제 2 교시

2025학년도 대학수학능력시험 이감 파이널 플러스 예비평가

정답 및 해설

※ 시험이 끝나기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.

씨에스엠17

2025학년도 대학수학능력시험 이감 파이널 플러스 예비평가
정답 및 해설

파이널 플러스 예비평가

[공통]

1	⑤	**2**	③	**3**	①	**4**	①	**5**	②
6	④	**7**	③	**8**	①	**9**	②	**10**	⑤
11	③	**12**	④	**13**	④	**14**	⑤	**15**	②
16	6	**17**	20	**18**	110	**19**	10	**20**	5
21	93	**22**	71						

[해설]

1. 정답 ⑤

$$\log_2\frac{4}{3}+\log_4 18$$
$$=\log_2 4-\log_2 3+\log_4 2+\log_4 9$$
$$=2-\log_2 3+\frac{1}{2}+\log_2 3$$
$$=\frac{5}{2}$$

2. 정답 ③

$f(x)=x^3-ax^2$에서
$f'(x)=3x^2-2ax$
$\therefore\ f'(1)=3-2a$
따라서 $3-2a=-3$이므로 $a=3$

3. 정답 ①

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}=2$이므로
$\tan\theta=\frac{1}{2}$
$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 $\cos\theta<0$이다.
$\therefore\ \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 정답 ①

$\lim_{x\to -1-} f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=-1$이므로
$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=-2+(-1)=-3$

5. 정답 ②

점 P가 시각 $t=a$에서 운동방향을 바꾸므로
$v(a)=0$이고
$v(a)=(a+1)(a-2)=0$ $\therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)
점 P의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면
$x(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-2t+5$
따라서 구하는 값은
$x(a)=x(2)=\frac{8}{3}-2-4+5=\frac{5}{3}$

6. 정답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.
$a_3(1+r+r^2)=2$ … ㉠
$a_3(1-r^3)=1$ … ㉡
㉠의 양변에 $1-r$을 곱하면
$a_3(1+r+r^2)(1-r)=2(1-r)$
$a_3(1-r^3)=2-2r$
이므로 ㉡에 의하여
$1=2-2r$ $\therefore\ r=\frac{1}{2}$
㉡에서
$a_1\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{8}=1$ $\therefore\ a_1=\frac{32}{7}$

7. 정답 ③

$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$이므로 $\log_a b+\log_b a=\frac{5}{2}$에서
$\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=\frac{5}{2}$
$2(\log_a b)^2-5\log_a b+2=0$
$(2\log_a b-1)(\log_a b-2)=0$
$\therefore\ \log_a b=2$ ($\because\ \log_a b>1$)
따라서 $b=a^2$ … ㉠
$\log_2 a\times\log_2 b=18$에서
$\log_2 a\times\log_2 a^2=18$
$2(\log_2 a)^2=18$
$(\log_2 a)^2=9$
$\log_2 a=3$ ($\because\ \log_2 a>0$)
$\therefore\ a=8,\ b=64$ ($\because$ ㉠)
따라서 구하는 값은
$a+b=8+64=72$

8. 정답 ①

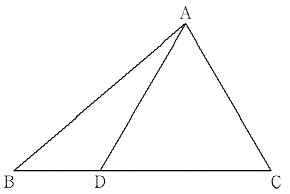
주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=0$ … ㉠
주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)=x^3+x^2+f(x)$
$f'(x)=x^2+x$
함수 $f'(x)$는 다항함수이므로
$\int f'(x)\,dx=f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$
(단, C는 적분상수)
이때 ㉠에 의하여
$f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+C=0$
$\therefore\ C=-\frac{5}{6}=f(0)$

9. 정답 ②

함수 $f(x)=x^3+x$에서
$f'(x)=3x^2+1$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$
에서의 x절편을 α라 하면
$0=f'(a)(\alpha-a)+f(a)$
$\therefore\ \alpha=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$ ($\because\ f'(a)>0$)
곡선 $y=f(x)+4$ 위의 점 $(a, f(a)+4)$에서의 접선의 방정식
$y=f'(a)(x-a)+f(a)+4$
에서의 x절편을 β라 하면
$0=f'(a)(\beta-a)+f(a)+4$
$\therefore\ \beta=a-\frac{f(a)+4}{f'(a)}$ ($\because\ f'(a)>0$)
이때 주어진 조건에서 $|\alpha-\beta|=3$이므로
$$|\alpha-\beta|=\left|\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)-\left(a-\frac{f(a)+4}{f'(a)}\right)\right|$$
$$=\left|\frac{4}{f'(a)}\right|=3$$
$\therefore\ f'(a)=\frac{4}{3}$ ($\because\ f'(a)>0$)
따라서
$f'(a)=3a^2+1=\frac{4}{3}$
$3a^2=\frac{1}{3}$ $\therefore\ a=\frac{1}{3}$ ($\because\ a>0$)

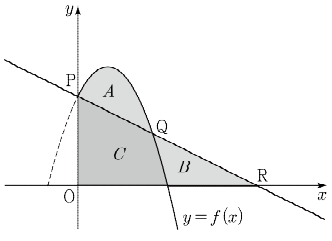
[다른 풀이]
함수 $f(x)=x^3+x$에서
$f'(x)=3x^2+1$
곡선 $y=f(x)+4$는 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이고, … ㉠
곡선 $y=f(x)+4$ 위의 점 $(a, f(a)+4)$에서의 접선을 l_1, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선을 l_2라 하면
직선 l_1의 기울기와 직선 l_2의 기울기가 $f'(a)$로 같으므로 두 접선은 평행하고,
직선 l_1은 직선 l_2를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이다. ($\because$ ㉠)
이때 두 직선 l_1, l_2의 x절편의 차가 3이므로
두 직선의 기울기는 모두 $\frac{4}{3}$이다.
따라서
$f'(a)=3a^2+1=\frac{4}{3}$ $\therefore\ a=\frac{1}{3}$ ($\because\ a>0$)

10. 정답 ⑤



$\overline{AB}:\overline{BD}=\sqrt{7}:1$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{7}k$, $\overline{BD}=k$
라 하면 삼각형 ADB에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\cos\frac{2}{3}\pi$
$(\sqrt{7}k)^2=4^2+k^2-2\times 4\times k\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$6k^2-4k-16=0$
$2(3k+4)(k-2)=0$ $\therefore\ k=2$
따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=2R$
$\frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ $\therefore\ R=\frac{2\sqrt{21}}{3}$
이므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{28}{3}\pi$

11. 정답 ③



곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ 및 x축, y축으로 둘러싸인 영역을 C라 하면

$(A+C$의 넓이$)=(B+C$의 넓이$)$ … ㉠

방정식 $-x^2+2x+3=0$에서

$-(x+1)(x-3)=0$ ∴ $x=3$ ($\because$ $x\geq 0$)

이므로

$$(A+C\text{의 넓이})=\int_0^3(-x^2+2x+3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^3=9$$

$$(B+C\text{의 넓이})=(\text{삼각형 OPR의 넓이})$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OR}}$$

$$=\frac{1}{2}\times 3\times\overline{\mathrm{OR}}=9\ (\because\ ㉠)$$

∴ $\overline{\mathrm{OR}}=6$

이때 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

직선 PR의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x+3$$

점 $\mathrm{Q}(a,b)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$이 만나는 점이므로

방정식 $-a^2+2a+3=-\frac{1}{2}a+3$에서

$$a^2-\frac{5}{2}a=0$$

$$a\left(a-\frac{5}{2}\right)=0 \qquad \therefore\ a=\frac{5}{2}\ (\because\ a>0)$$

12. 정답 ④

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	…	3	…	6	…	9	…	(12)
$f(x)$	(0)	+	10	+	0	−	−10	−	(0)
$g(x)$	(10)	+	0	−	−10	−	0	+	(10)

함수 $f(x)$의 치역이 집합 $\{y\,|\,-2c\leq y\leq c\}$이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 닫힌구간 $[a,b]$에 존재한다.

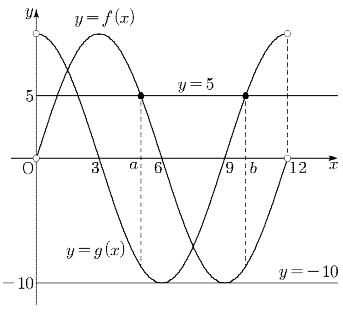
이때 $f(k)=0$, $0<k<12$를 만족시키는 k의 값이 6뿐이므로 함수 $f(x)$의 정의역에 $x=6$이 포함된다.

즉, $a\leq 6\leq b$이고 $g(6)=-10$이므로

함수 $g(x)$의 치역은 집합 $\{y\,|\,-10\leq y\leq c\}$이다.

$-2c=-10$ ∴ $c=5$ … ㉡

닫힌구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



㉡에 의하여 $f(a)=g(b)=5$이므로

$$10\sin\left(\frac{a\pi}{6}\right)=5,\ 10\cos\left(\frac{b\pi}{6}\right)=5$$

$$\sin\left(\frac{a\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{b\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

∴ $a=5$ ($\because$ $3<a<6$),

$b=10$ ($\because$ $9<b<12$)

따라서 구하는 값은

$a+b+c=5+10+5=20$

13. 정답 ④

a_1은 자연수이므로 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 자연수이다.

(ⅰ) $1\leq a_6\leq 3$일 때

a_6	a_5	a_4
1	(모순)	
2	1	(모순)
3	(모순)	

(ⅱ) $a_6=4$일 때

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
4	5	6	7	8	3
					9
	2	1	(모순)		

(ⅲ) $a_6=5$일 때

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
5	6	7	8	3	(모순)
				9	10

(ⅳ) $a_6=6$일 때

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
6	7	8	3	(모순)	
			9	10	11

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 가능한 모든 a_1의 값은

3, 9, 10, 11

이고, 그 합은

$3+9+10+11=33$

14. 정답 ⑤

$x\neq 0$일 때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $k\neq 0$인 실수 k에 대하여 $f(k)=0$이면

$$\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k-}f(t)=0$$

이고, 방정식 $f(x)\times 0=0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $g(k)$는 정의되지 않는다.

따라서 $x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이다. … ㉢

한편, $x<0$일 때

$x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$

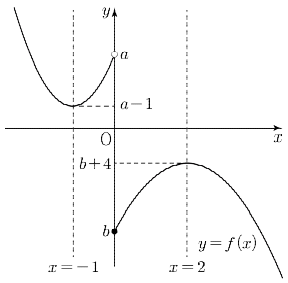
에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-1$을 가지므로 $a-1>0$이고,

$x>0$일 때

$-x^2+4x+b=-(x-2)^2+b+4$

에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $b+4$를 가지므로 $b+4<0$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

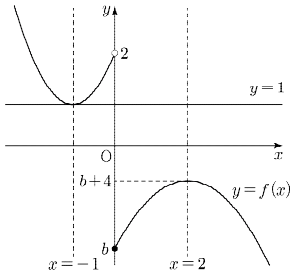


(ⅰ) $k\neq 0$일 때

$$\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k+}f(t)\neq 0$$

$f(x)\times\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k+}f(t)$, 즉 $f(x)=1$

$g(k)=1$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 한 점에서만 만나야 한다.



따라서 함수 $y=x^2+2x+a$의 그래프는 직선 $y=1$과 접해야 하므로 함수 $y=x^2+2x+a$의 최솟값은 1이다.

$a-1=1$ ∴ $a=2$

(ⅱ) $k=0$일 때

$$\lim_{t\to 0-}f(t)=a=2,\ \lim_{t\to 0+}f(t)=b$$

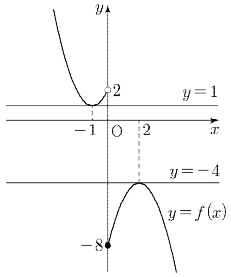
$f(x)\times\lim_{t\to k-}f(t)=\lim_{t\to k+}f(t)$, 즉 $f(x)=\frac{b}{2}$

$g(k)=1$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{b}{2}$와 한 점에서만 만나야 하고, $b<-4$이므로

함수 $y=-x^4+4x+b$의 그래프와 직선 $y=\frac{b}{2}$가 접해야 한다.

함수 $y=-x^4+4x+b$의 최댓값은 $b+4$이므로

$\frac{b}{2}=b+4$ ∴ $b=-8$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$, $b=-8$이므로

$a\times b=-16$

15. 정답 ②

$g(x)=\int_0^x f(s)\,ds$라 하면 주어진 조건은

$|x|\leq t$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)-g(t)\leq 0\leq g(x)-g(-t)$

$g(-t)\leq g(x)\leq g(t)$

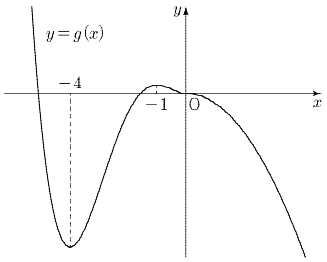
즉, 닫힌구간 $[-t,t]$에서 함수 $g(x)$는 최솟값 $g(-t)$와 최댓값 $g(t)$를 가진다. … ㉣

또한 $x<0$에서

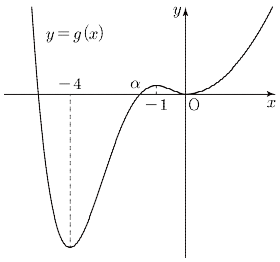
$g'(x)=f(x)=x(x+1)(x+4)$

이므로 $x<0$일 때 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

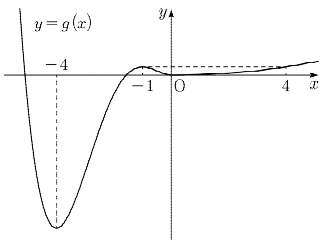
x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	(0)
$g(x)$	↘	$-\frac{32}{3}$	↗	$\frac{7}{12}$	↘	(0)



이때 $m \le 0$ 이면 $x \ge 0$ 에서 $g(x) \le 0$ 이므로
함수 $g(x)$ 가 ㉠을 만족시키지 않는다.
$\therefore\ m > 0$



한편, ㉠을 만족시키려면
함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-t, t]$ 에서 최솟값이 $g(-t)$ 이어야 하므로
방정식 $g(x)=0$ 의 실근 중 -4 보다 크고 -1 보다 작은 것을 α 라 하면
$-4 \le -t \le \alpha$,
$-\alpha \le t \le 4$ $\cdots$ ㉡
$\alpha < -1$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-t, t]$ 에서 극댓값 $\frac{7}{12}$ 을 가진다.
이 구간에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $g(t)$ 이므로
$g(t) \ge \frac{7}{12}$
이때 ㉡의 t 의 범위에서 함수 $g(t)$ 는 증가하고, $g(t) \ge \frac{7}{12}$ 을 만족시키는 양수 t 의 값이 닫힌구간 $[-\alpha, 4]$ 에서 유일하므로
$\therefore\ t=4,\ g(4)=\frac{7}{12}$



$x > 0$ 에서 $g(x)=\int_0^x ms\,ds$ 이므로

$$g(4)=\int_0^4 ms\,ds=\left[\frac{m}{2}s^2\right]_0^4=8m=\frac{7}{12}$$

$\therefore\ m=\frac{7}{96}$

16. 정답 6

부등식 $(2^x-3)(2^x-7) \le 5$ 에서
$2^{2x}-10\times 2^x+21 \le 5$
$2^{2x}-10\times 2^x+16 \le 0$
$(2^x-2)(2^x-8) \le 0$
$2 \le 2^x \le 8$
$\therefore\ 1 \le x \le 3$
따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 $1+2+3=6$

17. 정답 20

$\lim_{x\to 4}\frac{a\sqrt{x}-2}{x-4}=b$ 에서 $x\to 4$ 일 때 (분모)$\to 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 4}(a\sqrt{x}-2)=2a-2=0$ $\therefore\ a=1$
따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{a\sqrt{x}-2}{x-4}&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}\\&=\frac{1}{4}=b\end{aligned}$$

이므로 $16(a+b)=20$

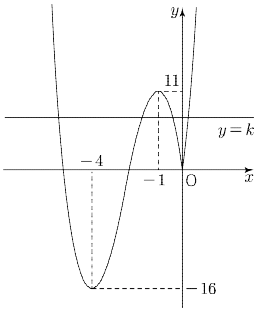
18. 정답 110

$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{5}(a_k-4k)^2$ 에서

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{5}\{(a_k)^2-8ka_k+16k^2\}$$
$$0=\sum_{k=1}^{5}(-8ka_k+16k^2)$$
$$\sum_{k=1}^{5}ka_k=2\sum_{k=1}^{5}k^2$$
$$=2\times\frac{5\times 6\times 11}{6}=110$$

19. 정답 10

$x > 0$ 일 때
$2x^4+15x^3+24x^2=kx$
$2x^3+15x^2+24x=k$
$x < 0$ 일 때
$2x^4+15x^3+24x^2=-kx$
$-2x^3-15x^2-24x=k$
한편, 방정식 $2x^4+15x^3+24x^2=k|x|$ 가 $x=0$ 을 실근으로 가지므로
$x > 0$ 일 때 곡선 $y=2x^3+15x^2+24x$ 과 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와
$x < 0$ 일 때 곡선 $y=-2x^3-15x^2-24x$ 과 직선 $y=k$ 의 교점의 개수의 합이 4 일 때
방정식 $2x^4+15x^3+24x^2=k|x|$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5 이다.
이때 $f(x)=2x^3+15x^2+24x$ 라 하면
$f'(x)=6x^2+30x+24=6(x+1)(x+4)$ 이므로
두 함수
$y=2x^3+15x^2+24x\ (x>0)$,
$y=-2x^3-15x^2-24x\ (x\le 0)$
의 그래프와 직선 $y=k$ 는 다음 그림과 같다.



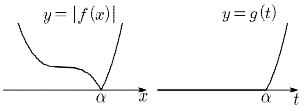
따라서 가능한 k 의 값의 범위는 $0 < k < 11$ 이므로 정수 k 의 최댓값은 10

20. 정답 5

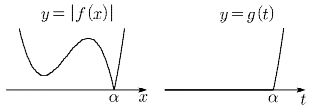
x 에 대한 방정식 $(x^n-16)(x^{2n}-64)=0$ 에서
$x^n=16$ 또는 $x^{2n}=64$
(ⅰ) n 이 홀수일 때
$x^n=16$ 의 실근은 $x=2^{\frac{4}{n}}$,
$x^{2n}=64$ 의 실근은 $x=\pm 2^{\frac{3}{n}}$ 이므로
모든 실근의 곱은
$2^{\frac{4}{n}}\times\left(-2^{\frac{3}{n}}\right)\times 2^{\frac{3}{n}}=-2^{\frac{10}{n}}$
(ⅱ) n 이 짝수일 때
$x^n=16$ 의 실근은 $x=\pm 2^{\frac{4}{n}}$,
$x^{2n}=64$ 의 실근은 $x=\pm 2^{\frac{3}{n}}$ 이고
모든 실근의 곱은 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 n 은 10 의 약수이면서 홀수이므로 $n=5\ (n \ge 2)$

21. 정답 93

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않고 $f(\alpha)=0$ 이라 하면 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=g(t)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

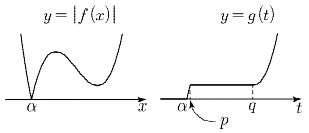


이때 함수 $g(t)$ 는 구간 $(-\infty, \alpha]$ 에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖는다.
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만날 때의 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만날 때
$f(\alpha)=0$ 이라 하면
① 함수 $|f(x)|$ 가 $x \ge \alpha$ 에서 극솟값을 갖지 않을 때

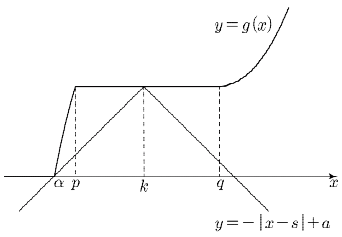


함수 $g(t)$ 는 구간 $(-\infty, \alpha]$ 에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

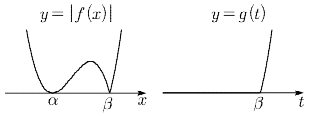
② 함수 $|f(x)|$가 $x>\alpha$에서 극솟값을 가질 때



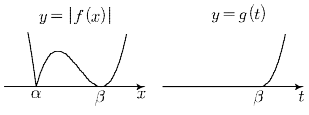
함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 점의 x좌표를 q, 방정식 $|f(x)|=f(q)$를 만족시키는 x의 값 중 $\alpha<x<q$인 x의 값을 p라 하면
함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty,\alpha]$와
닫힌구간 $[p,q]$에서만 증가하지 않는다.
$\alpha<x<q$에서 함수 $y=-|x-s|+h(s)$의 그래프에서 점 $(s,h(s))$가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있도록 하는 양수 s가 존재하지 않으면 함수 $h(s)$는 구간 $(-\infty,\alpha]$에서만 증가하지 않으므로 모순이다.
$\alpha<x<q$에서 함수 $y=-|x-s|+h(s)$의 그래프에서 점 $(s,h(s))$가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있을 때, 점의 x좌표를 k라 하면
함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,\alpha]$,
닫힌구간 $[k,q]$에서만 증가하지 않는다.
$\therefore\ \alpha=0,\ k=1,\ q=2$



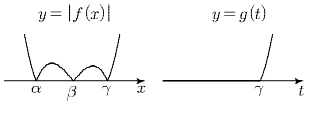
(ⅱ) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만날 때
$f(\alpha)=f(\beta)=0\ (\alpha<\beta)$라 하면
① 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값을 가질 때



함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty,\beta]$에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
② 함수 $f(x)$가 $x=\beta$에서 극솟값을 가질 때

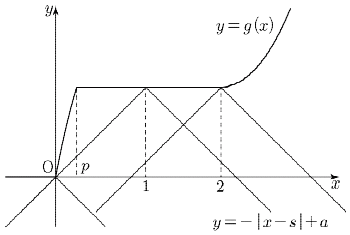


함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty,\beta]$에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅲ) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만날 때
$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0\ (\alpha<\beta<\gamma)$라 하면



함수 $g(t)$는 구간 $(-\infty,\gamma]$에서만 증가하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편, 위 그림과 같이 함수 $h(s)$는
구간 $(-\infty,0]$에서 증가하지 않으므로
$g(0)=0$
이고 함수 $y=-|x-s|+h(s)$의 대칭축이 $x=1$이고 원점을 지나야 하므로
$0=-|(0-1)|+h(1)\qquad\therefore\ h(1)=1$
$f(x)=(x-p)(x-2)^2+1$에서 $f(0)=0$이므로
$f(0)=-4p+1=0\qquad\therefore\ p=\frac{1}{4}$
즉,
$f(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-2)^2+1$
따라서 구하는 값은
$f(6)=\frac{23}{4}\times16+1=93$

22. 정답 71

$b_n=a_n+p$라 하면
$b_1=a_1+p,\ b_2=a_1-\frac{5}{2}+p,$
$b_3=a_1-5+p,\ b_4=a_1-\frac{15}{2}+p,\ \cdots$
이때 b_3의 값이 자연수이면
$b_1=b_3+5$
이므로 b_1의 값도 자연수이고 조건을 만족시키지 않는다.
마찬가지로 b_4의 값이 자연수이면 b_2의 값이 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $n\ge3$인 모든 자연수 n에 대하여 b_n의 값은 자연수가 아니어야 한다. … ㉠
(ⅰ) b_1의 값이 자연수일 때
b_1의 값이 자연수이면 모든 자연수 n에 대하여 b_{2n}의 값은 자연수가 아니다.
또한 b_1의 값이 6 이상의 자연수이면
b_3의 값도 자연수이고
㉠을 만족시키지 않으므로 $b_1\le5$이어야 한다.
따라서 가능한 b_1의 값은
1, 2, 3, 4, 5
이므로 가능한 p의 값은
$1-a_1,\ 2-a_1,\ 3-a_1,\ 4-a_1,\ 5-a_1$
(ⅱ) b_2의 값이 자연수일 때
b_2의 값이 자연수이면 모든 자연수 n에 대하여 b_{2n-1}의 값은 자연수가 아니다.
또한 b_2의 값이 6 이상의 자연수이면
b_4의 값도 자연수이고
㉠을 만족시키지 않으므로 $b_2\le5$이어야 한다.
따라서 가능한 b_2의 값은
1, 2, 3, 4, 5
이므로 가능한 p의 값은
$1-a_2,\ 2-a_2,\ 3-a_2,\ 4-a_2,\ 5-a_2$
이때 $a_2=a_1-\frac{5}{2}$이므로 가능한 p의 값은
$\frac{7}{2}-a_1,\ \frac{9}{2}-a_1,\ \frac{11}{2}-a_1,\ \frac{13}{2}-a_1,\ \frac{15}{2}-a_1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $m=10$이고 p의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것은 다음 표와 같다.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
$1-a_1$	$2-a_1$	$3-a_1$	$\frac{7}{2}-a_1$	$4-a_1$

p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
$\frac{9}{2}-a_1$	$5-a_1$	$\frac{11}{2}-a_1$	$\frac{13}{2}-a_1$	$\frac{15}{2}-a_1$

따라서
$p_{10}=\frac{15}{2}-a_1=\frac{23}{2}\qquad\therefore\ a_1=-4$
이므로 구하는 값은
$\sum_{n=1}^{m-1}p_n$
$=(1+2+3+4+5)+\left(\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+\frac{11}{2}+\frac{13}{2}\right)-9a_1$
$=15+20-9\times(-4)=71$

[확률과 통계]

23	③	**24**	⑤	**25**	④	**26**	②	**27**	①
28	②	**29**	95	**30**	50				

[해설]

23. 정답 ③

다항식 $(x^2+2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(x^2)^r2^{5-r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
따라서 x^6의 계수는 $r=3$일 때이므로
${}_5C_3\times2^2=40$

24. 정답 ⑤

두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
한편,
$\frac{P(A)}{2}=\frac{P(B)}{3}=\frac{P(A\cup B)}{4}=k\left(0<k\le\frac{1}{4}\right)$
이라 하면
$P(A)=2k,\ P(B)=3k,\ P(A\cup B)=4k$
$P(A\cup B)=4k$에서
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
$=5k-6k^2=4k$
$6k^2-k=0$
$k(6k-1)=0\qquad\therefore\ k=\frac{1}{6}\ (\because\ 0<k\le\frac{1}{4})$
따라서 구하는 값은
$P(A)+P(B)=5k=\frac{5}{6}$

25. 정답 ④

$a+b+c=9$를 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a,b,c)의 개수는 ${}_3H_6=28$ … ㉠
조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는 a, b, c가 모두 홀수인 경우와 같다.
이 경우 a, b, c가 각각
7, 1, 1 또는 5, 3, 1 또는 3, 3, 3
이면 되므로 이 경우 순서쌍의 개수는
$\frac{3!}{2!}+3!+1=10$ … ㉡
㉠−㉡에서 구하는 순서쌍의 개수는
$28-10=18$

26. 정답 ②

전체 확률의 합은 1이므로
$2a+b=1$
$\therefore\ b=1-2a$ … ㉠
또한
$\mathrm{E}(X)=a+2b+3a$
$=4a+2b$
$=4a+2-4a\ (\because\ ㉠)$
$=2,$
$\mathrm{E}(X^2)=a+4b+9a$
$=10a+4b$
$=10a+4-8a\ (\because\ ㉠)$
$=2a+4$
이므로 $\mathrm{V}(X)=3b$에서
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=2a+4-4$
$=2a=3b$
㉠에 $2a=3b$를 대입하면
$b=\frac{1}{4},\ a=\frac{3}{8}$
$\therefore\ a+b=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

27. 정답 ①

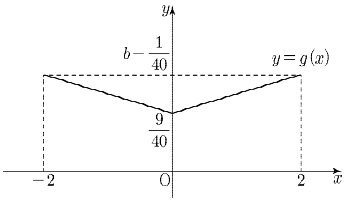
$x\times y$가 6의 배수인 경우는
6, 12, 18, 24, 30, 36
(i) $x\times y=6$인 경우
주어진 조건 $x+y\le 9$를 만족시키는
x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(1, 6),\ (6, 1),\ (2, 3),\ (3, 2)$
이므로 확률은
$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
(ⅱ) $x\times y=12$인 경우
주어진 조건 $x+y\le 9$를 만족시키는
x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(2, 6),\ (6, 2),\ (3, 4),\ (4, 3)$
이므로 확률은
$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
(ⅲ) $x\times y=18$인 경우
주어진 조건 $x+y\le 9$를 만족시키는
x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(3, 6),\ (6, 3)$
이므로 확률은
$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
(ⅳ) $x\times y=24,\ 30,\ 36$인 경우
세 경우 모두 $x+y>9$이므로 주어진 조건 $x+y\le 9$를 만족시키지 않는다.
(i)~(ⅳ)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$

28. 정답 ②

조건 (가)에 의하여
$f(2)=f(4),\ f(1)=f(5)$ … ㉠
이고, 세 점 $(m, f(m))$, $(6, f(6))$, $(7, f(7))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 S라 하자.
(i) $f(6)=f(7)$일 때
두 점 $(6, f(6))$, $(7, f(7))$을 이은 선분이 x축과 평행하므로 5 이하의 모든 자연수 m에 대하여
$f(m)\ne f(6)$
즉, 삼각형 S는 밑변의 길이가 1인 삼각형이므로 높이는 5 이하이어야 한다.
$|f(m)-f(6)|\le 5$
$|f(m)-f(6)|$의 최댓값은 $|5-1|=4$이므로 항상 주어진 조건을 만족시킨다.
$f(6)$, $f(7)$의 값을 결정하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_1=5$
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 결정하는 경우의 수는
${}_4\Pi_3=64$
$f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 ㉠에 의하여 1
따라서 경우의 수는 $5\times 64=320$
(ⅱ) $f(6)\ne f(7)$일 때
두 점 $(6, f(6))$, $(7, f(7))$을 이은 선분이 x축과 평행하지 않으므로 5 이하의 모든 자연수 m에 대하여
$f(m)=f(6)$ 또는 $f(m)=f(7)$
① $|f(6)-f(7)|=1$일 때
삼각형 S는 높이가 1인 삼각형이므로 밑변의 길이는 5 이하이어야 한다.
이때 $f(1)=f(7)$이면 밑변의 길이가 6이므로 $f(1)=f(6)$이다.
$f(6)$, $f(7)$의 값을 결정하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1\times 2!=8$
$f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 1
$f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수는
${}_2\Pi_2=4$
$f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 ㉠에 의하여 1
따라서 경우의 수는 $8\times 4=32$
② $|f(6)-f(7)|\ge 2$일 때
$f(1)=f(6)$ 또는 $f(1)=f(7)$이어야 하므로 삼각형 S의 밑변의 길이는 5 또는 6이다.
즉, 삼각형 S의 넓이가 항상 $\frac{5}{2}$보다 크다.
①, ②에 의하여 경우의 수는 32
(i), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$320+32=352$

29. 정답 95

$\mathrm{P}(-2\le X\le 2)=1$이므로
$\mathrm{P}(-2\le X\le 2)=\frac{a+b}{2}\times 4=1$
$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}$ … ㉠
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표는
$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{4}\ (\because\ ㉠)$
이고, 확률밀도함수 $g(x)=f(|x|)-\frac{1}{40}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\mathrm{P}(-2\le Y\le 2)=1$이고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
$2\mathrm{P}(0\le Y\le 2)=2\times\frac{\frac{9}{40}+b-\frac{1}{40}}{2}\times 2$
$=2b+\frac{2}{5}=1$
$\therefore\ b=\frac{3}{10},\ a=\frac{1}{5}\ (\because\ ㉠)$
한편, $0\le x\le 2$에서
$g(x)=\frac{1}{40}x+\frac{9}{40}$
이고 $g(1)=\frac{1}{4}$이므로
$\mathrm{P}(|Y|\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Y\le 1)$
$=2\times\frac{\frac{9}{40}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{19}{40}$
따라서 구하는 값은
$\frac{12}{ab}\times\mathrm{P}(|Y|\le 1)=12\times\frac{50}{3}\times\frac{19}{40}$
$=95$

30. 정답 50

2개의 동전을 동시에 던져
앞면이 나온 개수가 2인 사건을 X,
앞면이 나온 개수가 0인 사건을 Y,
앞면이 나온 개수가 1인 사건을 Z라 하자.
사건 X가 일어날 확률은 ${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$
사건 Y가 일어날 확률은 ${}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
사건 Z가 일어날 확률은 ${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$
또한 $a_5=b_5$이고 $a_5\times b_5\ne 0$인 사건을 E,
$1\le k\le 4$인 모든 자연수 k에 대하여 $a_k\ge b_k$인 사건을 F라 하자.
(i) $\mathrm{P}(E)$
사건 E가 일어나려면 5번의 시행에서 사건 X, Y, Z가 일어나는 횟수가 각각
1, 1, 3 또는 2, 2, 1
이어야 한다.
① 1, 1, 3인 경우
사건 E가 일어날 확률은
$\frac{5!}{3!}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{32}$
② 2, 2, 1인 경우
사건 E가 일어날 확률은
$\frac{5!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{15}{256}$
①, ②에 의하여 사건 E가 일어날 확률은
$\mathrm{P}(E)=\frac{5}{32}+\frac{15}{256}=\frac{55}{256}$
(ⅱ) $\mathrm{P}(E\cap F)$
사건 $E\cap F$가 일어나려면
(i)-①에서 두 사건 X, Y가 일어나는 순서가 X, Y
이어야 하므로 확률은
$\frac{5!}{2!3!}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{64}$
또한 (i)-②에서 두 사건 X, Y가 일어나는 순서가
X, X, Y, Y 또는 X, Y, X, Y
이어야 하므로 확률은
$2\times\frac{5!}{4!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{256}$
따라서 사건 $E\cap F$가 일어날 확률은
$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{5}{64}+\frac{5}{256}=\frac{25}{256}$
(i), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은
$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{25}{256}}{\frac{55}{256}}=\frac{5}{11}$
따라서 $p=\frac{5}{11}$이므로 $110\times p=50$

[미적분]

23	③	**24**	④	**25**	①	**26**	⑤	**27**	②
28	③	**29**	11	**30**	16				

[해설]

23. 정답 ③

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi-3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\times\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin x}{x}}$$
$$=\frac{3\times 1}{1}=3$$

24. 정답 ④

$$\int_1^e\left(x-\frac{1}{4}\right)\ln x\,dx$$
$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}\right)\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e}{4}\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{e}{4}\right)=\frac{e^2}{4}$$

25. 정답 ①

주어진 입체도형을 $0\le t\le \ln 2$인 실수 t에 대하여 점 $(t,0)$을 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\dfrac{e^t}{e^{2t}+1}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\frac{e^t}{e^{2t}+1}\right)^2=\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt$$

$e^{2t}+1=x$라 하면 $t=0$일 때 $x=2$,
$t=\ln 2$일 때 $x=5$이고 $\dfrac{dx}{dt}=2e^{2t}$이므로

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt=\int_2^5\frac{1}{2x^2}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2x}\right]_2^5$$
$$=-\frac{1}{10}+\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$$

26. 정답 ⑤

점 P_n이 점 P_1에서 출발하여 시계 반대 방향으로 움직인 거리를 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{a\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{3}a\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{2}a\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}a$$

한편, 정삼각형 ABC 위의 점 X에 대하여
선분 AB 위의 점 중 $\overline{AX}=\sqrt{3}$인 점을 X_1,
선분 BC 위의 점 중 $\overline{AX}=\sqrt{3}$인 점을 X_2,
선분 AC 위의 점 중 $\overline{AX}=\sqrt{3}$인 점을 X_3이라 하면 점 X_2는 선분 BC의 중점이므로 $\overline{BX_2}=1$이다.
$\lim_{n\to\infty}\overline{AP_n}=\sqrt{3}$에서 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$\frac{1}{2}a-6k=\overline{AX_1}=\sqrt{3}$$

또는

$$\frac{1}{2}a-6k=\overline{AB}+\overline{BX_2}=2+1=3$$

또는

$$\frac{1}{2}a-6k=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CX_3}$$
$$=2+2+(2-\sqrt{3})=6-\sqrt{3}$$

이어야 한다.

이때 $0<a<12$에서 $0<\dfrac{1}{2}a<6$이므로 조건을 만족시키는 $\dfrac{1}{2}a$의 값은

$$\sqrt{3},\ 3,\ 6-\sqrt{3}$$

이므로 가능한 모든 a의 값은

$$2\sqrt{3},\ 6,\ 12-2\sqrt{3}$$

이므로 그 합은 18

27. 정답 ②

$$f(x)=\begin{cases}a-\ln\left(x^2+x+\dfrac{5}{4}\right) & (x\le b)\\ \dfrac{2x}{16x^4+3} & (x>b)\end{cases}$$

에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=b$에서도 연속이다.

$$a-\ln\left(b^2+b+\frac{5}{4}\right)=\frac{2b}{16b^4+3}\qquad\cdots\ ㉠$$

함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$에서 증가해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{4}} & (x<b)\\ \dfrac{-6(16x^4-1)}{(16x^4+3)^2} & (x>b)\end{cases}$$

에서

$$-\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{4}}\ge 0$$

$$\therefore\ x\le-\frac{1}{2}\quad(\because\ x^2+x+\frac{5}{4}>0)$$

이고

$$\frac{-6(16x^4-1)}{(16x^4+3)^2}\ge 0$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\le 0$$
$$\therefore\ -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$$

즉, 함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$에서 증가하려면

$$b=-\frac{1}{2}$$

이고 ㉠에 $b=-\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$$a-\ln\left(b^2+b+\frac{5}{4}\right)=\frac{2b}{16b^4+3}$$
$$a-\ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{-1}{1+3}\qquad\therefore\ a=-\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 값은

$$a+b=-\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

28. 정답 ③

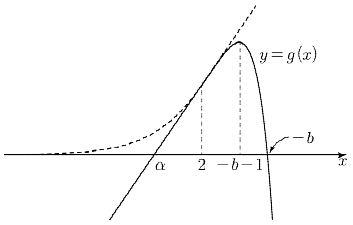
함수 $f(x)=a(x+b)e^x$에서

$$f'(x)=a(x+b+1)e^x$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-b-1$에서 최댓값이자 극댓값을 갖는다.
$x<2$일 때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$ 위의 점 $(2,f(2))$에서 그은 접선이고,
$x\ge 2$일 때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$이므로 b의 값의 범위에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $b<-3$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표 중 $-b$가 아닌 값을 α라 하면 부등식 $g(x)\ge 0$을 만족시키는 x의 범위는

$$\alpha\le x\le -b$$

이고, 부등식 $g(g(x))\ge 0$을 만족시키는 x의 범위는 부등식

$$\alpha\le g(x)\le -b$$

를 만족시키는 x의 범위와 같으므로

$$\therefore\ \alpha=0,\ f(-b-1)\le -b\qquad\cdots\ ㉡$$

한편, 점 $(\alpha,0)$은 직선 $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ 위의 점이므로

$$0=a(3+b)e^2(\alpha-2)+a(2+b)e^2$$
$$0=(3+b)\times(-2)+(2+b)\ (\because\ a<0)$$
$$\therefore\ b=-4$$

이때 ㉡에 의하여 $f(3)\le 4$이므로

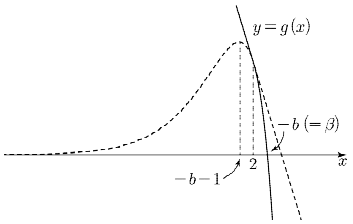
$$a(3+b)e^3\le 4$$
$$-ae^3\le 4\qquad\therefore\ -\frac{4}{e^3}\le a<0$$

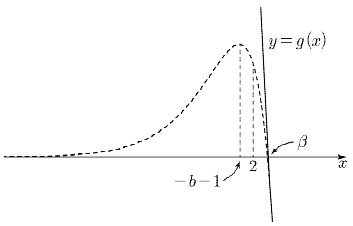
따라서 $f(-1)=a(-1+b)e^{-1}=a\times\left(-\dfrac{5}{e}\right)$이므로

$$0<a\times\left(-\frac{5}{e}\right)\le-\frac{4}{e^3}\times\left(-\frac{5}{e}\right)$$
$$\therefore\ 0<f(-1)\le\frac{20}{e^4}$$

(ii) $b\ge -3$일 때

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.





이때 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 β라 하면 부등식 $g(x)\ge 0$을 만족시키는 x의 범위는

$$x\le\beta$$

이고, 부등식 $g(g(x)) \ge 0$을 만족시키는 x의 범위는 부등식

$g(x) \le \beta$ … ㉡

를 만족시키는 x의 범위와 같으므로

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$가 만나는 점의 x좌표를 γ라 하면 ㉡을 만족시키는 x의 범위는

$x \ge \gamma$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(-1)$의 값의 최댓값은 $\dfrac{20}{e^4}$

29. 정답 11

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$가 수렴하므로 $-1 < r < 1$이다.

$b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$에서

$b_n = \dfrac{a_1 r^n}{1-r} + \dfrac{a_1 r(1-r^{2n})}{1-r^2}$ … ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-1)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(b_n-1)=0 \quad \therefore \ \lim_{n\to\infty} b_n = 1$

위 식에 ㉠을 대입하면

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{a_1 r^n}{1-r} + \dfrac{a_1 r(1-r^{2n})}{1-r^2}\right\}$

$= 0 + \dfrac{a_1 r}{1-r^2} = 1$

$\therefore \ \dfrac{a_1 r}{1-r^2} = 1$ … ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$b_n = \dfrac{a_1 r^n}{1-r} + 1 - r^{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-1) = \dfrac{15}{8}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{a_1 r^n}{1-r} + 1 - r^{2n} - 1\right\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\{(1+r)r^{n-1} - r^{2n}\}$ ($\because$ ㉡)

$= \sum_{n=1}^{\infty}(1+r)r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$

$= \dfrac{1+r}{1-r} - \dfrac{r^2}{1-r^2} = \dfrac{15}{8}$

$8(1+r)^2 - 8r^2 = 15(1-r^2)$

$15r^2 + 16r - 7 = 0$

$(3r-1)(5r+7) = 0$

$\therefore \ r = \dfrac{1}{3}$ ($\because \ -1 < r < 1$)

㉡에 $r = \dfrac{1}{3}$을 대입하면

$\dfrac{a_1 \times \frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = 1 \quad \therefore \ a_1 = \dfrac{8}{3}$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $p+q=11$

30. 정답 16

조건 (가)에 의하여 $1 \le x \le 9$에서

$f'(x) = -\sin\pi\sqrt{x}$ 또는 $f'(x) = \sin\pi\sqrt{x}$,

$g'(x) = -\sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$ 또는 $g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 조건 (나)에 의하여

$1 < x < 9$에서 $f(x) > g(x)$이고,

$x=1$, $x=9$일 때 $f(x) \le g(x)$이므로

$f(1) = g(1)$, $f(9) = g(9)$ … ㉢

한편, 방정식 $-\sin\pi\sqrt{x} = \sin\pi\sqrt{x}$에서

$x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=9$

$\int_1^4 \sin\pi\sqrt{x}\,dx$에서 $\sqrt{x}=t$라 하면

$x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=2$이고

$x=t^2$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2t$이므로

$\int_1^4 \sin\pi\sqrt{x}\,dx = \int_1^2 2t\sin\pi t\,dt$

$= \left[-\dfrac{2}{\pi}t\cos\pi t\right]_1^2 + \int_1^2 \dfrac{2}{\pi}\cos\pi t\,dt$

$= -\dfrac{6}{\pi} + \left[\dfrac{2}{\pi^2}\sin\pi t\right]_1^2 = -\dfrac{6}{\pi}$

즉, $1 \le x \le 4$에서

$f'(x) = -\sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 f'(x)\,dx = \dfrac{6}{\pi}$,

$f'(x) = \sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 f'(x)\,dx = -\dfrac{6}{\pi}$

마찬가지로 $1 \le x \le 4$에서

$g'(x) = -\sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 g'(x)\,dx = \dfrac{6\sqrt{k}}{\pi}$,

$g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$이면 $\int_1^4 g'(x)\,dx = -\dfrac{6\sqrt{k}}{\pi}$

이때 ㉢에서 $f(1)=g(1)$이고

조건 (나)에 의하여 $f(4) > g(4)$이므로

$f(4)-f(1) > g(4)-g(1)$

$\int_1^4 f'(x)\,dx > \int_1^4 g'(x)\,dx$

$k > 1$이므로

$-\dfrac{6\sqrt{k}}{\pi} < -\dfrac{6}{\pi} < \dfrac{6}{\pi} < \dfrac{6\sqrt{k}}{\pi}$

즉, $\int_1^4 g'(x)\,dx = -\dfrac{6\sqrt{k}}{\pi}$이어야 하므로

$g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$ $(1 \le x \le 4)$

같은 방법으로

$\int_4^9 \sin\pi\sqrt{x}\,dx = \dfrac{10}{\pi}$

이므로

$\int_4^9 f'(x)\,dx = -\dfrac{10}{\pi}$ 또는 $\int_4^9 f'(x)\,dx = \dfrac{10}{\pi}$

조건 (나)와 ㉢에서 $f(4) > g(4)$, $f(9) = g(9)$이므로

$f(9)-f(4) < g(9)-g(4)$

$\int_4^9 f'(x)\,dx < \int_4^9 g'(x)\,dx$

즉, $\int_4^9 g'(x)\,dx = \dfrac{10\sqrt{k}}{\pi}$이어야 하므로

$g'(x) = \sqrt{k}\sin\pi\sqrt{x}$ $(4 \le x \le 9)$

㉢에서 $f(9)-f(1) = g(9)-g(1)$이므로

$\int_1^9 f'(x)\,dx = \int_1^9 g'(x)\,dx$

$= -\dfrac{6\sqrt{k}}{\pi} + \dfrac{10\sqrt{k}}{\pi} = \dfrac{4\sqrt{k}}{\pi}$

$\int_1^9 f'(x)\,dx = \dfrac{4\sqrt{k}}{\pi} > 0$이므로

$\int_1^9 f'(x)\,dx = -\dfrac{6}{\pi} + \dfrac{10}{\pi} = \dfrac{4}{\pi}$ 또는

$\int_1^9 f'(x)\,dx = \dfrac{6}{\pi} + \dfrac{10}{\pi} = \dfrac{16}{\pi}$

이때 $k > 1$이므로

$\dfrac{4\sqrt{k}}{\pi} = \dfrac{16}{\pi} \quad \therefore \ k = 16$

[기하]

23	④	**24**	②	**25**	⑤	**26**	③	**27**	①
28	③	**29**	10	**30**	48				

[해설]

23. 정답 ④

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로

$\vec{a} = t\vec{b}$ (t는 실수)

$(2, k) = t(4, 6)$

$2 = 4t$, $k = 6t$

$\therefore \ t = \dfrac{1}{2}$, $k = 3$

따라서 구하는 값은

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 3) \cdot (4, 6) = 26$

24. 정답 ②

세 양수 a, b, c에 대하여

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$이라 하고,

두 초점의 좌표를 $(-c, 0)$, $(c, 0)$이라 하면

주축의 길이가 6이므로

$2a = 6 \quad \therefore \ a = 3$

점근선의 방정식이 $y = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$이므로

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \quad \therefore \ b = 2\sqrt{2}$

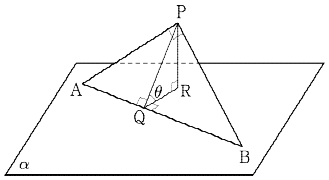
$c^2 = a^2 + b^2$이므로

$c^2 = 9 + 8 = 17 \quad \therefore \ c = \sqrt{17}$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$2c = 2\sqrt{17}$

25. 정답 ⑤



점 P에서 선분 AB와 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{QR} \perp \overline{AB}$, $\theta = \angle PQR$

$\overline{AB} = 5$, $\overline{AP} = 3$이고 $\angle APB = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{BP} = 4$

두 삼각형 APB, AQP는 서로 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{BP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$5 : 4 = 3 : \overline{PQ}$

따라서 $\overline{PQ} = \dfrac{12}{5}$이고 $\overline{PR} = 2$이므로

$\sin\theta = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \dfrac{5}{6}$

26. 정답 ③

타원 C_1의 초점의 좌표는 각각

$F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

이고 점 A의 좌표는 $A(0, 3\sqrt{3})$이다.

즉, $\angle F'AO = \dfrac{\pi}{6}$이므로

$\angle F'AB = \angle F'AO + \angle OAB$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$ … ㉠

한편, $\overline{BC} = k$라 하면

점 C는 타원 C_2 위의 점이므로

타원의 정의에 의하여

$\overline{AC} + \overline{BC} = 12$

이므로

$\overline{AC} = 12 - k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$k^2 = (12-k)^2 + 6^2 + (12-k) \times 6$ ($\because$ ㉠)

$30k = 252$ $\therefore\ k = \frac{42}{5}$

따라서 선분 BC의 길이는 $\frac{42}{5}$

27. 정답 ①

선분 DE의 중점을 M이라 할 때

$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{ME}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD})$

$= (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD})$

$= |\overrightarrow{BM}|^2 - |\overrightarrow{MD}|^2$

$= |\overrightarrow{BM}|^2 - 1 = 10$

$\therefore\ |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{11}$

$\angle ACE = \theta$라 할 때

$\angle BCM = \angle BCA + \angle ECM + \theta$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \theta$

$= \frac{\pi}{2} + \theta$

이므로

삼각형 BCM에서 코사인법칙에 의하여

$11 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 구하는 값은

$\sin(\angle ACE) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

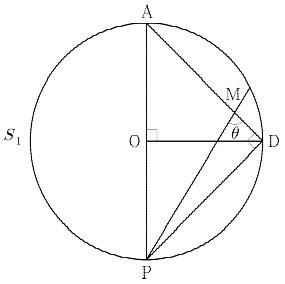
28. 정답 ③

선분 BC의 중점을 M이라 하고 직선 AM이 구 S_1과 만나는 점을 D라 하면

선분 AD는 원 C의 지름이고 평면 ABC가 평면 α와 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\overline{AD} = 4$이고

$\overline{AM} = 3$, $\overline{MD} = 1$ ($\because$ [참고])



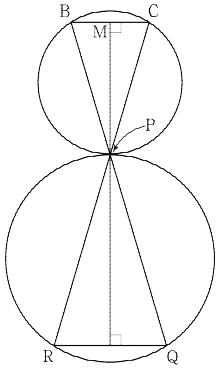
이때 평면 PQR과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\angle PMD = \theta$이고

$\overline{PM}^2 = \sqrt{\overline{PD}^2 + \overline{MD}^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

이므로

$\cos\theta = \frac{\overline{MD}}{\overline{PM}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

한편, 평면 PBC와 구 S_1과 만나서 생기는 원과 평면 PQR과 구 S_2가 만나서 생기는 원은 점 P에서 외접하고 있으므로 삼각형 PBC와 삼각형 PQR은 서로 닮음이다.



삼각형 ABC는 정삼각형이고 $\overline{AM} = 3$이므로

$\overline{BC} = 2\sqrt{3}$

삼각형 PBC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{PM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{17} = \sqrt{51}$

두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이의 비는

$1 : \sqrt{3}$

이고 두 삼각형 PBC, PQR은 한 평면 위에 있다.

두 삼각형 PBC, PQR의 닮음비는 $1 : \sqrt{3}$이므로 넓이의 비는 $1 : 3$이다.

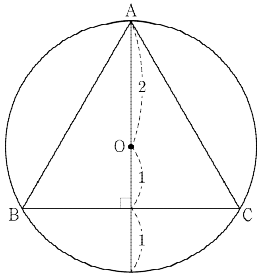
따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\sqrt{51} \times 3 = 3\sqrt{51}$

이므로 삼각형 PQR의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

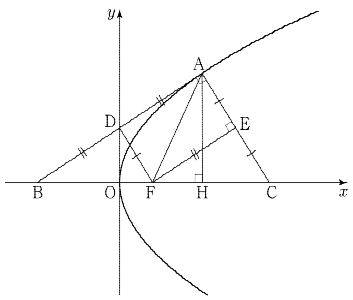
$3\sqrt{51} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 3\sqrt{3}$

[참고]



29. 정답 10

(ⅰ) 점 C의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 클 때



점 F는 삼각형 ABC의 외심이고

외심이 선분 BC 위에 있으므로

삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

점 F에서 두 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면

$\overline{FD} = \overline{AE} = \overline{EC} = \sqrt{14}$,

$\overline{FE} = \overline{AD} = \overline{DB} = \sqrt{35}$

이므로

$\overline{BC} = \sqrt{(2\sqrt{35})^2 + (2\sqrt{14})^2} = 14$,

$\overline{AF} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = 7$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{AH}$

이므로

$\overline{AH} = \frac{2\sqrt{35} \times 2\sqrt{14}}{14} = 2\sqrt{10}$이고

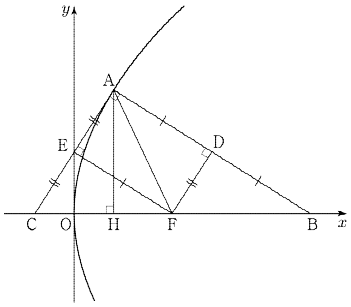
점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H′이라 할 때, $\overline{AF} = \overline{AH'}$이므로 $\overline{FH}$는

$\overline{AH'} = 7 = 2p + \overline{FH}$

$\overline{FH} = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} = 3 = 7 - 2p$

$\therefore\ p = 2$

(ⅱ) 점 B의 x좌표가 점 C의 x좌표보다 클 때



(ⅰ)과 같은 방법으로

$\overline{FD} = \overline{AE} = \overline{EC} = \sqrt{14}$,

$\overline{FE} = \overline{AD} = \overline{DB} = \sqrt{35}$

이므로

$\overline{BC} = \sqrt{(2\sqrt{35})^2 + (2\sqrt{14})^2} = 14$,

$\overline{AF} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = 7$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{AH}$

이므로

$\overline{AH} = \frac{2\sqrt{35} \times 2\sqrt{14}}{14} = 2\sqrt{10}$,

점 A에서 포물선의 준선의 내린 수선의 발을 H′이라 할 때, $\overline{AF} = \overline{AH'}$이므로 $\overline{FH}$는

$\overline{AH'} = 7 = 2p - \overline{FH}$

$\overline{FH} = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} = 3 = 2p - 7$

$\therefore\ p = 5$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 p의 값의 곱은

$2 \times 5 = 10$

30. 정답 48

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{BA}$에서

$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BX}) = 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AX}) = 0$

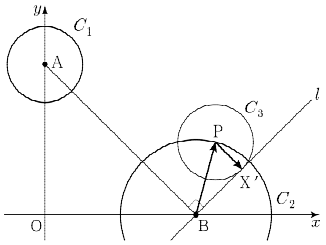
$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AX}) = 0$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AX}$는 서로 수직이다,

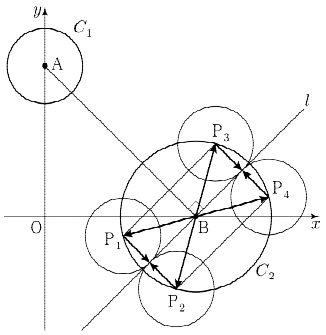
점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선을 l이라 하고 중심이 원 C_2 위에 있도록 원 C_1을 평행이동한 원을 C_3이라 하자.

조건을 만족시키는 점 X의 개수가 1이 되려면
원 C_3은 직선 l에 접해야 한다.
이때 접점을 X′이라 하면

$$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PX'}$$



직선 l에 접하고 중심이 C_2 위에 있는 원의 개수는
4이므로 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4는 다음 그림과
같다.



사각형 $P_1P_2P_4P_3$는 직사각형이고

$$\overline{P_1P_2}=2\times1=2,$$

$$\overline{P_1P_3}=2\times\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$$

이므로 사각형 $P_1P_2P_4P_3$의 넓이는

$$S=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

따라서 구하는 값은

$$S^2=(4\sqrt{3})^2=48$$