평범한
두뇌를 위한
실전심화
매뉴얼

수학Ⅱ
주간 부교재

Week 02

To my students

強者であれ

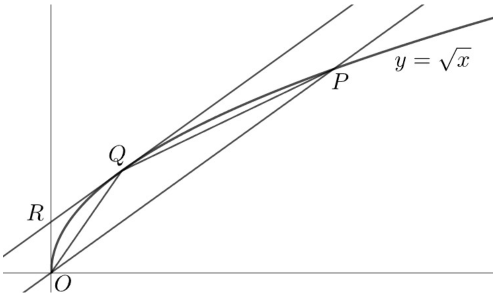
「강자로 있어라」

평범한 두뇌를 위한 실전심화 매뉴얼

2주차
수업문항

01

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 있는 점을 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$라 하자. 직선 OP 에 평행하고 곡선 $y=\sqrt{x}$에 접하는 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 접하는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R 라 할 때, 삼각형 POQ 의 넓이를 $f(t)$, 삼각형 QOR 의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\lim_{t\to\infty}\frac{2f(t)+5}{4g(t)-1}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

02

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $13h(-1)$의 값은?

(가) 집합 $\{x|h'(x)=0\}$의 원소의 개수는 3개다.
(나) $h(-2)=h(0)=h(2)=h'(2)=0$

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

평범한
두뇌를 위한
실전심화
매뉴얼

2주차
정답과 해설

~~Sometimes no solution~~

빠른 정답									
1	①	2	②	3	162	4	512	5	③
6	④	7	②	8	4	9	8	10	1
11	②	12	④						

1. ①

삼각형 POQ와 삼각형 QOR은 높이가 같으므로
넓이비는 실수배로 나타낼 수 있고 밑변의 비가 곧
넓이비가 된다.

직선 OP의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{t}}{t}$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, Q의 x좌표를 α라 하면

$\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \dfrac{\sqrt{t}}{t}$, $\alpha = \dfrac{t}{4}$이고 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t}{4}, \dfrac{\sqrt{t}}{2}\right)$

점 R을 지나면서 x축과 평행한 직선과
점 Q를 지나면서 y축과 평행한 직선이 만나는 점을
H라 하면

$\overline{\mathrm{RH}} = \dfrac{\mathrm{t}}{4}$이고 $\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{RH}}} = \dfrac{\sqrt{t}}{t}$이므로 $\overline{\mathrm{QH}} = \dfrac{\sqrt{t}}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{RQ}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\mathrm{t}^2 + \mathrm{t}}$

이때, $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{\mathrm{t}^2 + \mathrm{t}}$ 이므로 $f(t) = 4g(t)$

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$이므로 $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2f(t)+5}{f(t)-1} = 2$이다.

2. ②

조건 (나)에서
$f(-2) = f(0) = 0$, $g(2) = g'(2) = 0$이므로
$f(x) = x(x+2)(x-a) = (x^2+2x)(x-a)$ (a는 실수)
$g(x) = (x-2)^2(x^2+bx+c)$ (b, c는 실수)라 둘 수
있다.
이때 $g(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 사차함수
이므로 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$이다.
이때 $x < 1$일 때, $f(x)$가 극대와 극소를 모두
갖는다면 $f'(1) = g'(1) > 0$이고 $g'(2) = 0$이므로
$h'(x) = 0$의 원소의 개수가 4개 이상이 되므로
모순이다.
따라서 $x < 1$일 때, $f(x)$는 극대 하나만 갖거나
$x = 1$에서 극소를 가져야 한다.

조건 (가)를 만족하기 위해서는 $1 \le \alpha < 2$에 존재하는
어떤 값 α에 대해 $h'(\alpha) = 0$이면서 극솟값을 갖고
$x = 2$에서 삼중근을 가져야한다.
따라서 $f'(1) = g'(1) \le 0$이면서 함수 $g(x)$는
$x = 2$에서 삼중근을 가져야한다.
정리하면 $f(x) = (x^2+2x)(x-a)$,
$f'(x) = (2x+2)(x-a) + (x^2+2x)$
$g(x) = (x-2)^3(x-d)$,
$g'(x) = 3(x-2)^2(x-d) + (x-2)^3$ (d는 실수)
이때 $f(1) = g(1)$, $f'(1) = g'(1)$이므로
대입해보면 $f(1) = g(1)$에서 $3(1-a) = -(1-d)$,
$d = 4 - 3a$
$f'(1) = g'(1)$에서 $4(1-a) + 3 = 3(1-d) - 1$
$d = 4 - 3a$를 대입하면
$4 - 4a + 3 = 3 - 3d - 1 = 3 - 12 + 9a - 1$
$17 = 13a$, $a = \dfrac{17}{13}$

$f(x) = (x^2+2x)\left(x - \dfrac{17}{13}\right)$이고

$h(-1) = f(-1) = -\left(-\dfrac{30}{13}\right) = \dfrac{30}{13}$

따라서 $13h(-1) = 30$

3. 162

만약, $a = 0$이라면 $f(x) = bx + 1$이고 $b \ne 0$이면
주어진 조건을 만족한다. 따라서 순서쌍 (a, b)이
$(0, -9)$, $\cdots$ $(0, -1)$, $(0, 1)$, $\cdots$, $(0, 9)$이면
주어진 조건을 만족하고 그 개수는 18개이다.

만약 $a \ne 0$이라면 주어진 조건을 만족시키기 위해서는
$f'(x) \ge 0$이거나 $f'(x) \le 0$이어야 한다.
$f'(x) = 3ax^2 + 2ax + b$에서 판별식
$D/4 = a^2 - 3ab \le 0$

만약 $a > 0$, $a - 3b \le 0$이므로
$a = 1$일 때 $b = 1$부터 9까지
$a = 2$일 때 $b = 1$부터 9까지
$a = 3$일 때 $b = 1$부터 9까지
$a = 4$일 때 $b = 2$부터 9까지

평범한
두뇌를 위한
실전심화
매뉴얼