다원교육 고등대치본관
허혁재T - 수능공통범위

2011학년도 평가원 전문항

2010학년도 6월 극한 1문항
2009학년도 6월 지수로그함수 1문항
2011학년도 6월 모의평가
2011학년도 9월 모의평가
2011학년도 수능

S11

5월1주차 - 2011(빠른 정답)

다원수1수2 2025.04.30

1. [정답] 10
2. [정답] ④
3. [정답] ②
4. [정답] ②
5. [정답] ①

6. [정답] ①
7. [정답] ④
8. [정답] ③
9. [정답] 19
10. [정답] ④

11. [정답] ①
12. [정답] ①
13. [정답] ④
14. [정답] 64
15. [정답] 12

16. [정답] 10
17. [정답] ①
18. [정답] ①
19. [정답] ②
20. [정답] ④

21. [정답] ④
22. [정답] 25
23. [정답] 14
24. [정답] 15
25. [정답] 15

26. [정답] ③
27. [정답] ②
28. [정답] 21
29. [정답] ②
30. [정답] ①

31. [정답] ③
32. [정답] ③
33. [정답] 13
34. [정답] ③
35. [정답] ④
36. [정답] ⑤
37. [정답] ②
38. [정답] 16
39. [정답] ③
40. [정답] 19

41. [정답] ⑤
42. [정답] ①
43. [정답] 100
44. [정답] 147

5월1주차 - 2011(해설)

다원수1수2 2025.04.30

1) [정답] 10

[출처] 2009년(2010학년도) 평가원 고3이과 6월 19 [3.00점]

[해설]

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}$ 에서 $\dfrac{1}{x}=t$라 하면

$x\to0+$일 때 $t\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

따라서 $f(t)=t^3+5t^2+at+b$라 하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}$ 에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$ 이므로

(분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1+5+a+b=0$

$\therefore a+b=-6$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2+ax+b}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}$$

$$=\frac{a+13}{3}=\frac{1}{3}$$

$\therefore a=-12$

따라서 ㉠에서 $b=6$이므로

$f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore f(2)=10$

2) [정답] ④

[출처] 2008년(2009학년도) 평가원 고3문과 6월 17 [4.00점]

[출처] 2008년(2009학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 17 [4.00점]

[해설]

$\log_2 5x=\log_2(x+m)$에서 $5x=x+m$이므로 $x=\dfrac{m}{4}$

$\log_2(-5x)=\log_2(x+m)$에서 $-5x=x+m$이므로 $x=-\dfrac{m}{6}$

$\therefore A\left(-\dfrac{1}{3},\ \log_2\dfrac{5}{3}\right),\ B\left(\dfrac{1}{2},\ \log_2\dfrac{5}{2}\right)$

$C\left(-\dfrac{m}{6},\ \log_2\dfrac{5}{6}m\right),\ D\left(\dfrac{m}{4},\ \log_2\dfrac{5}{4}m\right)$

ㄱ. $m>2$이면

$p=-\dfrac{m}{6}<-\dfrac{1}{3},\ r=\dfrac{m}{4}>\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\overline{CD}$의 기울기는

$$\frac{\log_2\frac{5}{4}m-\log_2\frac{5}{6}m}{\frac{m}{4}-\frac{m}{6}}=\frac{\log_2\left(\frac{5}{4}m\times\frac{6}{5m}\right)}{\frac{m}{12}}$$

따라서 m의 값에 따라 기울기가 달라진다. (거짓)

ㄷ. $\log_2\dfrac{5}{2}=\log_2\dfrac{5}{6}m$에서 $m=3$

이 때

$$\triangle CAB=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\left(\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\log_2\frac{3}{2}$$
$$\triangle CBD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\left(\log_2\frac{15}{4}-\log_2\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\log_2\frac{3}{2}$$

이므로 두 삼각형의 넓이는 같다. (참)

3) [정답] ②

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 1 [2.00점]

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 11월 공통범위 1 [2.00점]

[해설]

$$4^{\frac{3}{2}}\times\log_3\sqrt{3}=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times\log_3 3^{\frac{1}{2}}=2^3\times\frac{1}{2}=8\times\frac{1}{2}=4$$

4) [정답] ②

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 1 [2.00점]

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 1 [2.00점]

[해설]

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2,\ \log_3 81=\log_3 3^4=4$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81=\dfrac{1}{2}\times4=2$

5) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 9월 공통범위 1 [2.00점]

[해설]

$\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3\frac{6\times2}{4}=\log_3 3=1$

6) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 9월 1 [2.00점]

[해설]

$\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4=\log_3\frac{6\times2}{4}=\log_3 3=1$

7) [정답] ④

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 4 [3.00점]

[해설]

$\frac{16^x}{2}=2^{x+3}$에서 $(2^4)^x=2\cdot2^{x+3}$

$2^{4x}=2^{x+4}\Leftrightarrow 4x=x+4$

$\therefore\ x=\frac{4}{3}$

8) [정답] ③

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 4 [3.00점]

[해설]

$5<3^x<100$에서 $x=2,\ 3,\ 4$

x의 값의 합은 $2+3+4=9$

9) [정답] 19

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 9월 18 [3.00점]

[해설]

등차수열 a_n의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=5,\quad a_6-a_4=2d=4$

$\therefore\ a=1,\ d=2$

$\therefore\ a_{10}=a+9d=1+18=19$

10) [정답] ④

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 9월 26 [3.00점]

[해설]

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$에서 $n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 경우는

$n=1$인 경우에 $m=1,\ 2,\ 3$

$2\le n\le7$인 경우에 $m=3$

$n=8$인 경우에 $m=1,\ 2,\ 3$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$3+6+3=12$

11) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 5 [3.00점]

[해설]

$(f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)$

$=f(g(2))+g(h(2))$

$=f(4)+g(1)$

$=2^4+1=17$

12) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 26 [3.00점]

[해설]

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로

$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

$\therefore\ \{a_n\}$은 등차수열이다.

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=-1\quad\cdots\cdots$ ①

$a_3=a+2d=2\quad\cdots\cdots$ ②

②−①에서 $d=3$

$\therefore\ a=-4,\ a_n=3n-7$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(3k-7)$

$=3\sum_{k=1}^{10}k-70$

$=3\times\frac{10\times11}{2}-70$

$=95$

13) [정답] ④

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 4 [3.00점]

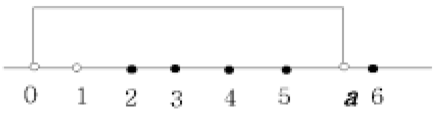
[해설]

$x(x-a)(x-1)^2<0$에서

$(x-1)^2\ge0$이므로

$x(x-a)<0,\ x\ne1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

따라서 ㉠을 만족하는 자연수의 개수가 4개이므로 다음과 같아야 한다.



$\therefore\ 5 < a \leq 6$

따라서 실수 a의 최댓값은 6이다.

14) [정답] 64

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 18 [3.00점]

[해설]

$a_2a_4 = a_3^2 = 16$

$\therefore\ a_3 = 4(\because a_n > 0)$

$a_3a_5 = 4a_5 = 64$

$\therefore\ a_5 = 16$

따라서 공비를 $r(r>0)$라 하면 $a_5 = a_3r^2 = 4r^2 = 16$

$r^2 = 4$

$\therefore\ \ r = 2$

$\therefore\ \ a_7 = a_5r^2 = 16 \times 2^2 = 64$

15) [정답] 12

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 19 [3.00점]

[해설]

$\log_3(x-4) \ = \log_{3^2}(5x+4)$

$\log_3(x-4) = \dfrac{1}{2}\log_3(5x+4)$

$2\log_3(x-4) = \log_3(5x+4)$

$\log_3(x-4)^2 = \log_3(5x+4)$

$(x-4)^2 = 5x+4,\ x^2-13x+12 = 0$

$(x-1)(x-12) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 12$

이때 진수조건에 의하여 $x > 4$이므로 $\alpha = 12$

16) [정답] 10

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 9월 20 [3.00점]

[해설]

$2^x - 8 = 0$ 에서 $x = 3$

$3^{2x} - 9 = 9^x - 9 = 0$ 에서 $x = 1$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

17) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 3 [2.00점]

[해설]

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = 14$에서

$x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to3}(x^2+ax+b) = 9+3a+b = 0$

$\therefore b = -3(a+3)$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+ax-3(a+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+a+3)}{x-3}$

$= 6+a$

$= 14$

$\therefore\ a = 8,\ b = -33$

$\therefore\ a+b = -25$

18) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 11 [3.00점]

[해설]

$y = a^x$를 y축에 대칭시키면 $y = a^{-x}$이다.

이것을 다시 x축으로 3, y축으로 2만큼 평행이동하면

$y = a^{-(x-3)}+2 \quad \cdots\cdots(*)$

$(*)$의 그래프가 $(1,\ 4)$를 지나므로

$4 = a^{-(1-3)}+2$

$\therefore\ a^2 = 2$

$\therefore\ a = \sqrt{2}\ \ (\because\ a > 0)$

19) [정답] ②

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 9월 5 [3.00점]

[해설]

$\dfrac{1}{3} < x < 9$에서

$\log_3\dfrac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 9$

$-1 < \log_3 x < 2 \cdots$ ㉠

$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x) > 0$에서

$(\log_3 x+1)(\log_3 x - a) < 0$

이 부등식의 해가 ㉠이므로

$a = 2$

20) [정답] ④

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 6 [3.00점]

[해설]

첫째항이 1, 끝항이 2, 항의 개수가 $n+2$이므로

$\frac{(n+2)(1+2)}{2}=24$

$n+2=16$

$\therefore\ n=14$

21) [정답] ④

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 7 [3.00점]

[해설]

$\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2)$에서

진수조건에서

$x^2+x-2>0$

$(x+2)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

$-2x+2>0$

$\therefore\ x<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $x<-2$ ...... ㉢

주어진 로그부등식의 밑이 2이므로

$x^2+x-2<-2x+2$

$x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$

$\therefore\ -4<x<1$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서

$-4<x<-2$

$\therefore\ \alpha=-4,\ \beta=-2$

$\therefore\ \alpha\beta=8$

22) [정답] 25

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 18 [3.00점]

[해설]

$h=\frac{1}{n}$으로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$

$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}$

$=3f'(1)+2f'(1)$

$=5f'(1)$

이때, $f'(x)=8x^3-3$이므로

$5f'(1)=5\times(8-3)=25$

23) [정답] 14

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 11월 공통범위 18 [3.00점]

[해설]

$f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2$

$=(x-1)\{2(x-4)+(x-1)\}$

$=(x-1)(3x-9)$

$=3(x-1)(x-3)$

따라서 $x=3$에서 극솟값 $f(3)=(3-1)^2(3-4)+a$를 가지는데 조건에서 극솟값이 10이므로

$(3-1)^2(3-4)+a=10$ $\therefore\ a=14$

24) [정답] 15

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 22 [3.00점]

[해설]

$a=\log_2(2+\sqrt{3})$에서

$2^a=2+\sqrt{3}$

$4^a=(2^a)^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$

$\therefore\ 4^a+\frac{4}{2^a}=7+4\sqrt{3}+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$

$=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})$

$=15$

25) [정답] 15

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 22 [4.00점]

[해설]

$a_2,\ a_4,\ a_9$의 공비를 r라 하면

$$a_2=\frac{a_4}{r},\ a_9=a_4r$$

이다. $\{a_n\}$가 등차수열이므로

$$a_4-a_2=a_4-\frac{a_4}{r}=2d$$

$$a_9-a_4=a_4r-a_4=5d$$

이다. 따라서

$$\left(1-\frac{1}{r}\right) : 2=(r-1) : 5$$

$$\left(\frac{r-1}{r}\right) : 2=(r-1) : 5$$

$$\therefore\ r=\frac{5}{2} \qquad \therefore\ 6r=15$$

26) [정답] ③

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 9월 이산수학 26 [3.00점]

[해설]

$a_1=2,\ a_2=3$

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=n+1\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ 에서

$\sum_{k=1}^{14} a_k=a_1+a_2+(a_3+a_4+a_5)+\cdots+(a_{12}+a_{13}+a_{14})$

$=2+3+4+7+10+13=39$

27) [정답] ②

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 27 [3.00점]

[해설]

곡선 $y=a^{-x-2}$가 직선 $y=1$과 만나는 점

A의 좌표를 A(t, 1)이라 하면

$1=a^{-t-2}$ 에서 $a>1$ 이므로 $-t-2=0$이다. $\therefore\ t=-2$

또 곡선 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나 는 점 B의

좌표를 B(k, 1)이라 하면 $1=\log_a(k-2),\ k-2=a$

$\therefore\ k=a+2$ 따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{a+2-(-2)\}^2+(1-1)^2}$

$=(a+4)=8$이므로 $a=4$ 이다.

28) [정답] 21

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 30 [4.00점]

[해설]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k=\log\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡ : $a_n=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\log\frac{n(n+1)}{2}$

$=\log\frac{n+2}{n}$

$$\therefore\ a_{2n}=\log\frac{2n+2}{2n}=\log\frac{n+1}{n}$$

$$p=\sum_{k=1}^{20} a_{2k}=\sum_{k=1}^{20}\log\frac{k+1}{k}$$

$=\sum_{k=1}^{20}\{-\log k+\log(k+1)\}$

$=-\log 1+\log 21$

$=\log 21$

$$\therefore\ 10^p=10^{\log 21}=21$$

29) [정답] ②

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 9월 공통범위 5 [3.00점]

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n\leq 2$이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$이고, $x\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이므로

(분모)$\to 0$이어야 한다.

따라서, $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로

$f(x)=ax^2+bx$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx}{x}=\lim_{x\to 0}(ax+b)=b$

이므로 $b=5$

방정식 $ax^2+5x=x$의 한 근이 $x=-2$이므로

$4a-10=-2$에서 $4a=8$

$\therefore\ a=2$

따라서, $f(x)=2x^2+5x$이므로 $f(1)=7$

30) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 6월 8 [3.00점]

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 8 [3.00점]

[해설]

직선 AB의 방정식은 $y-3=-(x-2)$즉, $y=-x+5$

한편, 두 함수 $y=2^x-1,\ y=\log_2(x+1)$은 서로 역함수이므로

두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

직선 AB가 직선 $y=x$와 수직으로 만나므로

점 B의 좌표는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한

것과 같다. $\therefore\ B(3, 2)$

사각형 $ACDB$에서 $\overline{AC}=3,\ \overline{BD}=2,\ \overline{CD}=1$이므로

사각형 $ACDB$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(3+2)\times 1=\frac{5}{2}$

31) [정답] ③

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 7 [3.00점]

[해설]

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\frac{t-1}{t+1}$로 놓으면

$s=1+\frac{-2}{t+1}$이므로 $t\to\infty$일 때, $s\to1-$

$\therefore \lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{s\to1-}f(s)=2$ …… ㉠

또, $\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\frac{4t-1}{t+1}$로 놓으면

$s=4+\frac{-5}{t+1}$이므로 $t\to-\infty$일 때, $s\to4+$

$\therefore \lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{s\to4+}f(s)=3$ …… ㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

32) [정답] ③

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 9월 15 [4.00점]

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 9월 공통범위 15 [4.00점]

[해설]

선분 AC가 y축에 평행하므로

두 점 A, C의 좌표를 각각

$A(t,\ \log_2 4t)$, $C(t,\ \log_2 t)$ $(t>1)$라고 하면

$\overline{AC}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

따라서 점 B의 좌표는

$B(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3}))$ 이고

$\overline{AB}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$

$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$

이므로 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm1$이다.

그런데 $t>1$이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고

$\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\frac{1}{2}$, $2(t-\sqrt{3})=t$ $\therefore t=2\sqrt{3}$

이 때 점 B의 좌표는 $B(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3}$, $q=\log_2 4\sqrt{3}$

$\therefore p^2\times2^q=(\sqrt{3})^2\times2^{\log_2 4\sqrt{3}}=3\times4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

33) [정답] **13**

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 9월 공통범위 21 [3.00점]

[해설]

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$이므로

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+2)t^2+at\}=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)$

$x=0$일 때 $y=g(t)$이므로

$g(t)-\{t^3-(a+2)t^2+at\}=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(-t)$

$\therefore g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$이므로

이차함수 $g'(t)$가 $0<t<5$에서 $g'(t)>0$이려면

$g'(0)\geq0$, $g'(5)\geq0$이어야 한다.

$g'(0)=0$이고, $g'(5)=-150+10(a+2)\geq0$이므로 $a\geq13$

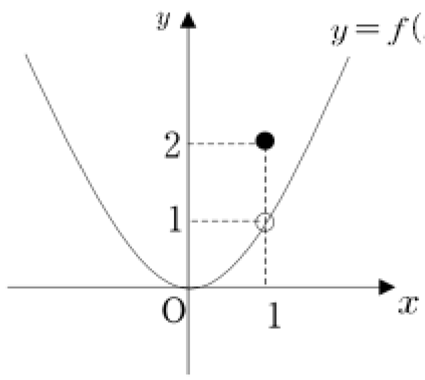
따라서, 구하는 a의 최솟값은 13이다.

34) [정답] ③

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 11 [4.00점]

[해설]

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=1=\lim_{x\to1+}f(x)$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x-a)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $g(x)$가 실수전체의 집합에서 연속인 실수 a는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $y=x-1$이 실수 전체의 집합에서 연속이고, $y=f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 $h(x)=(x-1)f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to1+}h(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x-1)x^2=\lim\limits_{x\to1+}(x^3-x^2)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}h(x)=0$

$h(1)=(1-1)f(1)=0\times2=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}h(x)=h(1)$

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

35) [정답] ④

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 15 [4.00점]

[해설]

ㄱ. $g(x)=f(a)$에서 $b-a>0$이므로

$f(a)+(b-a)f'(x)=f(a)$

$(b-a)f'(x)=0$

$f'(x)=0$

이때, $y=f(x)$의 그래프는 극댓값과 극솟값을 을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 실근을 갖는다. <참>

ㄴ. $g(b)-f(a)=\{f(a)+(b-a)f'(b)\}-f(a)$

$=(b-a)f'(b)$

이때, $b-a>0$이고 $y=f(x)$가 감소하는 구간에서는 $f'(b)<0$이므로 $(b-a)f'(b)<0$

그러므로 $g(b)>f(a)$라고 할 수 없다. <거짓>

ㄷ. $g(a)-f(b)=\{f(a)+(b-a)f'(a)\}-f(b)$

$=(b-a)\left\{f'(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}$

이때, $b-a>0$이고 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기 $f'(a)$는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기 보다 항상 크므로 $f'(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$

그러므로 $g(a)>f(b)$ <참>

36) [정답] ⑤

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 16 [4.00점]

[해설]

ㄱ. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0+}h(x)=\lim\limits_{x\to0-}h(x)=h(0)$

따라서, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}g(x)$에서

$f(0)=g(0)$ (참)

ㄴ. $f'(0)=g'(0)=k$라 하면

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=k$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-f(0)}{x}$

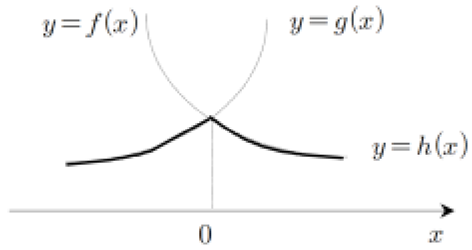
$=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$=g'(0)=k$

$\therefore h'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=k$ (참)

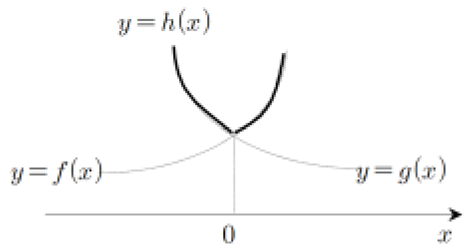
ㄷ. (ⅰ) $f'(0)<0$, $g'(0)>0$이면

$f(x)$는 $x=0$에서 감소상태, $g(x)$는 $x=0$에서 증가상태이고, $f(0)=g(0)$이므로 아래의 그림과 같이 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ⅱ) $f'(0)>0$, $g'(0)<0$이면

$f(x)$는 $x=0$에서 증가상태, $g(x)$는 $x=0$에서 감소상태이고, $f(0)=g(0)$이므로 아래의 그림과 같이 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서, $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

37) [정답] ②

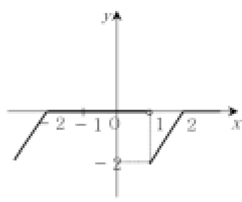
[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 11월 공통범위 8 [3.00점]

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1+}\{f(x)+f(-x)\}=-1+1=0$ $\therefore$ 참

ㄴ. $g(x)=f(x)-|f(x)|$라고 하면

$g(x)=\begin{cases}2x+4 & (\le -2)\\ 0 & (-2<x<1)\\ 2x-4 & (1\le x<2)\\ 0 & (x\ge2)\end{cases}$



따라서 $g(x)=f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서만 불연속이다.

$\therefore$ 참

ㄷ. $a=-1$일 때, $f(x)f(x-a)=f(x)f(x+1)$은 실수 전체에서 연속이다. $\therefore$ 거짓

38) [정답] **16**

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 24 [4.00점]

[해설]

(i) $8<x<9$일 때,

x보다 작은 자연수 중에서 소수는 $2, 3, 5, 7$의 4개이므로

$f(x)=4$

이 때, $2f(x)=8<x$이므로

$g(x)=f(x)=4$

$\therefore \lim_{x\to 8+} g(x)=\lim_{x\to 8+} 4=4$

$\therefore \alpha=4$

(ii) $7<x<8$일 때,

x보다 작은 자연수 중에서 소수는$2, 3, 5, 7$의 4개이므로

$f(x)=4$

이 때, $2f(x)=8>x$이므로 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \lim_{x\to 8-} g(x)=\lim_{x\to 8-}\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \beta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{\frac{1}{4}}=16$

39) [정답] ③

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 16 [4.00점]

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 11월 공통범위 16 [4.00점]

[해설]

ㄱ. $y=-\log_2 x$의 그래프 위의 점 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$과 $P(x_1, y_1)$의 위치를 비교하면 $y_1<1$이므로 $\dfrac{1}{2}<x_1<1$ $\therefore$ 참

ㄴ. $y=2^x$의 역함수는 $y=\log_2 x$이고,

$y=-\log_2 x$의 역함수는 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$이므로

$y=2^x$와 $y=-\log_2 x$의 교점 $R(x_3, y_3)$와 $y=\log_2 x$와 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 교점 $Q(x_2, y_2)$는 직선 $y=x$에 대해 대칭이다.

$\therefore x_3=y_2,\ x_2=y_3$ …… (*)

$\therefore x_2y_2-x_3y_3=0$ $\therefore$ 참

ㄷ. 점 $(1, 0)$을 S라 하면

$(\overline{RS}$의 기울기$)<(\overline{PS}$의 기울기$)$이므로

$\dfrac{y_3}{x_3-1}<\dfrac{y_1}{x_1-1}$이고, 여기에 위의 (*)을 대입하면

$\dfrac{x_2}{y_2-1}<\dfrac{y_1}{x_1-1}$이 성립하므로

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)(\because x_1-1<0,\ y_2-1<0)$ $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40) [정답] 19

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 23 [4.00점]

[해설]

(가)에서 $f(x)$의 최고차항을 $ax^n(a\neq 1)$이라 하면

$\{f(x)\}^2-f(x^2)$의 최고차항은

$a^2x^{2n}-ax^{2n}=a(a-1)x^{2n}$ …… ㉠

또, $x^3f(x)$의 최고차항은

ax^{n+3} …… ㉡

0이 아닌 극한값이 존재하려면 ㉠과 ㉡에서

$2n=n+3$ $\therefore$ $n=3$

이때, 극한값이 4이므로

$\dfrac{a(a-1)}{a}=4$ $\therefore$ $a=5$

$f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$로 놓으면

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

(나)에서

$\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{15x^2+2bx+c}{x}$

이때, $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 0}(15x^2+2bx+c)=c=0$

이 값을 대입하면

$\lim_{x\to 0}\dfrac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to 0}(15x+2b)=2b=4$

$\therefore b=2$

따라서 $f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=15+4=19$

41) [정답] ⑤

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 6월 공통범위 12 [4.00점]

[해설]

ㄱ. $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$ 이므로

$f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다. (참)

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$ 이면

$f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$

이므로 ㄱ에 의하여 $f(x)$의 사차항의 계수를 k라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$

또는, $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)$

또는, $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$으로 나타낼 수 있다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다. (참)

ㄷ. $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x^2+ax+b)$라고 하면

$f'(x)=k(x-\beta)(x^2+ax+b)$

$+k(x-\alpha)(x^2+ax+b)+k(x-\alpha)(x-\beta)(2x+a)$

$f'(\alpha)f'(\beta)$

$=\{k(\alpha-\beta)(\alpha^2+a\alpha+b)\}\times\{k(\beta-\alpha)(\beta^2+a\beta+b)\}$

$=-k^2(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+a\alpha+b)(\beta^2+a\beta+b)>0$

$(\alpha^2+a\alpha+b)(\beta^2+a\beta+b)<0$

따라서 $g(x)=x^2+ax+b$라고 하면

$g(\alpha)g(\beta)<0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 구간 (α,β)에서 방정식 $g(x)=0$은 하나의 실근을 갖는다. 또한, $g(x)$는 이차함수이므로 다른 구간에서 또다른 하나의 실근을 갖는다.

즉, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

42) [정답] ①

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 9월 공통범위 16 [4.00점]

[해설]

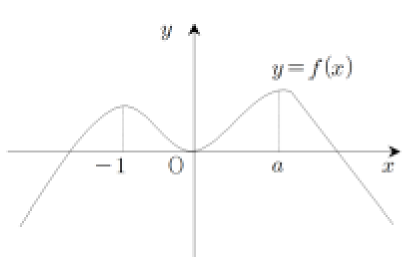
$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(-1)=2a+1,\ f(a)=a^4+2a^3$이고,

$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1=(a+1)^3(a-1)$

이므로 $0<a<1$이면 $f(a)<f(-1)$

$a\geq1$이면 $f(a)\geq f(-1)$이다.

(i) $0<a<1$인 경우

$t<-1$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq-1$이면 $g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서, $g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$이고,

$\lim_{t\to-1-0}g'(t)=\lim_{t\to-1+0}g'(t)=0$이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$일 때 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ii) $a\geq1$인 경우

$f(-1)=f(\alpha)\ (0<\alpha\leq a)$이라 하자.

$t<-1$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\leq t<\alpha$이면 $g(t)=f(-1)=2a+1$

$\alpha\leq t<a$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq a$이면 $g(t)=f(a)=a^4+2a^3$

따라서, $g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<\alpha)\\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (\alpha<t<a)\\ 0 & (t>a)\end{cases}$

$\lim_{t\to-1-0}g'(t)=\lim_{t\to-1+0}g'(t)=0$이므로

$g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$\lim_{t\to a-0}g'(t)=\lim_{t\to a+0}g'(t)$이어야 하므로

$-12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$에서 $12(a-1)a^2=0\quad\therefore\ a=1$

$a=1$이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$이므로 $f(-1)=f(1)$

$\therefore\ \alpha=a=1$

$\therefore\ g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12t & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<1)\\ -12t^3+12t & (t>1)\end{cases}$

$g'(-1)=0,\ g'(1)=0$이므로

$a=1$일 때, $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i),(ii)에서 함수 $g(t)$가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0<a\leq1$이므로

구하는 a의 최댓값은 1이다.

43) [정답] 100

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3문과 11월 23 [4.00점]

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 11월 공통범위 23 [4.00점]

[해설]

$n=2$일 때, $\{3,\ 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}$, 즉 $f(2)=1$

$n=3$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8\}$, 즉 $f(3)=3$

$n=4$일 때, $\{3,\ 3^3,\ 3^5,\ 3^7\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ 3^8,\ 3^{10},\ 3^{12}\}$, 즉 $f(4)=5$

⋮

$n=k$일 때, $\{3,\ 3^3,\ \cdots,\ 3^{2k-1}\}$이므로

$S=\{3^4,\ 3^6,\ \cdots,\ 3^{4(k-1)}\}$, 즉 $f(k)=2k-3$

따라서

$$\sum_{n=2}^{11} f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)$$

$=1+3+5+\cdots+19$

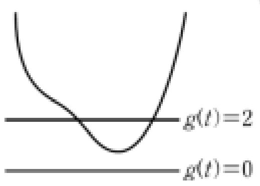
$=\dfrac{10\times(1+19)}{2}=100$

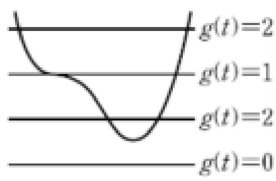
44) [정답] 147

[출처] 2010년(2011학년도) 평가원 고3이과 11월 공통범위 24 [4.00점]

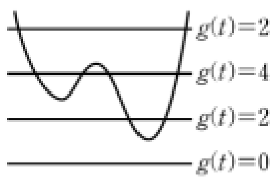
[해설]

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

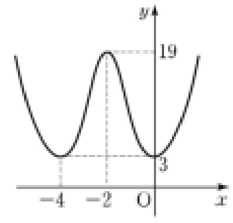
$f(x)=3$의 한 근이 0이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

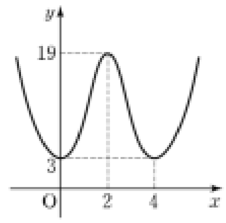
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서

$(극댓값)=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore\ \alpha=\pm4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times36+3=147$

5월1주차 - 2011(빠른 정답)

다원수1수2 2025.04.30

1. [정답] **10**
2. [정답] ④
3. [정답] ②
4. [정답] ②
5. [정답] ①

6. [정답] ①
7. [정답] ④
8. [정답] ③
9. [정답] 19
10. [정답] ④

11. [정답] ①
12. [정답] ①
13. [정답] ④
14. [정답] 64
15. [정답] 12

16. [정답] 10
17. [정답] ①
18. [정답] ①
19. [정답] ②
20. [정답] ④

21. [정답] ④
22. [정답] 25
23. [정답] 14
24. [정답] 15
25. [정답] 15

26. [정답] ③
27. [정답] ②
28. [정답] 21
29. [정답] ②
30. [정답] ①

31. [정답] ③
32. [정답] ③
33. [정답] **13**
34. [정답] ③
35. [정답] ④

36. [정답] ⑤
37. [정답] ②
38. [정답] **16**
39. [정답] ③
40. [정답] 19

41. [정답] ⑤
42. [정답] ①
43. [정답] **100**
44. [정답] 147