다원교육 고등대치본관
허혁재T - 수능공통범위

2013학년도 평가원 전문항

2014학년도 예비시행 저난도 (2012. 05)
2013학년도 6월 모의평가 (2012. 06)
2013학년도 9월 모의평가 (2012. 09)
2013학년도 11월 수능 (2012. 11)

S13

5월3주차 - 2013

5월3주차 - 2013 (빠른 정답)

다원수1수2 2025.05.13

1. [정답] ③
2. [정답] ①
3. [정답] ②
4. [정답] 13
5. [정답] 25

6. [정답] ②
7. [정답] ⑤
8. [정답] ⑤
9. [정답] ③
10. [정답] **2**

11. [정답] ③
12. [정답] **5**
13. [정답] **13**
14. [정답] 12
15. [정답] **21**

16. [정답] 16
17. [정답] ④
18. [정답] 21
19. [정답] 10
20. [정답] ②

21. [정답] 2
22. [정답] 14
23. [정답] ③
24. [정답] ②
25. [정답] ⑤

26. [정답] ②
27. [정답] ③
28. [정답] ③
29. [정답] 10
30. [정답] ①

31. [정답] 11
32. [정답] ①
33. [정답] ①
34. [정답] ②
35. [정답] ④

36. [정답] ①
37. [정답] ③
38. [정답] 14
39. [정답] ③
40. [정답] ①

41. [정답] ④
42. [정답] ④
43. [정답] ④
44. [정답] 16
45. [정답] ②

46. [정답] 36
47. [정답] ⑤
48. [정답] ⑤
49. [정답] ⑤
50. [정답] ⑤

51. [정답] 40
52. [정답] ②
53. [정답] ④
54. [정답] 513
55. [정답] ②

56. [정답] 23
57. [정답] ④
58. [정답] ④
59. [정답] 13
60. [정답] ⑤

61. [정답] ②

5월3주차 - 2013 (해설)

다원수1수2 2025.05.13

1) [정답] ③

[해설]

$\log_2 40 - \log_2 5 = \log_2 \frac{40}{5} = \log_2 8$

$= \log_2 2^3 = 3\log_2 2$

$= 3$

2) [정답] ①

[해설]

$4^{-\frac{1}{2}} \times \log_3 9 = (2^2)^{-\frac{1}{2}} \times \log_3 3^2$

$= 2^{-1} \times 2$

$= 1$

3) [정답] ②

[해설]

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$

$= 3 + 1 = 4$

4) [정답] 13

[해설]

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 9x - 22}{x - 2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+11)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} (x+11)$

$= 13$

5) [정답] 25

[해설]

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 5$에서

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$= 3(x-2)(x-4)$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서, $f(x)$의 극댓값은

$f(2) = 8 - 36 + 48 + 5 = 25$

6) [정답] ②

[해설]

$\log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 \left(3 \times \frac{4}{3}\right)$

$= \log_2 4$

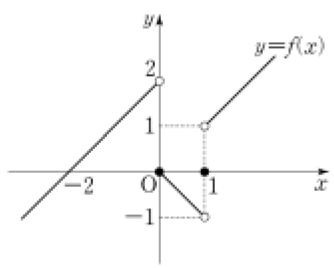
$= \log_2 2^2$

$= 2\log_2 2$

$= 2$

7) [정답] ⑤

[해설]



$\lim_{x \to 0-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$이므로,

$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 3$

8) [정답] ⑤

[해설]

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 + 1 = 2$

9) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + (-1) = 0$

10) [정답] 2

[해설]

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to 2}x=2$

[다른 풀이]

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x}{x+1}=\frac{6}{3}=2$

11) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to 0}(x^2+2x+3)=0^2+2\times 0+3=3$

12) [정답] **5**

[해설]

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$

13) [정답] **13**

[해설]

$f'(x)=2x+7$

$f'(3)=2\times 3+7=13$

14) [정답] 12

[해설]

$f'(x)=3x^2+9$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=12$

15) [정답] **21**

[해설]

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times 3$

$=3f'(1)$

$f(x)=x^3+4x-2$에서 $f'(x)=3x^2+4$

$f'(1)=3+4=7$

$\therefore 3f'(1)=21$

16) [정답] 16

[해설]

$\int_{-2}^{2}x(3x+1)dx=\int_{-2}^{2}(3x^2+x)dx$

$=\int_{-2}^{2}3x^2dx$

$=2\int_{0}^{2}3x^2dx$

$=2\left[x^3\right]_0^2$

$=2(8-0)$

$=16$

17) [정답] ④

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=a_1+3d=1+3d=7$

$\therefore d=2$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d$

$=1+(n-1)\times 2$

$=2n-1$

$\therefore a_2+a_3=3+5=8$

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 성질에 의해

$a_2+a_3=a_1+a_4$

$=1+7=8$

18) [정답] 21

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}+a_6=(a+9d)+(a+5d)$

$=2a+14d=6$ ……㉠

$a_{10}-a_6=(a+9d)-(a+5d)$

$=4d=-12$…… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=24$, $d=-3$

$\therefore a_2=a+d=21$

19) [정답] 10

[해설]

$\frac{n\{2\cdot(-6)+(n-1)\cdot 2\}}{2}=30$에서

$n^2-7n-30=0$

$(n-10)(n+3)=0$

$\therefore n=10(\because n>0)$

20) [정답] ②

[해설]

$\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+5)dx$

$=2\int_{0}^{1}(3x^2+5)dx$

$=2\left[x^3+5x\right]_0^1$

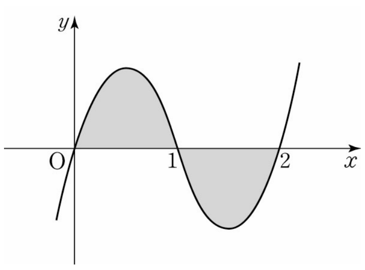
$=2(1+5)=12$

21) [정답] 2

[해설]

$f(x)=4x^3-12x^2+8x$라 하면

$f(x)=4x(x-1)(x-2)$이므로 $f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서, 구하는 넓이 S는

$S=\int_{0}^{1}(4x^3-12x^2+8x)dx+\int_{1}^{2}(-4x^3+12x^2-8x)dx$

$=[x^4-4x^3+4x^2]_0^1+[-x^4+4x^3-4x^2]_1^2$

$=(1-4+4)+(-16+32-16)-(-1+4-4)$

$=1+1=2$

22) [정답] 14

[해설]

$S_n=2^{n-1}+5$에서

$a_1=S_1=2^0+5=6$

$a_5=S_5-S_4$

$=2^4+5-2^3-5$

$=16-8=8$

$\therefore a_1+a_5=6+8=14$

23) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax}{x-1}=b$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax)=1+a=0$이어야 한다.

$\therefore a=-1$

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}x=1$

$\therefore b=1$

$\therefore a+b=(-1)+1=0$

24) [정답] ②

[해설]

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=\sqrt{2^3\times(\sqrt[3]{4})^3}=\sqrt{8\times4}=\sqrt{32}$

이때 $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

25) [정답] ⑤

[해설]

일반항 $a_n=2^{n-1}$이므로

$b_n=(a_{n+1})^2-(a_n)^2=(2^n)^2-(2^{n-1})^2$

$=2^{2n}-2^{2n-2}$

$\therefore \frac{b_6}{b_3}=\frac{2^{12}-2^{10}}{2^6-2^4}=\frac{2^6(2^6-2^4)}{2^6-2^4}=2^6=64$

26) [정답] ②

[해설]

$y=f(x)$는 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선이므로 $f(x)=-2^x+m$이다.

$y=-2^x+m$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $y=0$일 때,

$-2^x+m=0$, $2^x=m$

$\therefore x=\log_2 m$

$\therefore \mathrm{A}(\log_2 m,\ 0)$

$\therefore \overline{\mathrm{OA}}=\log_2 m$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\log_2 m=\log_2\sqrt{m}$

$\therefore \mathrm{B}(\log_2\sqrt{m},\ \sqrt{m})$

점 B는 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2^{\log_2\sqrt{m}}+m=\sqrt{m}$

$-\sqrt{m}+m=\sqrt{m}$

$m=2\sqrt{m}$

$m^2-4m=0$

$m(m-4)=0$

$\therefore\ m=4\,(\because m>2)$

27) [정답] ③

[해설]

$\log_{\sqrt{2}}|x|<5$에서

$2\log_2|x|<5$

$\log_2|x|<\frac{5}{2}$

$0<|x|<2^{\frac{5}{2}}$

$\therefore -2^{\frac{5}{2}}<x<2^{\frac{5}{2}},\ x\neq 0$

이때, $5<2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}<6$이므로 부등식을 만족하는 정수는 -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5로 10개다.

28) [정답] ③

[해설]

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0+}f(x)=b$

$f(0)=b$

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$b=1$

또, $f(-1)=f(1)$이어야 하므로

$-a+1=3+2a+1$

$3a=-3$

$\therefore a=-1$

$\therefore a+b=0$

29) [정답] 10

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_2+3d=16+3d=10$

$\therefore\ d=-2$

따라서

$a_1=a_2-d=16-(-2)=18$

이므로

$a_n=18+(n-1)\times(-2)=-2n+20$

즉, $a_k=-2k+20=0$이므로

$k=10$

30) [정답] ①

[해설]

$a_1a_5=9$에서 $a_3^2=9$이므로

$a_3=3(\because a_3>0)$

또, $a_2a_6=36$에서 $a_4^2=36$

$a_4=6(\because a_4>0)$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r=\frac{a_4}{a_3}=\frac{6}{3}=2$

$a_3=a_1\times 2^2=3$에서

$a_1=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 8(a_1a_2+a_3a_4)=8a_1^2(r+r^2\times r^3)$

$=8\times\frac{9}{16}\times(2+2^2\times 2^3)$

$=\frac{9}{2}\times 34=153$

[다른 풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1a_5=a_1\times a_1r^4$

$=a_1^2r^4=9\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a_2a_6=a_1r\times a_1r^5$

$=a_1^2r^6=36\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서 $r^2=4$

$\therefore\ r=2(\because r>0)$

㉠에서 $a_1^2=\frac{9}{16}$

$\therefore\ 8(a_1a_2+a_3a_4)=8a_1^2(r+r^2\times r^3)$

$=8\times\frac{9}{16}\times(2+2^2\times 2^3)$

$=\frac{9}{2}\times 34=153$

31) [정답] 11

[해설]

(i) 진수 조건에서

$7-x>0,\ 7+x>0$

$\therefore\ -7<x<7\cdots\cdots$㉠

(ii) 주어진 부등식을 풀면

$\log_2(7-x)+\log_2(7+x)>4$

$\log_2(7-x)(7+x)>\log_2 16$

밑이 1보다 큰 2이므로

$(7-x)(7+x)>16$

$x^2-33=(x-\sqrt{33})(x+\sqrt{33})<0$

$\therefore\ -\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$ ……㉡

이때, $5<\sqrt{33}<6$이므로 ㉠과 ㉡에서 정수 x는 $-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 3,\ 4,\ 5$의 11개다.

32) [정답] ①

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 모든 항이 양수이므로 $a>0,\ r>0$

$$\frac{a_1a_2}{a_3}=\frac{a^2r}{ar^2}=\frac{a}{r}=2$$

$\therefore\ a=2r$

$$\frac{2a_2}{a_1}+\frac{a_4}{a_2}=\frac{2ar}{a}+\frac{ar^3}{ar}=2r+r^2=8$$

$r^2+2r-8=0,\ (r-2)(r+4)=0$

$\therefore\ r=2\ (\because\ r>0)$

따라서 $a=4,\ r=2$이므로

$a_3=4\cdot 2^2=16$

33) [정답] ①

[해설]

$a_1=S_1=2,\ a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$\therefore\ S_{11}=6$

34) [정답] ②

[해설]

이차방정식 $x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-1$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{10}k+\alpha\beta\sum_{k=1}^{10}1$$

$$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+(-1)\cdot 10$$

$=385-110-10$

$=265$

35) [정답] ④

[해설]

$x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$$

$=4$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$$

36) [정답] ①

[해설]

두 함수 $f(x),\ h(x)$를

$f(x)=x^2+ax+b,\ h(x)=f(x)g(x)$

라 하면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서만 불연속이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0,\ x=2$에서 연속이어야 한다.

(ⅰ) $x=0$에서 연속이어야 하므로

$h(0)=f(0)g(0)=b\times(-1)=-b$

$$\lim_{x\to 0+}h(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)$$

$$=\lim_{x\to 0+}f(x)\lim_{x\to 0+}g(x)$$

$=b\times 1=b$

$$\lim_{x\to 0-}h(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)$$

$$=\lim_{x\to 0-}f(x)\lim_{x\to 0-}g(x)$$

$=b\times(-1)=-b$

따라서, $b=-b$이므로 $b=0$

(ⅱ) $x=2$에서 연속이어야 하므로

$h(2)=f(2)g(2)=(4+2a)\times1=4+2a$

$\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2+}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to2+}f(x)\lim_{x\to2+}g(x)$

$=(4+2a)\times1=4+2a$

$\lim_{x\to2-}h(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to2-}f(x)\lim_{x\to2-}g(x)$

$=(4+2a)\times(-1)=-4-2a$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=x^2-2x$이므로

$f(5)=5^2-2\times5=15$

37) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $x>1$에서 $f(x)=-x+2$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x+2)=1$ (참)

ㄴ. $x\le1$에서 $f(x)=a$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}a=\lim_{x\to1-}0=0$

이므로 ㄱ에서 $\lim_{x\to1+}f(x)\ne\lim_{x\to1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)=(x-1)f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)f(x)$

$=\lim_{x\to1+}(x-1)(-x+2)=0$

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}(x-1)f(x)$

$=\lim_{x\to1-}a(x-1)=0$

이므로 $\lim g(x)=0$이고

$g(1)=(1-1)f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

즉, 함수 $y=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

한편, $x>1$, $x\le1$에서 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 연속함수의 성질에 의해 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38) [정답] 14

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=9$에서 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\{f(x)-5\}=0$이어야 한다.

$\therefore \lim f(x)=5$

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $\lim f(x)=f(1)$이다.

$\therefore f(1)=5$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=9$

$\therefore g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{xf(x)-f(x)\}+\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}f(x)+f'(1)$

$=f(1)+f'(1)$

$=5+9$

$=14$

39) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1-}(x^3+ax)=\lim_{x\to1+}(bx^2+x+1)$

$1+a=b+2$

$\therefore a-b=1 \cdots\cdots$ ㉠

또한,

$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{b(1+h)^2+(1+h)+1-(b+2)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{bh^2+(2b+1)h}{h}$

$=2b+1$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)^3+a(1+h)-(b+2)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{h^3+3h^2+(a+3)h+1+a-(b+2)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^3+3h^2+(a+3)h}{h}=a+3$$

이므로

$2b+1=a+3,\ a-2b=-2 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4,\ b=3$이므로

$a+b=7$

40) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+9x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$

$f'(1)=3+2a+9=2a+12$

이때, 접선의 기울기가 2이므로

$2a+12=2$

$\therefore\ a=-5$

$f(1)=1+a+9+3$

$=a+13$

$=-5+13(\because\ a=-5)$

$=8$

따라서 기울기가 2이고 점 (1, 8)을 지나는 접선의 방정식은

$y-8=2(x-1)$

$y=2x+6$

따라서 $b=6$이므로

$a+b=-5+6=1$

41) [정답] ④

[해설]

$f(x)=x^3-5x$라 하면

$f'(x)=3x^2-5$

이므로 점 A$(1,\ -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-5=-2$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x-2$

이 때, 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-5x=-2x-2$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 B$(-2,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(2+4)^2}$

$=\sqrt{9+36}$

$=3\sqrt{5}$

42) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 M, 최솟값 m은 $M=a+16,\quad m=a-4$ 이다.

이 때, $M+m=20$이므로

$2a+12=20,\ 2a=8$

$\therefore\ a=4$

43) [정답] ④

[해설]

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}1dx$$
$$=2\Big[x\Big]_0^1$$
$$=2$$

$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$에서

$\frac{8}{3}=4k$

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

44) [정답] 16

[해설]

$\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$

따라서 $3^{\frac{5}{6}}$ 이 어떤 자연수의 n제곱근이므로

$$\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^n=3^{\frac{5n}{6}}$$

은 자연수가 되어야 한다.

이때 $2\le n\le 100$이므로 n은 6의 배수이어야 하므로

$$n=6,\ 12,\ \cdots,\ 96$$

즉, n의 개수는 16이다.

45) [정답] ②

[해설]

$F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

이므로 사차함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 갖기 위해서는 $F(x)$의 도함수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$(\text{극댓값})\times(\text{극솟값})\ge 0$$

이어야 한다.

즉, $f(1)f(-1)\ge 0$이므로

$$(-2+1)(2+a)\ge 0,\ (a-2)(a+2)\ge 0$$

$$\therefore\ a\le -2 \text{ 또는 } a\ge 2$$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

46) [정답] 36

[해설]

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$

$(2^x-2^{-x})^2+a(2^x-2^{-x})+9=0$

$2^x-2^{-x}=X$로 놓으면

$X^2+aX+9=0$

이 방정식이 실근을 가지려면 판별식 D는

$D=a^2-36\ge 0$

$(a+6)(a-6)\ge 0$

$\therefore\ a\le -6$ 또는 $a\ge 6$

따라서 양수 a의 최솟값 m은 $m=6$

$\therefore\ m^2=36$

47) [정답] ⑤

[해설]

$a>1$이므로 $f(a)>f(1)$이고

두 점 $(1,\ f(1))$, $(a,\ f(a))$사이의 거리가 a^2-1이므로

$\sqrt{(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2}=a^2-1$

$(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2$

$\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2-(a-1)^2$

$\qquad=(a-1)^2\{(a+1)^2-1\}^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore\ f(a)-f(1)=(a-1)\sqrt{a^2+2a}\,(\because a>1$이고 $f(a)>f(1))$

$f'(1)=\lim\limits_{a\to 1}\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}$

$\qquad=\lim\limits_{a\to 1}\dfrac{(a-1)\sqrt{a^2+2a}}{a-1}=\sqrt{3}$

[다른 풀이]

㉠에서 $\left\{\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}\right\}^2=(a+1)^2-1=a^2+2a$

$\lim\limits_{a\to 1}\left\{\dfrac{f(a)-f(1)}{a-1}\right\}^2=\lim\limits_{a\to 1}(a^2+2a)$

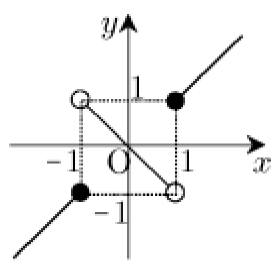
$\{f'(1)\}^2=3$

$\therefore\ f'(1)=\sqrt{3}\,(\because f'(1)>0)$

48) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개다. (참)

ㄴ. $g(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$g(1)=(1-1)\cdot f(1)=0\cdot 1=0$

또

$\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x-1)(-x)=0\cdot 1=0$

$\lim\limits_{x\to 1+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x-1)x=0\cdot 1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $h(x)=\{f(x)\}^2$라 하면

(i) $h(-1)=\{f(-1)\}^2=(-1)^2=1$

또,

$\lim\limits_{x\to -1-}h(x)=\lim\limits_{x\to -1-}x^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to -1+}h(x)=\lim\limits_{x\to -1+}(-x)^2=1^2=1$

$\therefore \lim h(x)=1$

따라서 $\lim h(x)=h(-1)$이므로 함수 $h(x)$는

$x=-1$에서 연속이다.

(ii) $h(1)=\{f(1)\}^2=1^2=1$

또, $\lim\limits_{x\to1-}h(x)=\lim\limits_{x\to1-}(-x)^2=(-1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to1+}h(x)=\lim\limits_{x\to1+}x^2=1^2=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}h(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}h(x)=h(1)$이므로 함수 $h(x)$는

$x=1$에서 연속이다.

즉, (i), (ii)로부터 함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=1$

에서 연속이므로 실수전체의 집합에서 연속이다.(참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ. ㄴ, ㄷ 이다.

49) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 $g(0)=3$이므로

$$g(x)=x^3+ax^2+bx+3$$

라 하자.

이때, $f(x)$ 는 $x=0$과 $x=2$에서 불연속이고 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

$$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to1-0}g(t)$$
$$=1+a+b+3$$
$$=a+b+4$$

또한, $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=3$이므로

$a+b+4=3$

$\therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

$$\lim_{x\to2+}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to-1+}g(t)$$
$$=-1+a-b+3$$
$$=a-b+2$$

$$\lim_{x\to2-}(g\circ f)(x)=\lim_{t\to+}g(t)=3$$

따라서 $a-b+2=3$이므로

$a-b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=0$, $b=-1$이므로

$g(x)=x^3-x+3$

$\therefore g(3)=27$

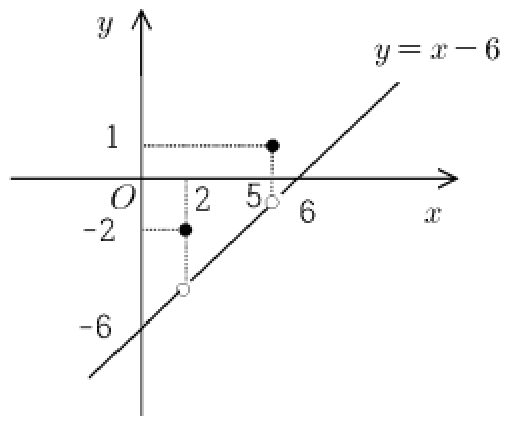
50) [정답] ⑤

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}x-3 & (x\neq2)\\ 1 & (x=2)\end{cases}$$

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}x-6 & (x\neq2,\ x\neq5)\\ -2 & (x=2)\\ 1 & (x=5)\end{cases}$$

이므로 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=2$ 또는 $x=5$에서

불연속이므로 $0\le a\le6$에 서 모든 a의 값의 합은 $2+5=7$

51) [정답] 40

[해설]

$$\int_0^{2013}f(x)dx-\int_3^{2013}f(x)dx$$
$$=\int_0^{2013}f(x)dx+\int_{2013}^{3}f(x)dx$$
$$=\int_0^{3}f(x)dx=0$$

따라서 $f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$\int_0^3(x^2+ax+b)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^3=9+\frac{9}{2}a+3b=0$$

$\therefore 3a+2b=-6$ ⋯⋯ ㉠

또한, $f(3)=9+3a+b=0$이므로

$3a+b=-9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-4$, $b=3$이므로

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$$\therefore S=\int_1^3|x^2-4x+3|dx$$
$$=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

$\therefore 30S=40$

52) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 하자.

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$$
$$=\int\{x^2+ax^2+bx+c\}dx$$
$$=\int\{(1+a)x^2+bx+c\}dx$$
$$=\frac{1}{3}(1+a)x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C \quad \cdots\cdots ㉠$$

(C는 적분상수)

한편, $f(x)g(x)=(ax^2+bx+c)g(x)$

$$=-2x^4+8x^3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

$\therefore a=-1$

㉠, ㉡에서

$$(-x^2+bx+c)\left(\frac{b}{2}x^2+cx+C\right)=-2x^4+8x^3$$
$$-\frac{b}{2}x^4+\left(\frac{b^2}{2}-c\right)x^3+\left(-C+bc+\frac{bc}{2}\right)x^2$$
$$+(bC+c^2)x+cC=-2x^4+8x^3$$

에서

$$-\frac{b}{2}=-2,\ \frac{b^2}{2}-c=8$$
$$-C+bc+\frac{bc}{2}=0,\ cC=0$$

$\therefore\ b=4,\ c=0,\ C=0$

$\therefore\ g(x)=2x^2$

$\therefore\ g(1)=2$

53) [정답] ④

[해설]

[단계1]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{6}k=\frac{6\times7}{2}=21$$

[단계2]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{7}k=\frac{7\times8}{2}=28$$

[단계3]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{9}k=\frac{9\times10}{2}=45$$

[단계4]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{11}k=\frac{11\times12}{2}=66$$

[단계5] 에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{13}k=\frac{13\times14}{2}=91$$

[단계6]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{15}k=\frac{15\times16}{2}=120$$

따라서 <그림 6>에 적혀 있는 모든 수의 합은

$21+28+45+66+91+120=371$

54) [정답] 513

[해설]

$\frac{1}{n+2}<\frac{a_n}{k}<\frac{1}{n}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

따라서 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$n<\frac{k}{a_n}<n+2$$

$\therefore\ na_n<k<(n+2)a_n$

이때, na_n, $(n+2)a_n$은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$(n+2)a_n-na_n-1=2a_n-1$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n-1$

이 때, $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$이므로 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$, 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ a_n-1=1\times2^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ a_n=2^{n-1}+1$

$\therefore\ a_{10}=2^9+1=513$

55) [정답] ②

[해설]

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 직선 $y=x$까지의 거리가 최대이어야 한다.

이때, 점 P에서 접선은 직선 $y=x$와 평행이므로

$f'(x)=1$에서

$a\{(x-2)^2+2x(x-2)\}=1$

$3ax^2-8ax+4a-1=0$

이 이차방정식의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$$3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a-1=0$$
$$\frac{3}{4}a-1=0$$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

56) [정답] 23

[해설]
주어진 규칙에 따라 점 P_n의 좌표를 나열해 보면

$P_1(-1,\ 0)$, $P_2(1,\ 0)$
$P_3(-1,\ 2)$, $P_4(1,\ -2)$
$P_5(-1,\ 4)$, $P_6(1,\ -4)$
$P_7(-1,\ 6)$, $P_8(1,\ -6)$
$\cdots$

이므로 자연수 k에 대하여

$P_{2k-1}(-1,\ 2(k-1))$, $P_{2k}(1,\ 2(1-k))$

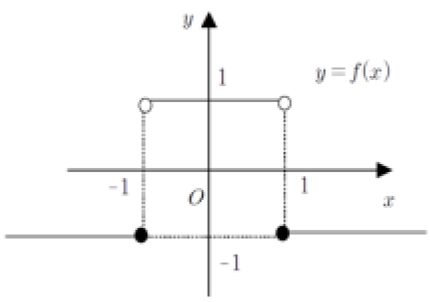
따라서 점 P_{25}의 좌표는

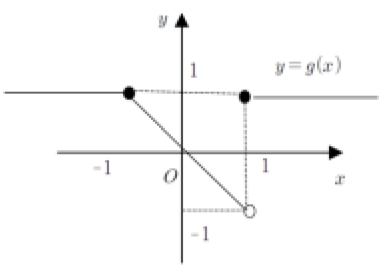
$P_{25}(-1,\ 24)$

이므로 $a+b=23$

57) [정답] ④

[해설]
두 함수$f(x)$, $g(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.





ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=(-1)\times1=-1$

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to1} f(x)g(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0+} g(x+1)=1$

$\lim_{x\to0-} g(x+1)=-1$

이므로 $g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-1+} f(x)g(x+1)=1\times0=0$

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x+1)=(-1)\times0=0$

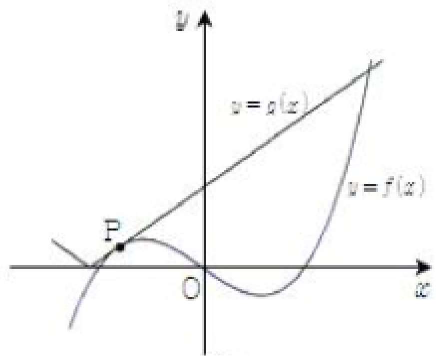
$f(-1)g(0)=(-1)\times0=0$

$\therefore\ \lim_{x\to-1} f(x)g(x+1)=f(-1)g(0)$

따라서 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

58) [정답] ④

[해설]
두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



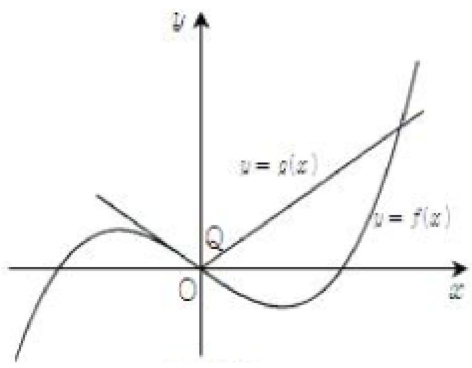
<그림1>

<그림1>에서 직선 $g(x)=x-a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 P에서 접하므로 $f'(x)=1$에서 $18x^2-1=1$, $x^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{3}$ $(x<0)$

이때, 접점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\right)$이므로

$\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}-a$ $\therefore\ a=-\frac{4}{9}$

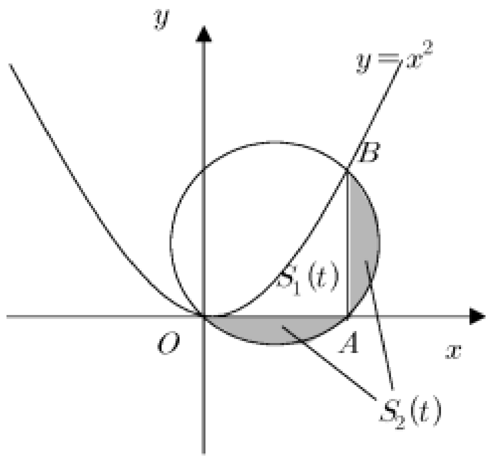


<그림2>

<그림2>에서 직선 $g(x)=-x+a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 Q에서 접하므로 $f'(x)=-1$에서
$18x^2-1=-1$, $18x^2=0$ $\therefore\ x=0$
이때, 접점 Q의 좌표는 $(0,\ 0)$이므로
$0=0+a$ $\therefore\ a=0$
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은
$-\frac{4}{9}+0=-\frac{4}{9}$

59) [정답] 13

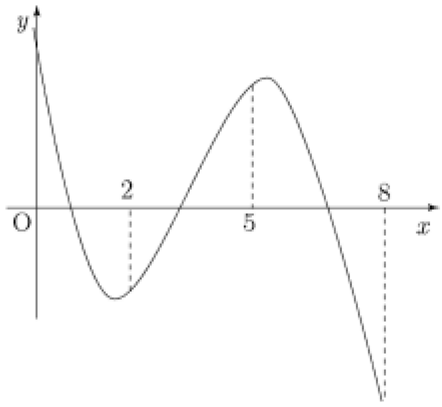
[해설]
세 점 O(0, 0), A(t, 0), B(t, t^2)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이 r는
$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$



위의 그림에서 $S_2(t)$의 넓이는
$S_2(t)=$(반원의 넓이)$-$(직각삼각형 OAB의 넓이)
$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{2}\times t\times t^2$
$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3$
위의 그림에서 $S_1(t)$의 넓이는
$S_1(t)=\int_0^t x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3$
따라서 구하는 넓이 $S(t)$는
$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$
$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}t^3$
$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3$
$S'(t)=\frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\frac{1}{2}t^2$
$\therefore\ S'(1)=\frac{1}{8}(2+4)\pi-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-2}{4}$
$\therefore\ p=3,\ q=-2$
$\therefore\ p^2+q^2=9+4=13$

60) [정답] ⑤

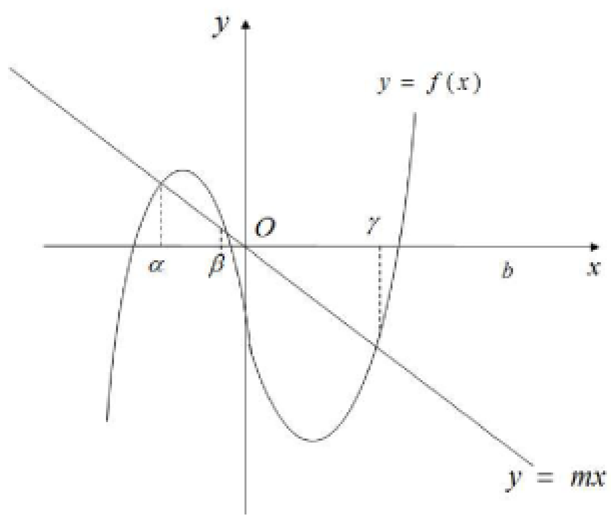
[해설]
함수 $g(x)$는 함수 $f(t)$를 $t=0$부터 $t=x$까지 적분하여 값을 구한 후 양수로 바꾼 함수이다.
그런데 $g(2)=0$ 이므로 $\int_0^2 f(t)dt=0$이고 $f(0)>0$이므로 $f(2)<0$이다.
또 $g(5)=0$ 이므로 $\int_2^5 f(t)dt=0$이고 $f(2)<0$이므로 $f(5)>0$이고 같은 이유로 $f(8)<0$이다.
그러므로 함수 $y=f(x)$의 대략적인 개형을 그리면 그림과 같다.



ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 구간 (0, 2), (2, 5), (5, 8)에 각각 근이 하나씩 존재한다. (참)
ㄴ. $x=0$에서 미분계수는 음수이다. (참)
ㄷ. 그림에서 $m=3,\ 4,\ 5$이므로 자연수의 개수는 3이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

61) [정답] ②

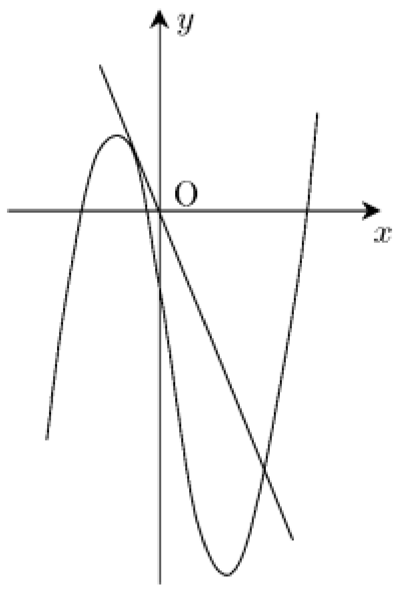
[해설]
주어진 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 만나는 모든 점에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 m이어야 한다.
(ⅰ) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta,\ \gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면
$$g(x)=\begin{cases} mx & (x<\alpha) \\ f(x) & (\alpha\le x<\beta) \\ mx & (\beta\le x<\gamma) \\ f(x) & (x\ge\gamma) \end{cases}$$



이 때, 직선 $y=mx$는 곡선 $y=f(x)$의 접선이 아니므로 $f'(\alpha)\ne m,\ f'(\beta)\ne m,\ f'(\gamma)\ne m$
이다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$에서 미분가능하지 않다.

(ⅱ) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 x좌표를 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면,

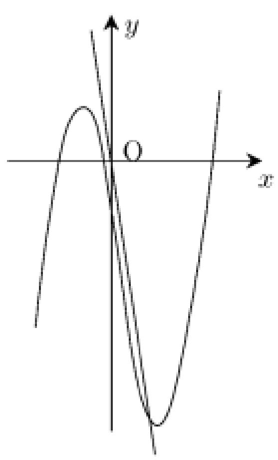
$$g(x)=\begin{cases} mx & (x<\beta) \\ f(x) & (x\ge\beta) \end{cases}$$



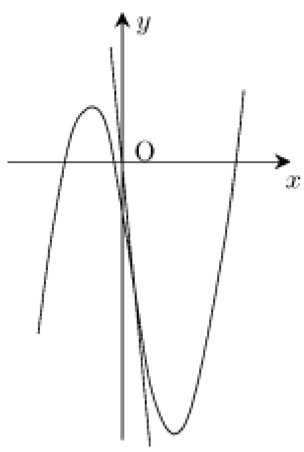
이 때, $f'(\alpha)=m$, $f'(\beta)\neq m$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

(ⅲ) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 한 점에서 만날 때, 교점의 x좌표를 α라 하면,

$$g(x)=\begin{cases} mx & (x<\alpha) \\ f(x) & (x\ge\alpha) \end{cases}$$



[그림1]



[그림2]

이 때, $f'(\alpha)=m$이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그런데, [그림1]과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$의 교점이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니면 $f'(\alpha)=m$이 성립하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 [그림2]와 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$의 교점은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이고, 이 변곡점에서의 접선의 기울기는 m이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-6x-9$이므로

$f''(x)=6x-6=0$에서 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(1,\ -12)$이고 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ -12)$를 지나는 직선의 기울기는

$m=-12$

이다. 이때, $f'(1)=-12$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 구하는 m의 값은 -12이다.

5월3주차 - 2013 (빠른 정답)

다원수1수2 2025.05.13

1. [정답] ③
2. [정답] ①
3. [정답] ②
4. [정답] 13
5. [정답] 25

6. [정답] ②
7. [정답] ⑤
8. [정답] ⑤
9. [정답] ③
10. [정답] **2**

11. [정답] ③
12. [정답] **5**
13. [정답] **13**
14. [정답] 12
15. [정답] **21**

16. [정답] 16
17. [정답] ④
18. [정답] 21
19. [정답] 10
20. [정답] ②

21. [정답] 2
22. [정답] 14
23. [정답] ③
24. [정답] ②
25. [정답] ⑤

26. [정답] ②
27. [정답] ③
28. [정답] ③
29. [정답] 10
30. [정답] ①

31. [정답] 11
32. [정답] ①
33. [정답] ①
34. [정답] ②
35. [정답] ④

36. [정답] ①
37. [정답] ③
38. [정답] 14
39. [정답] ③
40. [정답] ①

41. [정답] ④
42. [정답] ④
43. [정답] ④
44. [정답] 16
45. [정답] ②

46. [정답] 36
47. [정답] ⑤
48. [정답] ⑤
49. [정답] ⑤
50. [정답] ⑤

51. [정답] 40
52. [정답] ②
53. [정답] ④
54. [정답] 513
55. [정답] ②

56. [정답] 23
57. [정답] ④
58. [정답] ④
59. [정답] 13
60. [정답] ⑤

61. [정답] ②