text{우변}) = T_2 = \frac{5}{2} \text{ 이므로}$$

(*)이 성립한다.

(ii) $n = k (k \geq 2)$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$a_{k+1} = 1 + \frac{1}{k^2} > 0$ 이 2 이상의 모든 자연수 k 에
대하여 성립하므로 부등식

$$T_k a_{k+1} = T_{k+1} < S_k (1 + \frac{1}{k^2})$$

도 성립한다.

$n = k+1$ 일 때 (*)이 성립함을 보이자.

2 이상의 모든 자연수 k 에 대하여

$$S_k (1 + \frac{1}{k^2}) \leq S_{k+1} \dots \textcircled{1}$$

이 성립하면

$$T_{k+1} < S_k (1 + \frac{1}{k^2}) \leq S_{k+1}$$

이므로 (*)이 성립한다.

이때, 부등식

$$\begin{aligned} & (k+1)^2 \{S_{k+1} - S_k (1 + \frac{1}{k^2})\} \\ &= \frac{(k+1)^2}{k^2} S_{k+1} - S_k > \frac{(k+1)^2}{k^2} S_k - S_k - \frac{(k+1)^2}{k^2} \\ &= \sum_{m=1}^k \left(2m - \frac{1}{m^2} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

이 2 이상의 모든 자연수 k 에 대하여 성립하므로

① 또한 성립한다. 따라서 $n = k+1$ 일 때도 (*)이
성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 식은 2 이상의 모든 자연수
 n 에 대하여 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$,

(다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $\frac{g(p)}{f(p)}$ 의 값은? [4점]

- ① 20 ② 90 ③ 160 ④ 230 ⑤ 300

19. 세 정수 $a(a \neq 0)$, b , c 에 대하여 함수 $f_n(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$f_n(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & (n=1) \\ |f_{n-1}(x)| - 6 & (n \geq 2) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 함수 $y = f_n(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 개수를 a_n 이라 할 때, $f_1(\sqrt{3}) = 2$, $a_2 + a_3 = 6$ 이도록 하는 함수 $f_1(x)$ 에 대하여 모든 $f_1(-2)$ 의 값의 합은? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

20. 두 자연수 a , b 에 대하여 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} a \cos(x - b\pi) & (0 \leq x < \pi) \\ b \sin(x - a\pi) & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. $|f(\pi) - f(0)| = a$
 ㄴ. 방정식 $f(x) = g(1)$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재할 때, $a + b$ 의 최솟값은 3이다.
 ㄷ. 함수 $g(t)$ 의 치역의 원소 중 홀수인 것의 개수가 1이면 $a = b$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 상수 $k(k \neq 0)$ 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 를

$$f(x) = k(2^{kx} - 1), \quad g(x) = k(2^{-kx} + 3)$$

이라 하자. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 함수

$$h(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

의 최댓값과 최솟값의 차가 $|5k|$ 일 때, 4^k 의 값은? [4점]

- ① $\frac{7-3\sqrt{5}}{8}$ ② $\frac{27-5\sqrt{29}}{2}$ ③ $\frac{17-4\sqrt{17}}{4}$
 ④ $\frac{7+3\sqrt{5}}{8}$ ⑤ $\frac{27+5\sqrt{29}}{2}$

단답형

22. 방정식

$$\frac{1}{2} + \log_4(x+1) = \log_2(x-3)$$

을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\sum_{k=1}^6 (2k^2 + 5k - 3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \sin b\pi x + b$ 가
 $x=3$ 에서 최댓값 6을 가질 때, $12(a-b)$ 의 최댓값을 구하시오.
 [3점]

25. 두 양수 $a (a \neq 1), b (b > 2)$ 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} \log_a(b-x) & (x < 2) \\ -\log_a x + a + 2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(b-x) = 2a$ 를
 만족시킬 때, $a \times b$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 다음 조건을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d 에 대하여
 $a+b+c+d$ 의 값 중 n 번째로 작은 것을 a_n 이라 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

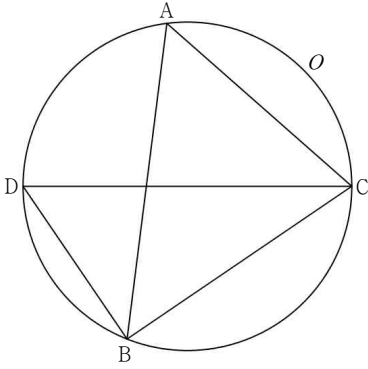
(가) a, b, c, d 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) $a^3 = b^3 + c^3 + d^3$

27. 그림과 같이 원 O 에 내접하는 예각삼각형 ABC 가 있다.
점 C 와 원 O 의 중심을 지나는 직선이 원 O 와 만나는 점 중 C 가 아닌 점을 D 라 하자.

$$15 \sin(\angle ACD) = 12 \sin(\angle BDC) = 10 \sin(\angle ACD + \angle BDC)$$

이고 삼각형 BCD 의 넓이가 144일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하시오. [4점]



28. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 두 상수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $x < 0$ 일 때 $f(x) = 2^{ax} + b$ 이고

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.

(나) $f(a) = 0, f(a-1) > a-1$

29. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} + a_n & (a_n \geq a_{n+1}) \\ a_{n+1} + a_n & (a_n < a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5 = 38$ 이도록 하는 모든 a_1 의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 두 함수 $g(x)$, $h(x) = |f(x)| \times g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $|g(x)|$, $h(x)$ 는 다항함수이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow t} \frac{(x-a)^2 h(x)}{\{g(x) - 2f(b)\}^2}$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 t 의 값은 $b+1$ 뿐이다.

(다) 모든 실수 k 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow k} \frac{|g(x)| + 2f(b)}{f(x)}$ 의 값이 존재하고 그 값은 0보다 크다.

$g(a) = -2$ 일 때, $f(2a-b)$ 의 값을 구하시오.

(단, a , b 는 상수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.